Dinamički model ljubavi

1 Uvod

S dinamičkim sustavima (sustavima običnih diferencijalnih jednadžba) uspješno se modeliraju prirodoznanstveni i inženjerski fenomeni. Psihološki i društveni fenomeni puno su složeniji. Ipak u drugoj polovici 20. stoljeća pokušalo se s modeliranjem fenomena ljubavi. O tome se nešto može pročitati u članku J.C. Sprott, Dynamical Models of Love, Nonlinear Dynamics, Psychology and Life Sciences, vol 8 (303-314), 2004.
http://sprott.physics.wisc.edu/pubs/paper277.htm .
Zbog složenosti materije **nelinearni modeli** su prikladniji i mnogi su u medjuvremenu i razvijeni. Oni su izrasli iz linearnih koji su u početku predloženi. U ovoj lekciji prikazat ćemo jedan takav **linearni model**. Vidjet ćemo da je i takav model relativno uspješan.

2 Postavljanje modela

Općenito je situacija puno složenija, ali ovdje ćemo razmotriti odnos dviju osoba na čije osjećaje u najvećoj mjeri utječu one same, dok je utjecaj okoline zanemariv (zatvoreni sustav). Kako se proces odvija u vremenu jedna od **varijabla** bit će vrijeme t. Tradicionalno, druge dvije varijable označavaju se kao R (podsjeća na Romea) odnosno J (podsjeća na Juliju). R se može interpretirati kao količina Romeove ljubavi prema Juliji, a J kao količina Julijine ljubavi prema Romeu. Te veličine mogu biti pozitivne ili negativne (mržnja je negativna ljubav), a mogu biti i nula (ravnodušnost). Vremenom se te veličine mijenjaju, tj. R, J su funkcije vremena. Da se to naglasi često se piše $R(t), J(t)$. Zadatak matematičkog modela jest da koliko-toliko vjerno opiše (predvidi) tu promjenu, tj. da se odrede vrijednosti $R(t), J(t)$ za sve t.

2.1 Autonomni dinamički sustav. Linearni sustav.

Dinamički sustav zasniva se na opisu **brzine** promjene varijabla s obzirom na vrijeme t. U ovom slučaju to znači da treba predložiti jednadžbe za $\frac{dR}{dt}$ (brzina promjene veličine R) i $\frac{dJ}{dt}$ (brzina promjene veličine J). Ako je u nekom trenutku $dR/dt > 0$, veličina R u tom trenutku raste, a ako je $dR/dt < 0$, onda se R smanjuje. Dinamički sustav je **autonoman** ako se te jednadžbe mogu zapisati samo u ovisnosti o R, J dok se t izravno ne pojavljuje (izostanak utjecaja evolucije). Razvijeni su i neautonomni modeli za modeliranje fenomena ljubavi, ali mi se ovdje ograničujemo samo na autonomne, dakle na sustave dviju običnih diferencijalnih jednadžba oblika

$$\begin{aligned} dR/dt &= f(R, J) \\ dJ/dt &= g(R, J) \end{aligned} \tag{1}$$

gdje su f, g realne funkcije ovisne o R, J.

Dinamički sustav (1) je **linearan** ako su f, g linearne funkcije s obzirom na R, J, tj. funkcije oblika $\alpha R+\beta J+\gamma$, gdje su α, β, γ realni brojevi. Brojevi α, β, γ zovu se **parametri**. Oni opisuju unutarnja svojstva veličine na koju se odnosi ili na karakter njenog odnosa s obzirom na drugu veličinu. Parovi osoba razlikuju se s obzirom na ovaj fenomen, a svaki par ima svoje parametre. Na brzinu promjene osjećaja svake od ovih dviju osoba utječu trenutni osjećaji one druge osobe iz para, ali i vlastiti. U ovoj lekciji modeliramo fenomen ljubavi linearnim sustavom.

2.2 Ravnotežno stanje.

U nastavku ćemo pretpostaviti da u ovom odnosu postoji jedinstveno 'idealno' stanje, **stanje ravnoteže** $(R, J) = (r, j)$, tj. situacija pri kojoj vremenom nema nikakvih promjena. Drugim riječima, ako bi u nekom trenutku količina Romeove ljubavi bila r, a Julijine j, onda bi tako ostalo zauvijek. To 'idealno' stanje nije nužno idealno, naročito za vanjskog promatrača. Na primjer, ravnoteža može nastupiti kad jedan partner voli drugoga, a drugi je ravnodušan (ili čak malko mrzi). Ako je $(r, s) = (0, 0)$ onda ravnoteža nastupa kad su osobe ravnodušne jedna prema drugoj. Ravnotežno stanje može biti **nestabilno** (i malo izbacivanje iz ravnoteže vodi katastrofi), a može biti i **stabilno** (izbacivanje iz ravnoteže vremenom se sanira, ili se djelomično sanira - odnos je turbulentan, ali se drži oko ravnoteže). Jedan od zahtjeva mora biti da i matematički model može sve to opisivati (vidjet ćemo da će ovaj moći).

2.3 Opis linearnog dinamičkog modela ljubavi.

Kako smo se odlučili za linearni sustav, izrazi na desnoj strani od (1) trebaju biti linearni. Takodjer treba uzeti u obzir da postoji ravnotežno stanje $(R, J) = (r, j)$. To prirodno vodi do sljedećeg sustava

$$\begin{aligned} dR/dt &= a(R-r)+b(J-j) \\ dJ/dt &= c(R-r)+d(J-j) \end{aligned} \tag{2}$$

gdje su a, b, c, d realni parametri. Parametri a, b, c, d kao i parametri r, j mogu biti pozitivni, negativni ili nula. Ako u (2) stavimo $R = r$ i $J = j$, dobijemo $dR/dt = dJ/dt = 0$. To znači da se ni R ni J ne mijenjaju (brzina promjene im je nula). Zato je (r, j) zaista ravnotežno stanje sustava. Matematičkim rječnikom (r, j) je **fiksna točka** (kritična, stacionarna točka) sustava (2).

Izraz $R - r$ mjeri odstupanje trenutne količine Romeove ljubavi R od stalne ravnotežne vrijednosti r koju on ima u ovom odnosu. Slično vrijedi za izraz $J - j$. Radi jednostavnosti pretpostavimo da je u nekom trenutku $R > r$, tj. da je $R - r > 0$. Tada $a > 0$ znači da je Romeo ohrabren svojim osjećajima pa faktor $a(R - r)$ utječe na povećanje varijable R. Ako je, pak $a < 0$, on se boji svojih povišenih osjećaja, tj. faktor $a(R - r)$ utječe na smanjenje varijable R. Na koncu, ako je $a = 0$, onda na promjenu Romeovih osjećaja utječu samo Julijini osjećaji.

Slično se interpretira izraz $b(J - j)$. Neka je, radi jednostavnosti, $J - j > 0$. Tada $b > 0$ znači da je $b(J - j) > 0$ pa je Romeo ohrabren povišenim Julijinim osjećajima prema njemu. Analogno se interpretira slučaj $b < 0$, odnosno $b = 0$. Ovo se razmišljanje može provesti i kad je $R-r < 0$ odnosno $J - j < 0$. Sve se svodi na to da je umnožak brojeva jednakog predznaka pozitivan, dok je umnožak brojeva različitih predznaka negativan broj.

Općenito izraz $b(J-j)$ doprinos je brzini promjene količine Romeove ljubavi R koja dolazi od vanjskog utjecaja (od Julije), dok je $a(R - r)$ doprinos Romeovih nutarnjih emocija. Hoće li brzina promjene Romeovih osjećaja biti pozitivna, negativna, ili jednaka nuli, ovisi o ukupnom doprinosu ovih dvaju pribrojnika. Napomenimo još da bi se, nakon sredjivanja desnih strana u (2), dobili izrazi oblika $\alpha R+\beta J+\gamma$, što upravo znači da je sustav linearan.

2.4 Intuitivno objašnjenje sustava (2)

Formule iz sustava (2) donekle se mogu objasniti prema uzoru na **Newtonov zakon hladjenja** (zagrijavanja) tijela u sredini stalne temperature: brzina promjene temperature tijela proporcionalna je razlici temperature tijela i stalne temperature sredine. U ovoj analogiji ulogu stalne temperature sredine igraju stalne veličine r odnosno j, dok varijable R odnosno J igraju ulogu temperature tijela. Obrazložimo to pobliže na primjeru prve jednadžbe iz (2).

Zamislimo da u toj prvoj jednadžbi u nekom trenutku vrijedi $J = j$, što znači da u tom trenutku Julija ne utječe na brzinu promjene Romeovih osjećaja. Zato se izraz za dR/dt svede na $a(R-r)$. Dakle, brzina promjene Romeovih osjećaja u tom trenutku proporcionalna je razlici $R-r$ (a ne R), što je prirodno. Parametar a je koeficijent te proporcionalnosti.
Mogu nastupiti tri scenarija. U prvom se Romeo, kako nema nikakvog poticajnog signala od Julije, hladi, tj. R se smanjuje, odnosno $dR/dt < 0$ (u tom trenutku), što znači da je $a < 0$. To znači da Romeovi osjećaji prema Juliji teže prema svojoj ravnotežnoj vrijednosti $R = r$, a brzina hladjenja je tim veća što je apsolutna vrijednost od a veća. Vidimo da je ovaj slučaj u punoj analogiji s Newtonovim zakonom hladjenja.
U drugom scenariju, Romeo se zbog izostanka poticaja još više zagrijava za Juliju, što znači da je $a > 0$. To je kao u Newtonovu zakonu samo sa suprotnim predznakom. U trećem scenariju Romeo se ukopa na mjestu, što znači da je $a = 0$ (brzina promjene Romeovih osjećaja u tom je trenutku jednaka nuli).
Sve se ovo može provesti ako je $R - r < 0$, što znači da je količina Romeove ljubavi niža od ravnotežne. Tada $a < 0$ znači da je $a(R-r) > 0$ pa se on sve više zagrijava za Juliju. I to je u punoj analogiji s Newtonovim zakonom.
Slično se analizira izraz $b(J - j)$ ako pretpostavimo da je $R = r$.

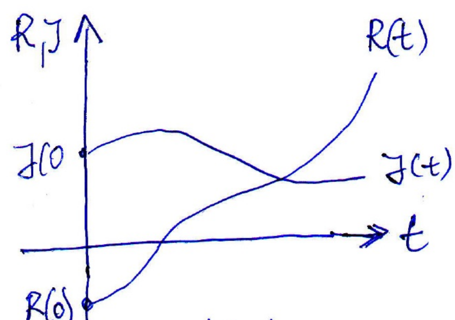
3 Rješavanje sustava

3.1 Eksplicitno rješenje.

Sustav (2) je linearan pa se može eksplicitno riješiti, tj. mogu se **eksplicitno zapisati rješenja** - formule za $R(t), J(t)$ (što je moguće dobiti i u Matlabu). U tom rješenju pojavile bi se dvije **neodredjene konstante**. To znači da sustav ima **beskonačno mnogo rješenja** ovisnih o dva realna parametra. Ako bi bilo zadano **početno stanje** sustava, tj. ako bi se dale vrijednosti $R(0), J(0)$ što se često zapisuje kao R_0, J_0, onda bi rješenje bilo **jedinstveno**. Tako bi, nakon specificiranja svih parametara i početnih vrijednosti, rješenje bilo u obliku **konkretnih formula** za $R(t)$ i $J(t)$. Iz poznatih formula rješenje bi se moglo grafički predočavati, ovisno o potrebi, koristeći se standardnim naredbama.

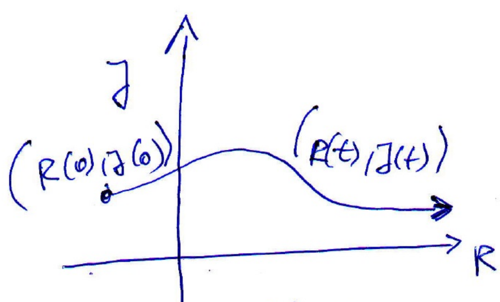
3.2 Numeričko rješavanje.

Za inženjere je prikladnije **numeričko rješavanje sustava**, a prikladnije je i za Matlab (makar je ono inferniornije u usporedbi s egzaktnim rješavanjem). Da bi to bilo moguće **moraju se najprije specificirati vrijednosti parametara i početne vrijednosti** (a takodjer i vremenski interval unutar kojega tražimo rješenje, koji se pak, može mijenjati prema potrebi). Nakon toga rješenje se može predočiti tablično, ali i grafički, što je uobičajeno (nedostatak numeričkog rješavanja u tome je što se ne dobije formula prema kojoj R, odnosno J ovisi o t).
Dva su osnovna grafička prikaza. U prvom se na horizontalnoj osi stavlja vrijeme t, dok se na vertikalnoj stavljaju R, J. Dobiju se dvije krivulje u istom koordinatnom sustavu, jedna za R (koja počinje u točki $(0, R(0))$, a druga za J (koja počinje u točki $(0, J(0))$ (kao na sl. 1). U drugom se prikazu



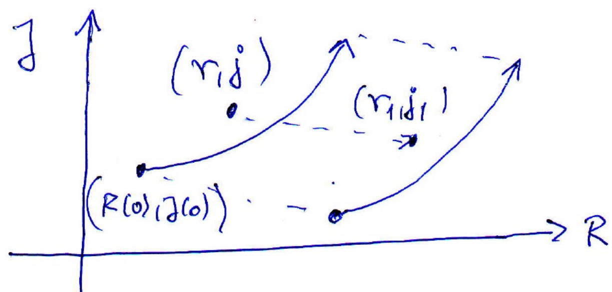
Sl. 1

rješenje predočava krivuljom u $R - J$ koordinatnom sustavu koja počinje u **početnoj točki** $(R(0), J(0))$ (sl. 2). Ta se krivulja zove **trajektorija**.



Sl. 2

Početne vrijednosti mogu se interpretirati kao stanje pri prvom kontaktu (ono što je na prvi pogled, prvi dojam). Neke druge početne vrijednosti vode u pravilu do druge trajektorije koja s prvom nema nikakvih zajedničkih točaka, a samo iznimno jedna trajektorija može biti unutar druge (to se dogadja kad drugu početnu točku biramo unutar prve trajektorije ili tako da druga trajektorija sadrži prvu početnu točku).
Parametri r, j utječu samo na ravnotežno stanje sustava, ali ne na **kvalitativno ponašanje**. To znači da bi, kad bi neki drugi par imao jednake parametre a, b, c, d kao ovaj, ali različitu ravnotežnu točku (r_1, j_1), onda bi se trajektorije za drugi sustav dobile tako da se trajektorije za prvi sustav translatiraju za vektor koji spaja točku (r, j) s točkom (r_1, j_1) (sl. 3). Trajektorije bi po svemu bile jednake, samo bi bile pomaknute.



Sl. 3

4 Ovisnost sustava (2) o parametrima a, b, c, d

Kako smo vidjeli, kvalitativno ponašanje sutava (2) ovisit će o parametrima a, b, c, d. Oni se mogu zapisati u obliku matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

koja se zove **matrica sustava**. Vidimo da se prvi redak matrice odnosi na dR/dt, dok se drugi odnosi na dJ/dt. Pokazuje se da se sve svodi na odnos izmedju dviju veličina povezanih s matricom A: **determinanta** od A, $\det A = ad - bc$ i **trag** od A, $\operatorname{tr} A = a + d$. To proizlazi iz analize **svojstvenih vrijednosti** (eigenvalues), tj. rješenja (karakteristične) jednadžbe

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \qquad (3)$$

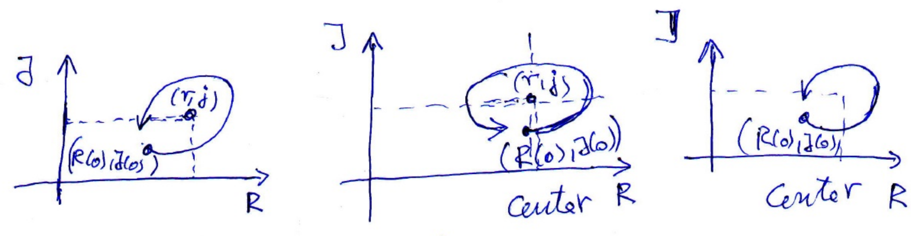
i **svojstvenih vektora** (eigenvectors) matrice. Tu analizu ovdje nećemo potanje provoditi, makar i nije previše složena (sve se može dobro potvrditi kompjutorskom simulacijom).
U ovim okolnostima determinanta je različita od nule: $ad - bc \neq 0$ jer to je preduvjet za postojanje jedinstvene fiksne točke sustava. To znači da može biti $ad-bc > 0$ ili $ad-bc < 0$. Ovaj prvi slučaj bogatiji je mogućnostima. Od ukupno osam kvalitativno različitih mogućnosti, za sedam je $ad - bc > 0$, a samo jedna za $ad - bc < 0$. To znači da će slučaj $ad - bc > 0$ moći modelirati više različitih scenarija koji nastaju u ovim okolnostima. Za lakše čitanje ovog dijela bilo bi dobro konzultirati lekciju **Stabilnost i Grobman-Hartmanov teorem**, naročito dio o klasifikaciji fiksnih točaka.

4.1 Slučaj kad je $ad - bc > 0$.

Ovaj slučaj ima više podslučajeva ovisno o tome je li $(a + d)^2 - 4(ad - bc)$ veće od nule, manje od nule ili jednako nuli. To odgovara tome ima li jednadžba (3) dva realna rješenja, kompleksno konjugirana rješenja ili je rješenja dvostruko. U svakom od tih podslučajeva bitno je je li $a + d$ veće od nule, manje od nule ili možda jednako nuli. Kratko ćemo komentirati svaku od tih mogućnosti, ilustrirati slikom (prikaz trajektorije ili možda više trajektorija) i napisati primjer matrice koja odgovara tom slučaju. Svaka od tih mogućnosti može se provjeriti istraživanjem pomoću Matlaba.
1. $(a + d)^2 - 4(ad - bc) < 0$.
1.a). $a+d = 0$ (to znači da se ovaj gornji uvjet svede na to da je $ad-bc > 0$, što ionako već imamo). Trajektorije su elipse sa središtem u fiksnoj točki (r, j). Dakle, u ovom je slučaju fiksna točka stabilna i to centar, ali nije asimptotski stabilna. Ako su Romeo i Julija izbačeni iz ravnoteže više se u nju neće vratiti, ali neće se previše od nje niti udaljiti, već će kružiti oko nje. Pravci na kojima su osi elipse mogu se eksplicitno zapisati, ali te formule nećemo navoditi (one se u svakom konkretnom slučaju mogu naslutiti kompjutorskom simulacijom). Osi su usporedne s osima R, J ako je $a = d = 0$, a ako je dodatno $c = -b$, onda su trajektorije kružnice (sl. 4).
Primjeri ovakvih matrica sustava:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Za prvu matricu trajektorije su nagnute elipse, za drugu elipse s osima usporednim s R, J osima, a za treću su kružnice sa središtem u fiksnoj točki (to je zato što 2 i -2 imaju jednake apsolutne vrijednosti). Radi jednostavnosti, stavljali smo cijele brojeve kao elemente matrice, makar bi u realnim



Sl. 4.

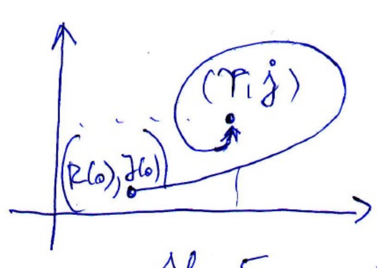
okolnostima to u pravilu trebali biti brojevi manji po apsolutnoj vijednosti od 1. Na primjer, ako bismo svaki element prve matrice podijelili s 10, dobili bismo $A = \begin{pmatrix} 0.1 & -0.2 \\ 0.5 & -0.1 \end{pmatrix}$. Sustav bi bio realniji, a pri tom se ne bi kvalitativno promijenio.

1.b) $a + d < 0$. Trajektorije su spirale koje se približavaju fiksnoj točki (sl. 5). To znači da je fiksna točka privlačna (ponor), **fokus**, posebno, ona je asimptotski stabilna. Ovdje bi odnos Romea i Julije uvijek završio u ravnoteži, bez obzira kakve su bile njihove medjusobne emocije na prvi pogled.

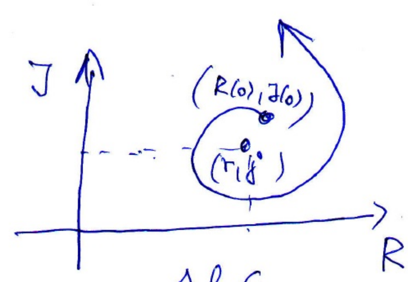
Primjer: $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

1.c) $a + d > 0$. Ovaj slučaj suprotan je slučaju 1.b): trajektorije su spirale koje odlaze od fiksne točke (sl. 6). To znači da je fiksna točka odbojna (izvor), fokus. U ovom slučaju, čim je Julijin i Romeov odnos čak i malo izvan ravnoteže, završit će turbulentno pri čemu će se izmjenjivati sve intenzivnije kako pozitivne tako i negativne emocije.

Primjer: $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

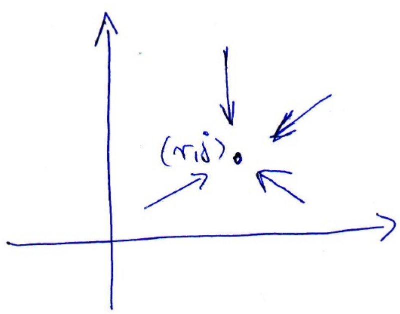


Sl. 5
(ponor, fokus)

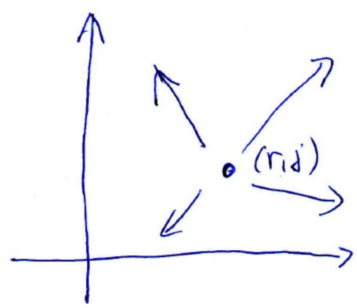


Sl. 6.
(izvor, fokus)

2. $(a+d)^2 - 4(ad - bc) = 0$.
Ovdje nema mogućnosti $a+d = 0$, jer bi to onda značilo da je $ad-bc = 0$, što smo izostavili. Zato ostaju samo dvije mogućnosti: $a+d < 0$ ili $a+d > 0$. U svakoj od ovih mogućnosti postoje dva bitno različita slučaja. Jednostavniji je kad je $b = c = 0$, a tada je nužno i $d = a = \lambda$. Trajektorije su zrake (polupravci) koji se približavaju fiksnoj točki uz uvjet $\lambda < 0$ (sl. 7(i)), odnosno udaljavaju se od nje ako je $\lambda > 0$ (sl. 7(ii)). U prvom slučaju fiksna točka je privlačna (ponor), posebno, ona je asimptotski stabilna. Kao i u 1.b) odnos Romea i Julije uvijek završi u ravnoteži, bez obzira kakve su bile njihove medjusobne emocije na prvi pogled. U drugom slučaju fiksna je točka odbojna (izvor). Zbog očitih razloga fiksna se točka u ovim slučajevima zove zvijezda (star).

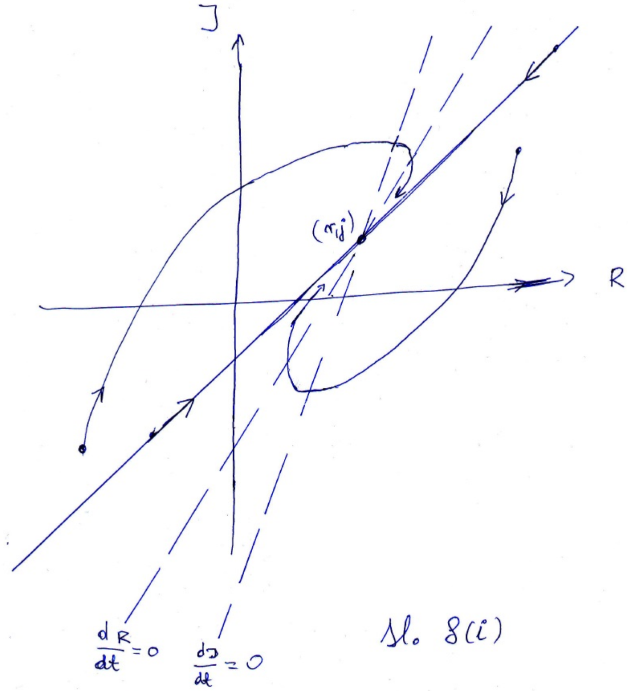


Sl. 7(i)
(ponor, zvijezda)

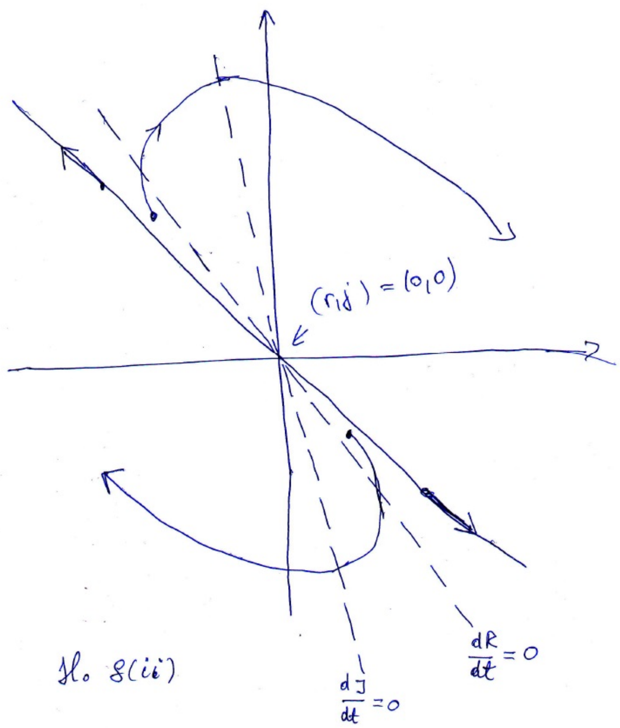


Sl. 7(ii)
(izvor, zvijezda)

U nastavku predpostavljamo da je $b \neq 0$ ili $c \neq 0$ (ili oboje od toga).
2.a) $a+d < 0$, i $b \neq 0$ ili $c \neq 0$. (sl. 8(i)). To znači da je fiksna točka privlačna (ponor), posebno, ona je asimptotski stabilna. I ovdje odnos Romea i Julije uvijek završi u ravnoteži. Postoji jedan pravac sa svojstvom da trajektorije koje na njemu počinju, na njemu i ostaju i približavaju se fiksnoj točki. Primjer: $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
2.b) $a+d > 0$, i $b \neq 0$ ili $c \neq 0$. (sl. 8(ii)). Ovaj slučaj suprotan je slučaju 2.a). Trajektorije su zrake (polupravci) koji odlaze od fiksne točke. To znači da je fiksna točka odbojna (izvor), posebno, ona je nestabilna. Postoji jedan pravac sa svojstvom da trajektorije koje na njemu počinju, na njemu i ostaju i udaljavaju se od fiksne točke. Primjer: $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

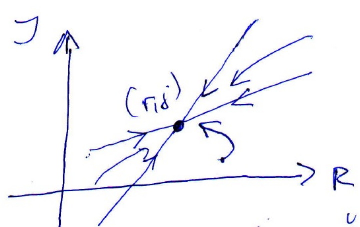


Sl. 8(i)

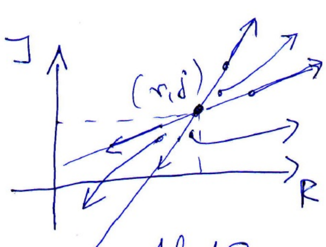


Sl. 8(ii)

3. $(a+d)^2 - 4(ad-bc) > 0$.
Ni u ovom slučaju nema mogućnosti $a+d=0$, jer bi to onda značilo da je $ad-bc<0$, a mi trenutno imamo pretpostavku $ad+bc>0$. Zato ostaju samo dvije mogućnosti: $a+d<0$ ili $a+d>0$.
3.a) $a+d<0$. Trajektorije su krivulje koje se približavaju fiksnoj točki (sl. 9.). Postoje dva pravca koji prolaze fiksnom točkom, takvi da svaka trajektorija koja počinje na nekom od tih pravaca, stalno ostaje na njima (i približava se fiksnoj točki). Ta dva pravca dijele ravninu na četiri dijela. Trajektorije koje počinju u nekom od tih dijelova, stalno ostaju u njima i približavaju se fiksnoj točki. To znači da je fiksna točka privlačna (ponor), **čvor**. Posebno, ona je asimptotski stabilna. Kao i u 1.b) i 2.a) odnos Romea i Julije uvijek završi u ravnoteži, bez obzira kakve su bile njihove medjusobne emocije na prvi pogled. Primjer: $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$
3.b) $a+d>0$. Ovaj slučaj suprotan je slučaju 3.a). Trajektorije su krivulje koje odlaze od fiksne točke (sl. 10). Slično kao u 3.a) postoje dva pravca koji prolaze fiksnom točkom, takvi da svaka trajektorija koja počinje na nekom od tih pravaca, stalno ostaje na njima (i udaljava se od fiksne točke). Opet trajektorije koje počinju u jednom od četiri dijela, u njima ostaju stalno, samo odlaze od fiksne točke. To znači da je fiksna točka odbojna (izvor), čvor. Posebno, ona je nestabilna. Primjer: $A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$



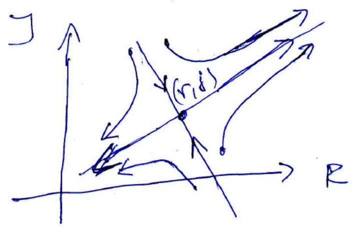
Sl. 9. (ponor, čvor)



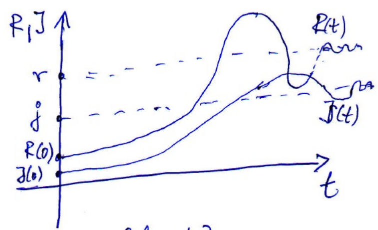
Sl. 10 (izvor, čvor)

4.2 Slučaj kad je $ad-bc<0$.

U ovom slučaju postoji kvalitativno samo jedan scenarij. Fiksna točka je **sedlo**. Postoje dva pravca koji prolaze fiksnom točkom, takvi da svaka trajektorija koja počinje na jednom od njih, stalno ostaje na njemu i približava se fiksnoj točki (privlačni pravac), a ako počinje na drugomu, takodjer ostaje na njemu, ali odlazi od fiksne točke (odbojni pravac). Sve ostale trajektorije odlaze od fiksne točke, koja je nestabilna (sl. 11). Pritom imaju dva sljedeća svojstva: ostaju u dijelu ravnine u kojem počinju, i sve se više približavaju odbojnom pravcu. Primjer: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$



Sl. 11 (sedlo)



Sl. 12

5 Napomene.

1. U slučajevima 3.a), 3.b) (kod kojih je $ad - bc > 0$) i u $ad - bc < 0$ karakteristična jednadžba (3) ima dva realna različita rješenja λ_1, λ_2. U prvom slučaju oba su rješenja negativna, u drugom oba pozitivna, a u trećem jedno pozitivno, jedno negativno. U sva ta tri slučaja postoje ona dva karakteristična pravca koji prolaze fiksnom točkom (trajektorije koje na njima počinju, na njima i ostaju). Jedan od tih pravaca pripada rješenju λ_1, a drugi λ_2. Ovaj prvi ima koeficijent smjera $\frac{\lambda_1 - a}{b}$, odnosno $\frac{c}{\lambda_1 - d}$ (ako jedna od formula daje neodredjeni izraz, proba se s drugom). Slično je za drugi pravac. Na primjer, u slučaju 3.a) gdje je $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$, vrijedi $a+d = -5$, $ad - bc = 4$ pa je karakteristična jednadžba $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$. Rješenja su $\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = -1$. Vidimo da je $\frac{\lambda_1 - a}{b} = 1$ i $\frac{\lambda_2 - a}{b} = 2/5$. Jedan pravac ima kut $45°$ s pozitivnim dijelom R-osi, a drugi oko $21.8°$ (pogledajte sliku 9.). Isto bi se dobilo formulom $\frac{c}{\lambda - d}$.

2. U slučajevima 2.a), 2.b) karakteristična jednadžba (3) ima jedno realno (dvostruko) rješenje λ. U prvom slučaju je $\lambda < 0$ a u drugomu $\lambda > 0$. U oba slučaja postoji **samo jedan** karakteristični pravac koji prolazi fiksnom točkom (trajektorije koje na njemu počinju, na njemu i ostaju). Taj pravac ima koeficijent smjera $\frac{\lambda - a}{b}$ (ako je $b \neq 0$), odnosno $\frac{c}{\lambda - d}$ (ako je $d \neq 0$). Na primjer, u slučaju 3.a) gdje je $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, vrijedi $a + d = -4$,
$ad - bc = 4$ pa je karakteristična jednadžba $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$. Rješenje je

$\lambda = -2$. Vidimo da je $\frac{\lambda - a}{b} = 1$ i ujedno $\frac{c}{\lambda - d} = 1$. Pravac ima kut $45°$ s pozitivnim dijelom R-osi (pogledajte sliku 8(i).).

3. U slučajevima 1.b), 2.a) i 3.a) fiksne točke su privlačne i vrijedi $a+d < 0$. Slično, u 1.c), 2.b) i 3.b) fiksne točke su odbojne i vrijedi $a + d > 0$. To što $a + d < 0$ vodi privlačnoj, a $a + d > 0$ odbojnoj fiksnoj točki, može se intuitivno prihvatiti. Vidjeli smo da $a < 0$ znači da Romeo teži prema svojoj ravnotežnoj vrijednosti r (ako je Julija u svojoj ravnotežnoj vrijednosti j), a bježi od nje ako je $a > 0$. Slična je interpretacija koeficijenta d, samo što se on tiče Julije. Uvjet $a + d < 0$ može nastupiti ako su obje vrijednosti negativne. Tada i Romeo i Julija teže prema ravnoteži pa nije čudno da će do nje i doći. Ako, pak, jedno od njih stremi ravnoteži, a drugo ne, onda $a + d < 0$ znači da je prevladala težnja prema ravnoteži. Slično, $a + d > 0$ znači da je prevladala odbojna sila. Izmedju tih dviju mogućnosti je $a + d = 0$, kad se te dvije težnje poništavaju pa fiksna točka nije ni privlačna ni odbojna već centar (kruženje). Ta intuicija funkcionira za $ad - bc > 0$, dok za $ad - bc < 0$ fiksna točka nije ni privlačna ni odbojna (već sedlo) bez obzira kakav je predznak od $a + d$.

4. Ove razne mogućnosti ilustrirali smo pomoću trajektorija (gdje se vrijeme izravno ne pojavljuje). Svaka takva ilustracija ima svoju analognu u kojoj se pojavljuje i vrijeme. Tako slika 12. odgovara slici 5. iz slučaja 1.b) gdje je fiksna točka privlačni fokus (trajektorija se spiralno približava fiksnoj točki obilazeći oko nje). To se u vremenskom prikazu očituje time da nakon nekog vremena $R(t)$ vibrira sa sve manjim amplitudama malo iznad, malo ispod r. Slično vrijedi za $J(t)$ i j.