Uvod u matematičke metode u inženjerstvu

Eksponencijalni i logistički model

Već smo govorili o problemu matematičkog opisa ponašanja neke veličine x u vremenu t. Konačan cilj jest odredjivanje veze medju tim dvjema veličinama, tj. formule $x = f(t)$. Općenito, ne možemo očekivati pronalaženje egzaktne formule, tj. stvarne funkcije f, već samo dovoljno prihvatljive formule (**matematičkog modela** za opis veličine x). To znači da načelno ima više matematičkih modela za istu pojavu. Naravno da svi oni nisu jednako prihvatljivi. Zato se pri matematičkom modeliranju izdvajaju sljedeći koraci.
1. korak. Formuliranje modela.
2. korak. Analiziranje modela.
3. korak. Matematičko rješavanje modela.
4. korak. Razumijevanje modela i usporedjivanje s eksperimentalnim podatcima.
5. korak. Prihvaćanje, odbacivanje ili korigiranje modela.

Eksponencijalni model.
U ovom kolegiju bavit ćemo se matematičkim modelima koji se formuliraju na osnovi uvida o **brzini** promjene razmatranih veličina u vremenu. Drugim riječima, razmatrat ćemo modele kojima će formulacija biti u obliku diferencijalne jednadžbe 1. reda (ili sustava takvih jednadžba). Najprije ćemo razmotriti **jednodimenzionalni problem**, tj. problem promjene jedne veličine u vremenu. Najjednostavniji takav primjer jest problem rasta (ili raspada).
Formuliranje
Kako smo vidjeli, u idealnim uvjetima matematički se model zasniva na diferencijalnoj jednadžbi

$$x' = kx. \tag{1}$$

Tu je x veličina koja raste (ili se raspada - nestaje), t je vrijeme (tu je skriveno, ali je sadržano u izrazu x', naime $x' := \frac{dx}{dt}$), a parametar k je konstanta ovisna o tomu koju od srodnih veličina x razmatramo (na primjer, o kojoj je radioaktivnoj materiji riječ). Model se izvodi iz intuitivno prihvatljive činjenice da je za svaki trenutak t, količina materije nastale (odnosno nestale) u vremenskom intervalu $[t, t + \Delta t]$ približno proporcionalna količini materije

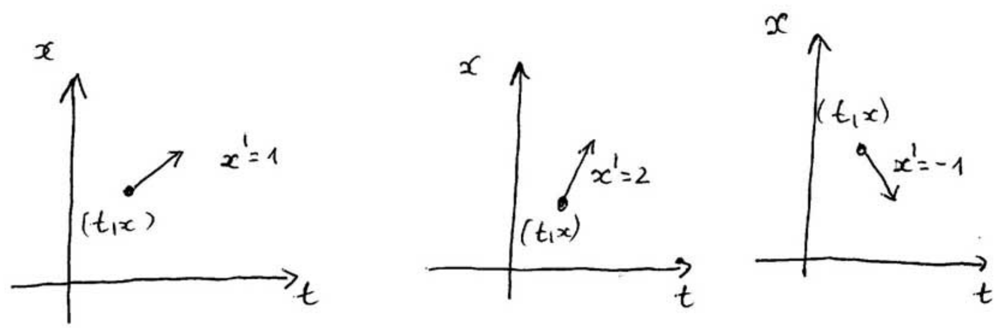
$x(t)$ i duljini vremenskog intervala Δt, tj.

$$\Delta x(t) \approx kx(t)\Delta t$$

odakle se dijeljenjem s Δt i prelaskom na limes dobiva (1). Napomenimo da do iste jednadžbe dolazimo i kad razmatramo neku populaciju koja stalno podliježe i razmnožavanju i umiranju; tu je brzina razmnožavanja zadana s bx uz pozitivnu konstantu b, a umiranja s ax, dok je brzina promjene populacije

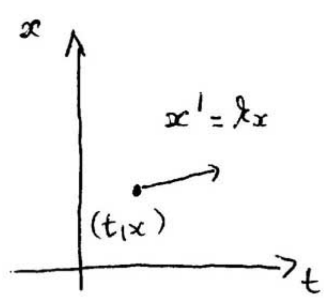
$$x' = bx - ax = (b - a)x = kx.$$

Analiziranje. Jednostavna analiza modela dolazi od fizikalne interpretacije prve derivacije kao brzine. Načelno ovaj model ima smisla i za veličine koje mogu biti i negativne, ali najvažniji je slučaj kad je x pozitivna veličina, pa je interpretiramo kao populaciju. Ako je tako, onda
za $k > 0$ populacija se u svakom trenutku povećava (naime iz $kx > 0$ slijedi $x' > 0$ pa je brzina pozitivna),
dok za $k < 0$ imamo stalno smanjivanje populacije.
Naravno za $k = 0$ nema nikakve promjene (populacija je konstantna).
Iako se diferencijalna jednadžba (1) lako može egzaktno riješiti (što općenito nije slučaj), mnoge karakteristike rješenja mogu se naslutiti uz pomoć grafičke interpretacije prve derivacije kao tangente. Za to se poslužimo koordinatnim sustavom u kojemu je t horizontalna, a x vertikalna os. Tada:
Svaku točku (t, x) ravnine možemo interpretirati kao moguće stanje populacije tj. prva koordinata t označava vrijeme, a druga x količinu populacije u vrijeme t.
Broj kx onda označava brzinu x' kojom bi se ta populacija mijenjela u trenutku t. Taj broj geometrijski možemo predočiti strjelicom koja počinje u točki (t, x), a ima nagib kx. Na primjer:
ako je $kx = 1$ pripadna strjelica zatvara s pozitivnim horizontalnim usmjerenjem kut od $45°$,
ako je $kx = 2$ pripadna strjelica zatvara s pozitivnim horizontalnim usmjerenjem kut od približno $63°$,
ako je $kx = -1$ pripadna strjelica zatvara s pozitivnim horizontalnim usmjerenjem kut od $-45°$, tj. kut od $45°$ gledajući u smjeru kazaljke sata.



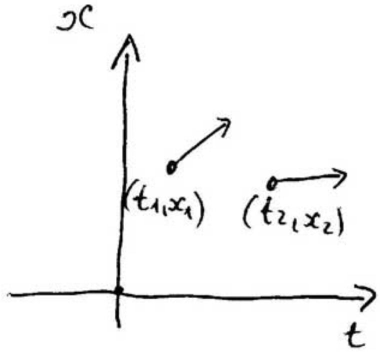
Sl. 1.

Općenito, strjelice se rade tako da iz (t, x) najprije idemo za jedinicu horizontalno u pozitivnom usmjerenju t-osi, potom vertikalno za kx jedinica.



Sl. 2.

Sad bi duljina strjelice bila to veća što je veća apsolutna vrijednost brzine promjene od x u odnosu na t. Radi jasnoće sve strjelice svodimo na jednaku duljinu, a veličinu brzine promjene predočava nagib te strjelice prema horizontali (pozitivnom usmjerenju t-osi). Što je taj nagib veći, veća je i brzina (za negativne nagibe je riječ o apsolutnoj vrijednosti brzine). Ako to napravimo za puno točaka ravnine, dobit ćemo tzv. **skup usmjerenja** iz kojega dobivamo dojam o ponašanju veličine x u vremenu t.



Sl. 3

Ovim postupkom možemo dobro dočarati rješenje opće jednadžbe tipa

$$x' = f(x, t)$$

koja se, općenito, ne može eksplicitno riješiti.

Rješavanje. kako smo rekli, ovaj je model lako egzaktno razriješiti. Napišimo jednadžbu u obliku $\frac{dx}{x} = k$, odakle integriranjem dobijemo $\ln x = \ln C + kt$, a odavde

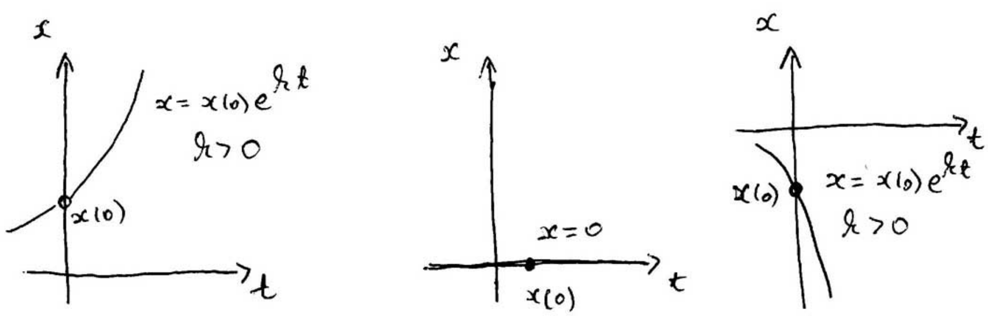
$$x = Ce^{kt} \tag{2}$$

To je razlog zašto ovaj model zovemo eksponencijalnim. Napomenimo da bismo isto rješenje dobili da smo razmatrali i veličinu x koja prima negativne vrijednosti. Jednadžba (2) daleko je pogodnija za analiziranje modela. Najprije vidimo da je $C = x(0)$, gdje je $x(0)$ vrijednost veličine x u trenutku $t = 0$ (početna vrijednost), pa se rješenje može zapisati i kao

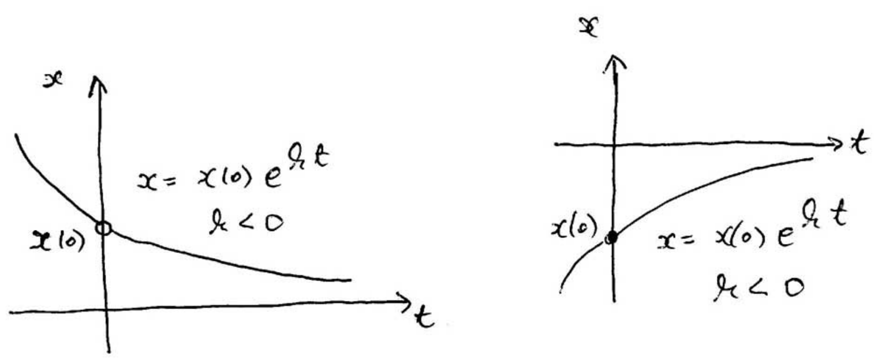
$$x(t) = x(0)e^{kt} \tag{3}$$

Odavde vidimo: ako je $x(0) > 0$ onda je $x(t) > 0$ za sve t,
ako je $x(0) < 0$ onda je $x(t) < 0$ za sve t,
ako je $x(0) = 0$ onda je $x(t) = 0$ za sve t.
Nadalje, za $k > 0$ imamo ubrzani rast od 0 prema $+\infty$ (ako je $x(0) > 0$), odnosno
ubrzani pad od 0 prema $-\infty$ (ako je $x(0) < 0$),
dok je za $k < 0$, usporeni pad od $+\infty$ prema 0 ako je $x(0) > 0$, odnosno

usporeni rast od $-\infty$ prema 0 ako je $x(0) < 0$.
Naravno, ovo gore smo analizirali za vrijeme t izmedju $-\infty$ i $+\infty$. Ako gledamo od $t = 0$ prema $t = +\infty$, onda se x mijenja od $x(0)$ prema rečenim vrijednostima.
I za $k > 0$ i za $k < 0$ uočavamo da $x = 0$ ima posebnu ulogu.



Sl. 4.



Sl. 5.

Razumijevanje modela i usporedjivanje s eksperimentalnim podatcima. Ponašanje funkcije $x(t)$ iz (3) interpretiramo kao zamišljeno ponašanje veličine x u vremenu. Ukoliko možemo vjerovati modelu, on nam može poslužiti za predvidjanje ponašanja veličine x u vremenu.
U stvarnosti u pravilu dolazi do razilaženja izmedju vrijednosti dobivene

modelom i vrijednosti dobivene mjerenjem (eksperimentom, opažanjem). Dakle, za svaku konkretnu vrijednost vremena t, model nam daje teoretsku vrijednost $x(t)$, a eksperiment vrijednost $x(t)_{exp}$. Kao mjeru razlikovanja teoretskih i eksperimentalnih podataka služi apsolutna vrijednost razlike $|x(t)_{exp} - x(t)|$ ili kvadrat razlike $(x(t)_{exp} - x(t))^2$.

Prihvaćanje, odbacivanje ili korigiranje modela.

Kao globalna mjera bliskosti eksperimentalnih i teoretskih podataka služi zbroj kvadrata odstupanja

$$\sum_{i=1}^{n}(x(t_i)_{exp} - x(t_i))^2$$

dobivenih mjerenjem iz pogodno odabranih n trenutaka $t_1, t_2, ..., t_n$. To je tzv. funkcija cilja i želimo da njena vrijednost bude što manja. Naravno, tu se postavlja pitanje što to znači da je ta vrijednost dovoljno mala (pa da model možemo prihvatiti).

Jedna od standardnih metoda za korigiranje modela jest **metoda najmanjih kvadrata**. Ona se zasniva na tome da parametre u modelu izaberemo tako da zbroj kvadrata odstupanja bude minimalan (prilagodba parametara modelu). Na primjer, u rješenju (3) imamo jedan parametar k. Njega obično dobivamo eksperimentalno i on ima fizikalno značenje. Ako ga shvatimo varijablom u funkciji cilja, onda možemo odabrati njegovu vrijednost za koji je funkcija cilja minimalna. Taj se rezultat onda uvrsti u (3) umjesto onog prije.

Općenitija je mogućnost da i broj $x(0)$, koji ima evidentno fizikalno značenje prilagodimo modelu. To znači da ćemo gledati dvoparametarsku familiju funkcija

$$be^{at}$$

a da ćemo parametre a, b odrediti tako da funkcija cilja bude minimalna. Napomenimo da ovaj postupak bitno ovisi o eksperimentalnim mjerenjima u $t_1, t_2, ..., t_n$, posebno on ovisi o broju mjerenja, o izabranim trenutcima u kojima ćemo mjeriti, o metodi mjerenja itd. Uočite da prilagodjeni parametri više ne moraju nužno zadržati početna fizikalna značenja, Na primjer, dobiveni parametar b ne mora više imati značenje početne vrijednosti veličine x (odnosno, može od nje ozbiljnije odstupati).

Jedna od metoda korigiranja modela jest da se parametri modela zamijene funkcijama. Na primjer, u (3) konstantu k možemo zamijeniti pogodnom funkcijom $k(t)$.

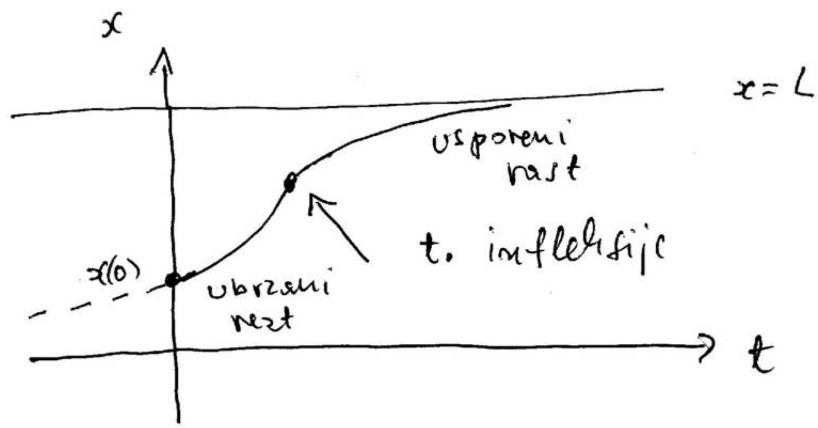
Logistički model.
U gore spomenutim korigiranjima prilagodjavali smo parametre modela. Medjutim možemo izvršiti i ozbiljnije izmjene. To ćemo pokazati na primjeru **logističkog modela**. Opisani eksponencijalni model bio je pogodan kad u sustavu nije bilo nikakvog ograničenja (bio bomba). Predpostavimo da razmatramo kretanje populacije u zatvorenoj sredini u kojoj postoji limit L preko kojega populacija ne može prijeći. Tada će eksponencijalni model biti prihvatljiv samo za male vrijednosti x (koje su daleko od L), dok će za one bliže L biti sve gori. Naime, intuitivno osjećamo da će populacija na početku ubrzano rasti (ako starta od neke male vrijednosti), a u jednom trenutku prijeći u usporeni rast i polako se približavati limitu L. Za opis takvog nečega nikako nije dovoljan eksponencijalni model (kod njega je stalno ubrzani rast prema $+\infty$).
Prirodno je da zadovoljavajuće rješenje pokušamo dobiti razumnom korekcijom diferencijalne jednadžbe (1), a ne da tragamo za potpuno drukčijim modelom. Budući da sad brzine $x'(t)$ moraju biti manje i to sve manje što je x veće, dobro je u (1) desnu stranu množiti promjenjivim faktorom manjim od 1, koji će biti to manji što je x veći, a za $x = L$ bit će jednak 0. Takav je faktor na primjer $1 - \frac{x}{L}$ (drugim riječima, konstantu k iz (1) zamijenimo linearnom funkcijom $k(1 - \frac{x}{L})$). Dolazimo do **logističke jednadžbe**

$$x' = kx(1 - \frac{x}{L}) \tag{4}$$

Odmah uočavamo da se pojavljuju dvije vrijednosti od x za koje je brzina $x' = 0$, to su **fiksne** ili **stacionarne točke** $x = 0$ i $x = L$. Prirodno je da je $x(0)$ izmedju 0 i L, ali jednadžbu možemo teoretski razmatrati i za ostale početne vrijednosti od x. Glavna teoretska razlika medju jednadžbama (1) i (4) jest ta da je (1) **linearna**, a (4) **nelinearna** (nazivi dolaze od toga što je u (1) na desnoj strani izraz linearan u varijabli x, a u (4) nije). Za razliku od linearnih koje uvijek imaju egzaktno rješenje, nelinearne se jednadžbe često mogu samo numerički riješiti. Ovdje nije tako. Separacijom varijabla dobije se
$\frac{dx}{x(L-x)} = \frac{k}{L}dt$, a odavde integriranjem $\ln \frac{x}{L-x} = lnC + \frac{k}{L}t$, za neku pozitivnu konstantu C. Sad se lako se pokaže da je rješenje

$$x(t) = \frac{LCe^{kt}}{1 + Ce^{kt}} \tag{5}$$

gdje je C konstanta koja ima značenje $C = \frac{x(0)}{L - x(0)}$.
Vidimo da se za $L > 0$ i $0 < x(0) < L$, sve vrijednosti od $x(t)$ za $t \geq 0$ nalaze izmedju $x(0)$ i L. Naravno, rješenje možemo interpretirati za sve x i sve vrijednosti parametara.



SL 6. Graf Logističke funkcije u I kvadrantu ako je $0 < x(0) < L$

Daljnja korekcija. Iseljavanje i useljavanje. Logistička jednadžba nije primjerena ako je u zadanoj populaciji prisutno useljavanje ili iseljavanje. Zato je potrebna daljnja korekcija modela. Predpostavimo najprije da je iseljavanje linearno, tj. uz stalnu brzinu h. Tada je pripadajuća korigirana logistička jednadžba

$$x' = kx(1 - \frac{x}{L}) - h \tag{6}$$

Tu je $h > 0$ za iseljavanje, $h < 0$ za useljavanje, a za $h = 0$ dobijemo običnu logističku jednadžbu.