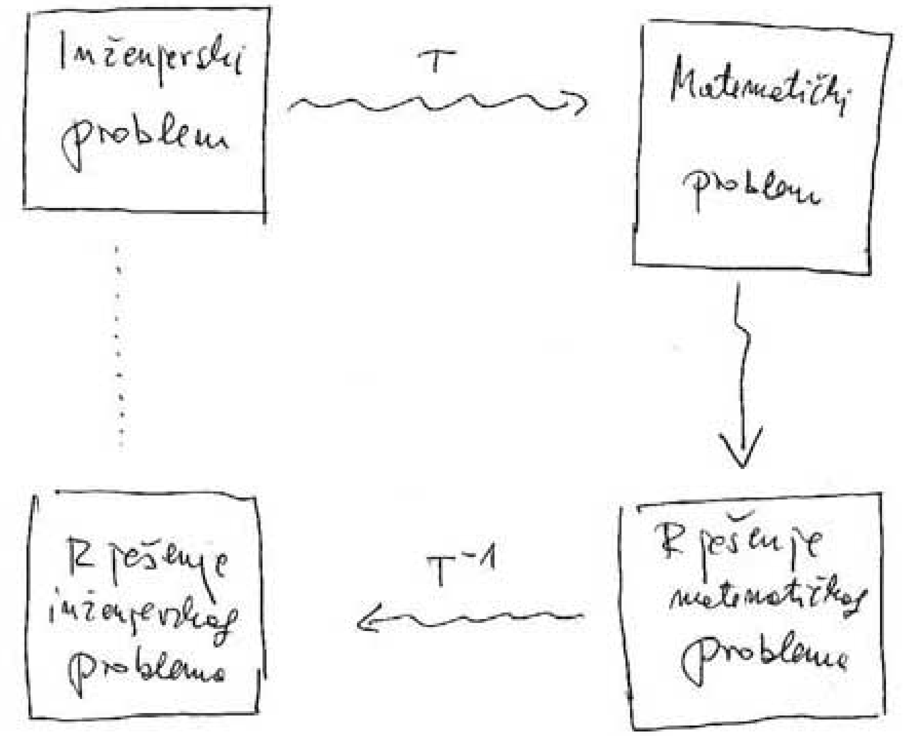
Naglasci za izborni kolegij: Matematičke metode u kemijskom inženjerstvu

Napomena. U dokumentu je ugrubo skiciran sadržaj i značenje kolegija. Svrha skice je olakšavanje praćenja izlaganja u Kreyszigu (Advanced engineering mathematics, Chapters 4,8 and 9.) te izrade radnje.

Primjena matematike u inženjerstvu grubo se može skicirati sljedećom shemom (sl.1.):



sl.1.

Tipičan primjer primjene jesu diferencijalne jednadžbe (obične i parcijalne). Započinje se formulacijom inženjerskog problema. U drugom se koraku postavlja diferencijalna jednadžba (na osnovi eksperimenta ili razumnih teoretskih pretpostavaka). U trećem koraku ta se jednadžba rješava, a u četvrtom se se to rješenje tumači i usporedjuje s eksperimentalnim podatcima. Rješavanje diferencijalnih jednadžba može biti egzaktno ili približno (numeričke metode).

Ovu ćemo shemu ilustrirati na problemu radioaktivnog raspada.

1. korak - formulacija inženjerskog problema.
Treba opisati kako se, tijekom vremena, raspada radioaktivna materija.
2. korak - formulacija matematičkog problema.
Uvedimo oznake:
t vrijeme
$y(t)$ količina radioaktivne materije (na primjer $(C-14)$), u trenutku t
$y_0 := y(0)$ količina radioaktivne materije u početku (za $t=0$).
Problem opisa radioaktivnog raspada prelazi u matematički problem odredjivanja $y(t)$ u ovisnosti o t.
Ovo je bilo grubo, načelno postavljanje matematičkog problema. Sad ga treba konkretizirati i pri tom nastaju dodatne poteškoće. Da pojednostavnimo problem, ograničit ćemo se na raspad u izoliranim uvjetima. S problemom se upoznajemo pokusom; glavna je poteškoća dovoljno pouzdanih mjerenja (na primjer, teški elementi poput $C-14$ raspadaju se vrlo sporo pa je teško doći do podataka u širokoj vremenskoj skali). Zato treba naći metodu koja će iz **lokalnih** rezultata dati **globalne**.
Intuitivno je jasno da je $y(t)$ neka padajuća funkcija. Uočavamo dva podkoraka:
(i) - Eksperimentalno odredjivanje diferencijalne jednadžbe raspada.
Intuitivno je jasno, a potvrdjuje se pokusom, da je količina raspadnute materije, izmedju dvaju relativno bliskih mjerenja u vremenima t i $t+\Delta t$, približno proporcionalna proteklom vremenu Δt i količini $y(t)$ materije u vremenu t. Dakle, postoji pozitivna konstanta k (ovisna samo o vrsti radioaktivne materije, a ne i o vremenu), koju približno odredjujemo eksperimentom, tako da bude:

$$\Delta y \approx -ky(t)\Delta t$$

Naime, količina raspadnute materije je

$$y(t) - y(t+\Delta t) = -\Delta y$$

(predznak minus je jer se količina smanjuje). Sve se može zapisati i kao:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx -ky$$

(ii) - postavljanje diferencijalna jednadžba raspada
Iz gornje približne jednadžbe naslućujemo diferencijalnu jednadžbu raspada (skupa s početnim uvjetom):

$$\frac{dy}{dt} = -ky;\ y(0) = y_0$$

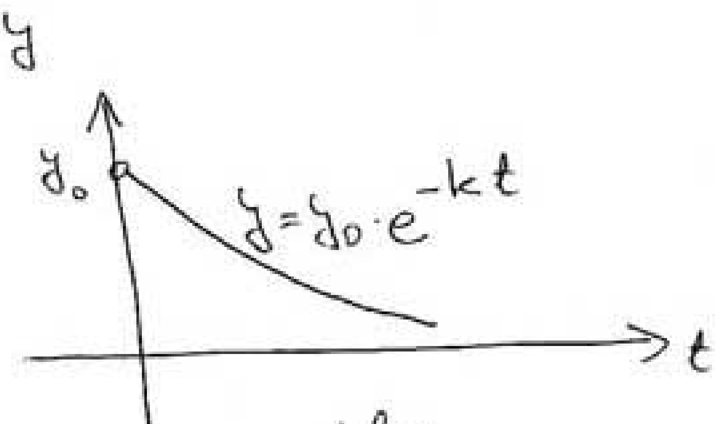
3. korak - rješavanje matematičkog problema, tj. diferencijalne jednadžbe.
$\frac{dy}{y} = -kdt$, pa je $\int \frac{dy}{y} = \int(-kdt)$, tj.
$\ln y = -kt + \ln C$ (tu smo iskoristili da je $y(t) > 0$ za sve t i konstantu smo, napisali kao $\ln C$). Sad je:
$y = e^{\ln C - kt} = e^{\ln C}e^{-kt} = Ce^{-kt}$, a iz uvjeta $y(0) = y_0$, dobijemo $C = y_0$. Konačno, imamo:

$$y = y_0 e^{-kt}$$

što možemo zapisati i kao:

$$y(t) = y(0)e^{-kt}$$

Da bismo raspad opisali do kraja potrebno je znati koeficijent k. Na primjer, za $(C-14)$ je $k = 1.244 \cdot 10^{-4}$ (približno, uz uvjet da se vrijeme mjeri u godinama) (sl.2.).



sl.2.

4. korak - rješenje inženjerskog problema
U ovom je slučaju jasno kako treba tumačiti teoretsko rješenje. Ipak, to teoretsko rješenje treba usporediti s eksperimentalnim podatcima. Ako postoji ozbiljnije odstupanje teoretskih podataka od eksperimentalnih, rješenje treba odbaciti ili korigirati. Postoje matematičke metode za ovaj postupak. Na primjer, **metodom najmanjih kvadrata** koeficijent k možemo **optimizirati** tako da odstupanja, u prosjeku, budu minimalna.

Fourierovi redovi.

Pri matematičkom rješavanju inženjerskih problema često se koristi razvoj funkcija u Fourierov red. Navest ćemo glavne ideje.

1. **Pojam vektorskog prostora, baze i skalarnog produkta**.
Ideja vektora u prostoru, koji čine trodimenzionalni vektorski prostor (naime svaki se vektor jednoznačno predočuje pomoću jediničnih vektora **i,j,k** - koji čine **bazu**), jedna je od najvažnijih matematičkih ideja i jedna od najplodonosnijih u primjenama. Ona se prenosi i u općenitije okolnosti. Tu je važno istaknuti temeljno svojstvo vektora:
oni se mogu zbrajati i množiti sa skalarom (brojem) - te operacije imaju poznata svojstva, donekle poput svojstava operacija s brojevima.

Primjeri:

(i) polinomi čine beskonačno dimenzionalan vektorski prostor s bazom $1, x, x^2, ...$ (svaki se polinom jednoznačno zapisuje pomoću potencija, tj. kao linearna kombinacija potencija, primjerice $f(x) := x^3 - 2x + 5$ znači: $5 \cdot 1 + (-2)x + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3$).
(ii) sve funkcije (na cijelom skupu realnih brojeva ili na nekom intervalu) takodjer čine beskonačno dimenzionalan vektorski prostor (naime one se mogu zbrajati i množiti sa skalarom), samo što je tu teže naći bazu.

Inače, nije teško prihvatiti funkcije kao vektore. Naime, ideja vektora i jest u tome da nosi više informacija (a ne jednu, poput broja - skalara), a funkcija nosi beskonačno mnogo informacija.
(iii) Mnoge važne funkcije mogu se razviti u Taylorov red oko neke točke. Na primjer, razvoj oko nule može se shvatiti kao rastav po potencijama koje čine bazu (na neki način):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ...$$

Naravno, postoje analogni rastavi oko bilo kojeg broja x_0, tj. po potencijama od $(x - x_0)$:

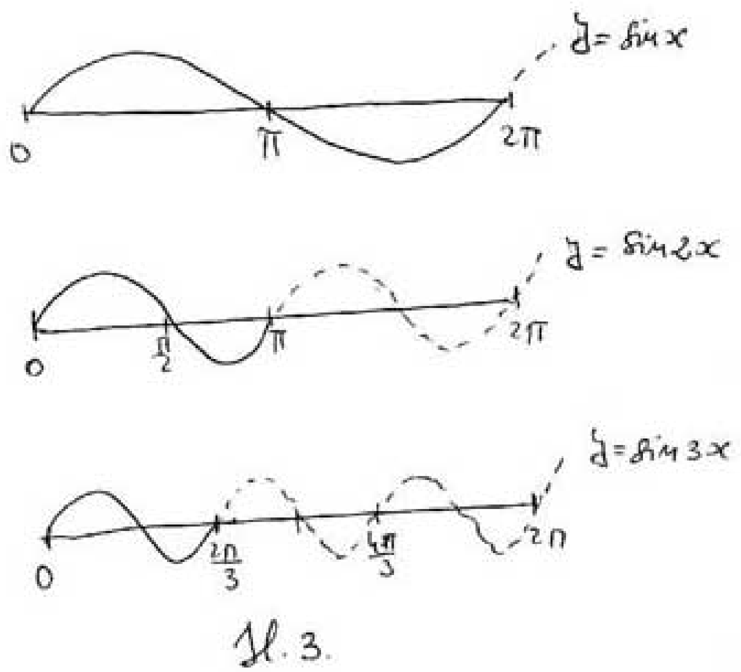
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}x + \frac{f''(x_0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}x^3 + ...$$

2. Temeljne periodne funkcije.

Umjesto redova potencija, tj. rastava po potencijama, postoje razvoji po nekim drugim funkcijama. Za **periodne funkcije** najvažniji je rastav po trigonometrijskim funkcijama

$$\sin(nx), \cos(nx)$$

za $n = 1, 2, 3, ...$ Ideja je da se nadje pogodan **matematički aparat** za opisivanje **periodnih pojava**, poput **titranja, za simuliranje glazbe i sl.**.
Trigonometrijske funkcije
$\sin(x), \cos(x)$ imaju period 2π
funkcije $\sin(2x), \cos(2x)$ imaju period π ,
funkcije $\sin(3x), \cos(3x)$ imaju period $\frac{2\pi}{3}$ (sl. 3),
funkcije $\sin(nx), \cos(nx)$ imaju period $\frac{2\pi}{n}$.



Sl. 3.

Vidimo da je period manji što je n veći, pa se time opisuju sve finija jednostavna titranja.
Kako je složeno titranje sastavljeno od jednostavnih (s različitim frekvencijama i amplitudama), nadamo se da ćemo ga moći opisati kao linearnu kombinaciju ovakvih funkcija. Tim se problemom bavi **Fourierova analiza**.

3. "Duljina" funkcije, "okomite" funkcije.
Za rješenje problema rastava periodnih funkcija pomoću temeljnih, generaliziramo pojam duljine vektora i skalarnog produkta vektora u prostoru. Oni se zasnivaju na relacijama:
(i) $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$ (jedinični vektori imaju duljinu 1)
(ii) $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$;
$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$
odakle se onda dobiju formule:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

za duljinu vektora $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ i

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

za skalarni produkt vektora $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.
Osim što se pomoću skalarnog produkta dobije kut medju vektorima, prema formuli

$$\cos\phi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|},$$

važno je to da se pomoću njega dobije prikaz vektora pomoću $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.
Naime, ako je $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, onda je $\mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = a_1,\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = a_2,\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = a_3$
U Fourierovoj se analizi pokazuje da nešto slično tome vrijedi i za periodne funkcije. To ćemo sad ugrubo skicirati.

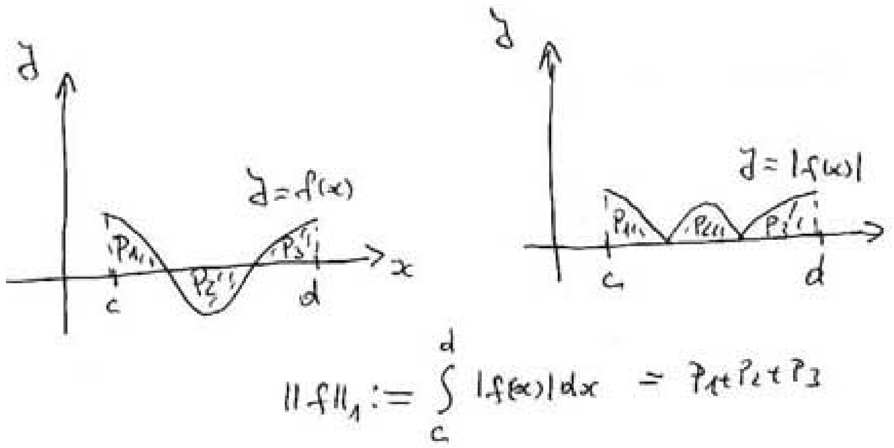
Za vektorski prostor funkcija zadanih na nekom intervalu $[c, d]$ možemo definirati skalarni produkt $< f, g >$ funkcija f, g:

$$< f, g > := \int_c^d f(x)g(x)dx$$

(mogli smo pisati i $f \cdot g$, ali je $< f, g >$ uobičajenije).
Takodjer definiramo **duljinu funkcije** (koja se službeno zove **norma** - oznaka $|| f ||$):

$$|| f || := \sqrt{< f, f >} = \sqrt{\int_c^d f^2(x)dx}$$

Duljina funkcije bi se mogla definirati i kao $|| f ||_1 := \int_c^d |f(x)|dx$ (to je tzv. "jedan norma"), što se geometrijski interpretira kao površina (sl.4.), medjutim, pokazuje se da je, za mnoge probleme pogodnija ona spomenuta - tzv. "dva norma").
Sad, uvjetno, možemo govoriti o "kutu medju funkcijama", posebice, funkcije su "okomite" ako je njihov skalarni produkt jednak 0.



Sl. 4.

Funkcije $\sin(x)$ i $\cos(x)$ dovoljno je gledati na intervalu $[-\pi, \pi]$ jer imaju period 2π (kolika je i duljina tog intervala). I ostale funkcije $\sin(nx), \cos(nx)$ mogu se gledati na tom intervalu. Najvažnije njihovo svojstvo jest to da su one, skupa s konstantnom funkcijom 1, medjusobno okomite (ortogonalne), tj.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = 0, \text{ za } m \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = 0, \text{ za } m \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin(mx)dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos(mx)dx = 0$$

Zato se, poput onoga kako se svaki vektor u prostoru može predočiti pomoću $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, tako se svaka dovoljno razumna periodna funkcija f perioda 2π, može predočiti pomoću gornjih funkcija, tj.,
ako je $f(x+2\pi) = f(x)$ za sve x, onda postoje realni brojevi $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ...$ tako da bude

$$f(x) = a_0 + [a_1\cos(x) + b_1\sin(x)] + [a_2\cos(2x) + b_2\sin(2x)] + [a_3\cos(3x) + b_3\sin(3x)] + ...$$

To proizlazi iz svojstava integrala redova funkcija, a sam se rezultat može vrlo strogo matematički definirati i dokazati. Takodjer, analogno onome kako je kod vektora u prostoru bilo $a_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}$, tako će i ovdje biti

$$a_n = \frac{1}{\pi} < f(x), \cos(nx) > = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx)dx$$

Koeficijent dolazi zato što su naše temeljne funkcije duljine $\frac{1}{\pi}$, a ne jedinične. To vrijedi za sve te funkcije osim konstante 1, koja je duljine 2π, pa je, iznimno:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} < f(x), 1 >= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Slično se dobije

$$b_n = \frac{1}{\pi} < f(x), \sin(nx) >= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx$$

Time je riješen problem rastava (razumne) periodne funkcije u trigonometrijski (Fourierov) red. Naravno da se u praksi koristimo nekim konačnim odsječkom tog reda.
Takodjer, analogne formule vrijede za funkcije periodne na $[-T, T]$, za bilo koji T. Napomenimo da su formule za parne, odnosno neparne funkcije bitno jednostavnije (kod parnih se pojavljuju samo kosinusi, a kod neparnih samo sinusi). Konačno, analogni rastavi postoje za svaki skup ortogonalnih funkcija, a ne samo trigonometrijskih, i mnogi od njih imaju važnu primjenu (sve se to može vidjeti u Kreyszigu, poglavlje 8.).

Parcijalne diferencijalne jednadžbe

Vidjeli smo kako se problem radioaktivnog raspada (u idealnim uvjetima) svodi na običnu diferencijalnu jednadžbu 1. reda
$y'(t) = -ky$
s početnim uvjetom
$y(0) = y_0$.

Slično bismo pokazali da se problem idealnog titranja svodi na običnu diferencijalnu jednadžbu 2. reda
$y''(t) + k^2 y(t) = 0$ (*)
s početnim uvjetima:
(i) $y(0) = A$
(ii) $y'(0) = 0$.
Tu je t vrijeme i čestica titra po y osi izmedju točaka (vrijednosti) A i $-A$ (A je amplituda) i početni uvjet $y(0) = A$ govori da je u $t = 0$ čestica u položaju A, dok početni uvjet $y'(0) = 0$ govori da je brzina u $t = 0$ jednaka nuli (što je prirodno). Sama jednadžba je matematički zapis činjenice da titranje uzrokuje sila proporcionalna udaljenosti od ishodišta (i da djeluje prema ishodištu); sve se može eksperimentalno potvrditi kod titranja vrha vrlo elastične opruge - koeficijent k je karakteristika materije, koja će, očito, utjecati na **frekvenciju** titranja. Zaista, standardnom se metodom dobije da je rješenje oblika $y(t) = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt)$, za neke konstante C_1, C_2, a iz početnih uvjeta, dobije se **jedinstveno rješenje**

$$y(t) = A \cos(kt)$$

Lako se provjeri da ovo rješenje zadovoljava gornju diferencijalnu jednadžbu i početne uvjete; takodjer, da ono zaista opisuje titranje čestice po y-osi izmedju vrijednosti A i $-A$. Deriviranjem se dobije brzina u svakom trenutku:

$$v(t) := y'(t) = -Aksin(kt)$$

Za različite k, titranje ima različite frekvencije.
Jasno je da, općenito, titranje nije u idealnim uvjetima, već postoje odredjene smetnje, i tada je, na primjer, pripadajuća diferencijalna jednadžba oblika

$$y''(t) + k^2 y(t) = g(t)$$

, gdje funkcija g opisuje karakter smetnje, uz uvjet da ta smetnja ovisi samo o vremenu.
Da je diferencijalna jednadžba bila trećeg reda trebalo bi imati tri početna uvjeta itd. Općenito, diferencijalna jednadžba, skupa s početnim uvjetima, zove se **Cauchy-ev problem**. Taj je problem idealni, matematički analogon odgovarajućeg stvarnog, inženjerskog problema u kojemu se pojavljuju dvije medjusobno zavisne veličine (u ovom primjeru y i t). Slično bi bilo da se, na primjer, pojavljuju veličine x, y koje zavise o veličini t: tada bi imali sustav običnih diferencijalnih jednadžba skupa s početnim uvjetima.
U ovim smo primjerima vidjeli da je rješenje jedinstveno. U teoriji običnih diferencijalnih jednadžba, strogo matematički se dokazuje da je uvijek tako, ako su zadovoljeni odredjeni prirodni uvjeti, koji se mogu precizno definirati.

Postoje mnogi problemi u kojima se pojavljuje veličina koja ovisi o više drugih nezavisnih veličina. Tada se prirodno javljaju **parcijalne diferencijalne jednadžbe**.
Na primjer, pri titranju elastične niti pojavljuju su tri veličine:
t - vrijeme
x - veličina koja registrira horizontalni položaj čestica.
y - veličina koja registrira vertikalni otklon pri titranju (tada su x i y-osi i fizikalno i matematički medjusobno okomiti).
Jasno je da veličina y ovisi i o t i o x (naime vertikalni otklon titrajuće čestice ovisi i o vremenu t i o vrijednosti x - naime ona jednoznačno odredjuje tu česticu). Zato pišemo

$$y = u(x, t)$$

Pokazuje se (uz odredjene prirodne pretpostavke u idealnim uvjetima) da je pripadna parcijalna diferencijalna jednadžba oblika

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

gdje je c neka konstanta, a mi kratko, pišemo u umjesto $u(x, t)$. Naravno da smo to mogli pisati i kao

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

To je parcijalna diferencijalna jednadžba 2. reda. Uz nju idu još početni i **rubni** uvjeti. Da ih postavimo predpostavimo da je nit duljine L i da je učvršćena na x osi u točkama $x = 0$ i $x = L$ (sl.5.).

Tada imamo prirodne:
(i) rubne uvjete: $u(0, t) = u(L, t) = 0$ za sve t
(ii) početne uvjete:
(1) $u(x, 0) = f(x)$, za neku funkciju f
(2) $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$ za neku funkciju g.

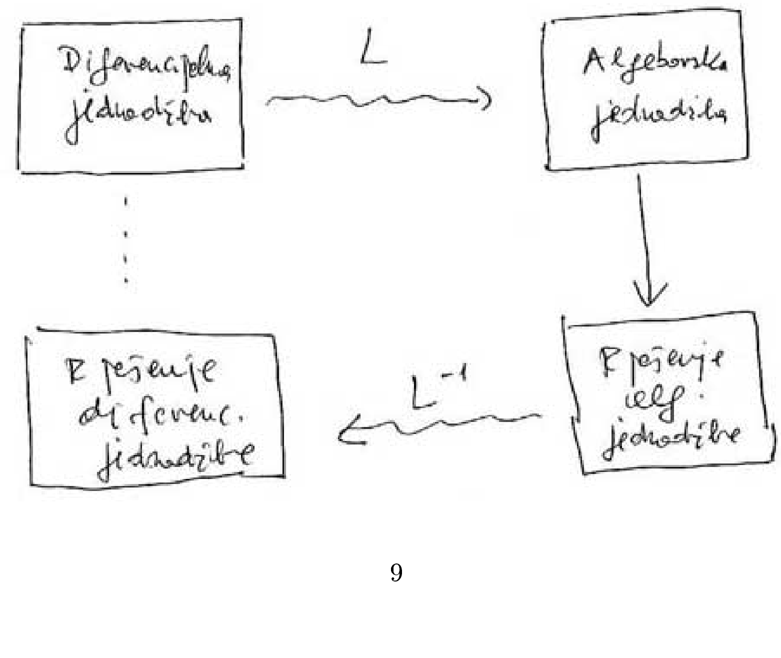
Sl. 5

Matematičko rješenje možete vidjeti u Kreyszigu, poglavlje 9. Za to rješenje potrebno je poznavanje Fourierove anlize. Treba uočiti da se tijekom rješavanja pojavljuju obične diferencijalne jednadžbe tipa (*), koja opisuje titranje jedne čestice. To je prirodno, jer se titranje niti može zamišljati kao titranje beskonačno mnogo čestica (iako ne nezavisno jedno od drugog).

Uz jednadžbu titranja, naročito su važne **toplinska jednadžba**, **Laplaceova jednadžba** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ i **Poissonova jednadžba** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$, koje se pojavljuju u mnogim problemima (vidi pogl. 9. u Kreyszigu). Razvijena je teorija parcijalnih diferencijalnih jednadžba koja je i danas jedno od važnijih matematičkih područja. Glavna podjela parcijalnih diferencijalnih jednadžba jest na **eliptičke**, **paraboličke** i **hiperboličke** (vidi Probleme 13 i 14 u Kreyszigu, poglavlje 9.4).

Laplaceova transformacija.

U matematici ima više vrsta transformacija funkcija: Fourierova, Laplaceova, Poissonova, Mellinova itd. Zajedničko im je da se definiraju pomoću integrala pa se zovu i **integralne transformacije**, a nastale su iz dubokih matematičkih i praktičnih razloga. Uz druge važne primjene, Laplaceova transformacija ima i primjenu u rješavanju linearnih diferencijalnih jednadžba (skupa s početnim uvjetima - Cauchyev problem). Ta se primjena može skicirati ovako:



Za razumijevanje Laplaceove transformacije potrebno je poznavati pojam nepravog integrala, pojam vektorskog prostora (u ovom slučaju to će biti vektorski prostor funkcija definiranih bar za sve pozitivne brojeve) i pojam **linearnog operatora**. Linearni operator je transformacija na vektorskim prostorima koja zbroj prebacuje u zbroj, razliku u razliku, i, općenito, linearnu kombinaciju u linearnu kombinaciju. To znači (za prostore funkcija i linearni operator A):

$$A(f+g) = A(f) + A(g)$$

$$A(cf) = cA(f)$$

i, općenito,

$$A(\alpha f + \beta g) = \alpha A(f) + \beta A(g)$$

Na primjer, za konačno dimenzionalne prostore, linearni operatori su upravo transformacije koje se mogu zapisati pomoću matrica.
Za beskonačno dimenzionalne prostore, poput prostora funkcija, linearni je operator, na primjer, operator deriviranja D, koji djeluje kao $D(f(x)) := f'(x)$ (naravno da on ne djeluje na svim funkcijama, već samo na derivabilnim). Naime:

$$D(f+g) = D(f) + D(g)$$

$$D(cf) = cD(f)$$

Taj operator ima i dodatna svojstva, na primjer $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ i $D(f \circ g) = [D(f) \circ g]D(g)$ itd.

Analogno tome, Laplaceova transformacija L djeluje na funkcijama prema pravilu:

$$L(f)(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Tu treba uočiti sljedeće:
(i) tradicionalno argument od f označavamo kao t
(ii) tradicionalno argument od $L(f)$ označavamo kao s
(iii) unutar integrala s je fiksiran, a t se mijenja, pa pri integriranju t nestaje, a s ostaje.
(iv) Da dobijemo vrijednost Laplaceove transformacije funkcije f u s, funkciju najprije množimo eksponencijalnom funkcijom e^{-st}, potom integriramo po pozitivnim brojevima - dobijemo broj koji možemo shvatiti kao neku srednju vrijednost funkcije f.

Takodjer $L(f)$ se tradicionalno označava kao F, pa imamo analogni zapis

$$F(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Logika je da od malog "ef" nastaje veliko "ef", slično je G Laplaceova transformacija od g, H Laplaceova transformacija od h, $Y(s)$ Laplaceova transformacija od $y(t)$ i sl.
Treba napomenuti da ne treba brkati Laplaceovu transformaciju s Laplaceovim operatorom (koji, uobičajeno označava operator $\triangle := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, koji funkciji f dviju varijabla x, y pridružuje funkciju $\triangle(f) := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ - povezan s Laplaceovom

diferencijalnom jednadžbom).

Zbog svojstava integrala (zbroj prelazi u zbroj i konstanta se može izlučiti ispred integrala), vidimo da je Laplaceova tansformacija linearni operator. Ona ima važna dodatna svojstva. Na primjer.
(I) $L(e^{at}f(t)) = F(s-a)$
(II) $L(f') = sF(s) - f(0)$
$L(f'') = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$L(f''') = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$ itd.

Lako se vidi da je $L(0) = 0$, $L(1) = \frac{1}{s}$, $L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$. Za mnoge druge rezultate pogledajte tablicu koja napravljena uz pomoć svojstava ili izravnog računanja (iz nje se mogu očitavati i vrijednosti inverzne transformacije).
Pomoću svojstva (II) diferencijalna se jednadžba prevodi u algebarsku. Korake navedene na početku opisujemo na primjeru kojeg smo spominjali prije (titranje):
1. korak (početni problem). Treba riješiti Cauchyev problem:

$$y''(t) + k^2y(t) = 0,\ y(0) = A,\ y'(0) = 0$$

2. korak (pretvaranje u algebarski problem - Laplaceova transformacija):

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + k^2Y(s) = 0$$

tj. $(s^2 + k^2)Y(s) - As = 0$.
3. korak (rješavanje algebarskog problema)

$$Y(s) = \frac{As}{s^2 + k^2}$$

4. korak (rješavanje izvornog problema).
Iz tablica Laplaceovih transformacija očitamo

$$y(t) = A\cos(kt)$$

kako smo i tvrdili da je rješenje.
Više o Laplaceovoj transformaciji možete saznati u Kreyszigu, poglavlje 4.