Naglasci za izborni kolegij: Matematičke metode u kemijskom inženjerstvu - nastavak

Fourierov razvoj

Već smo vidjeli da (dovoljno razumna) funkcija f perioda 2π ima Fourierov razvoj:

$$f(x) = a_0+[a_1\cos(x)+b_1\sin(x)]+[a_2\cos(2x)+b_2\sin(2x)]+[a_3\cos(3x)+b_3\sin(3x)]+...$$

gdje je

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx$$

za $n = 1, 2, 3, ...,$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(nx)dx$$

za $n = 1, 2, 3, ...$

Za **parne** funkcije f formule se mogu pojednostavniti tako da se za a_n ne integrira od $-\pi$ do π, već od 0 do π i pomnoži s 2, a za b_n se dobije 0. Dakle, dobije se:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx$$

za $n = 1, 2, 3, ...,$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx$$

$$b_n = 0$$

za $n = 1, 2, 3, ...$

To je logično, naime da u Fourierovu razvoju parne funkcije sudjeluju samo parne funkcije (kosinusi).

Slično, u Fourierovu razvoju neparne funkcije f sudjeluju samo sinusi:

$$a_n = 0$$

za $n = 0, 1, 2, 3, ...$,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx$$

za $n = 1, 2, 3, ...$

Te formule vrijede za funkciju f perioda 2π. Tu smo taj period gledali na intervalu $[-\pi, \pi]$. Analogne formule vrijede za funkciju f perioda T, samo što tu T možemo gledati na intervalu $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, a umjesto $\cos x$ pisati $\cos \frac{2\pi}{T} x$ itd. Naime, ako je $-\frac{T}{2} \leq x \leq \frac{T}{2}$, onda je $-\pi \leq \frac{2\pi}{T} x \leq \pi$, i analogno za ostale funkcije. Zato imamo:

(Dovoljno razumna) funkcija f perioda T ima Fourierov razvoj:

$f(x) = a_0 + [a_1 \cos(\frac{2\pi}{T} x) + b_1 \sin(\frac{2\pi}{T} x)] + [a_2 \cos(2\frac{\pi}{T} x) + b_2 \sin(2\frac{2\pi}{T} x)]$
$+[a_3 \cos(3\frac{2\pi}{T} x) + b_3 \sin(3\frac{2\pi}{T} x)] + ...$

gdje je

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cdot \cos(n\frac{2\pi}{T} x) dx$$

za $n = 1, 2, 3, ...$,

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cdot \sin(n\frac{2\pi}{T} x) dx$$

za $n = 1, 2, 3, ...$

Uočite vezu medju koeficijentima ispred integrala u posebnom slučaju i općenito. Na primjer, taj je koeficijent za b_n jednak:

$\frac{1}{\pi} = \frac{2}{2\pi} = \frac{2}{T}$.

Kao i prije, za **parne** funkcije f formule se mogu pojednostavniti tako da se za a_n ne integrira od $-\frac{T}{2}$ do $\frac{T}{2}$, već od 0 do $\frac{T}{2}$ i pomnoži s 2, a za b_n se dobije 0. Dakle, dobije se:

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cdot \cos(n\frac{2\pi}{T} x) dx$$

za $n = 1, 2, 3, ...$,

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) dx$$

$$b_n = 0$$

za $n = 1, 2, 3, ...$

To je logično, naime da u Fourierovu razvoju parne funkcije sudjeluju samo

parne funkcije - kosinusi (**kosinusni Fourierov razvoj**).
Slično, u Fourierovu razvoju neparne funkcije f sudjeluju samo sinusi (**sinusni Fourierov razvoj**):

$$a_n = 0$$

za $n = 0, 1, 2, 3, ...,$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cdot \sin(n\frac{2\pi}{T}x)dx$$

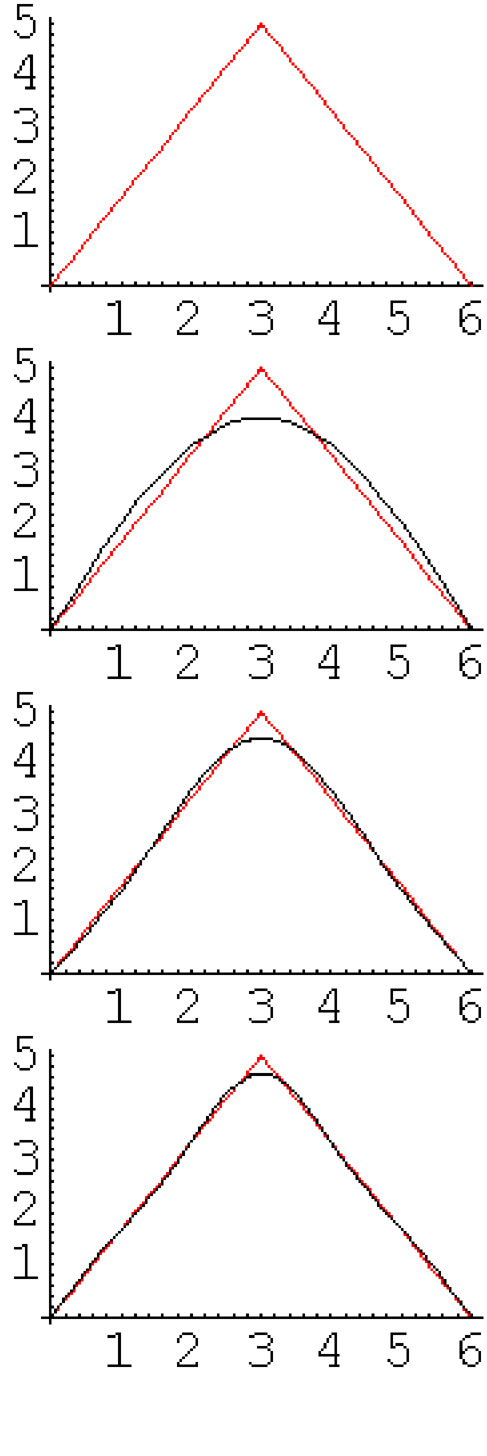
za $n = 1, 2, 3, ...$
Sad ćemo dio navedenog ilustrirati na primjeru funkcije (koja se pojavljuje kod opisa titranja učvršćene elastične žice).
Primjer 1. Odredimo Fourierov razvoj funkcije zadane uvjetima:
$f(x) := \frac{2A}{L}x$, za $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$,
$f(x) := \frac{2A}{L}(L - x)$, za $\frac{L}{2} \leq x \leq L$,
koju smo, po neparnosti proširili za sve realne x (slika 7).
Smisao tog grafa jest u tomu da se elastična žica duljine L (koja je učvršćena u rubovima) napne po sredini do visine A, potom pusti da titra. Vidjet ćemo da je za rješenje problema opisa tog titranja važno poznavanje razvoja funkcije f u sinusni Fourierov red.
Tu je f neparna, perioda $T = 2L$. Zato je

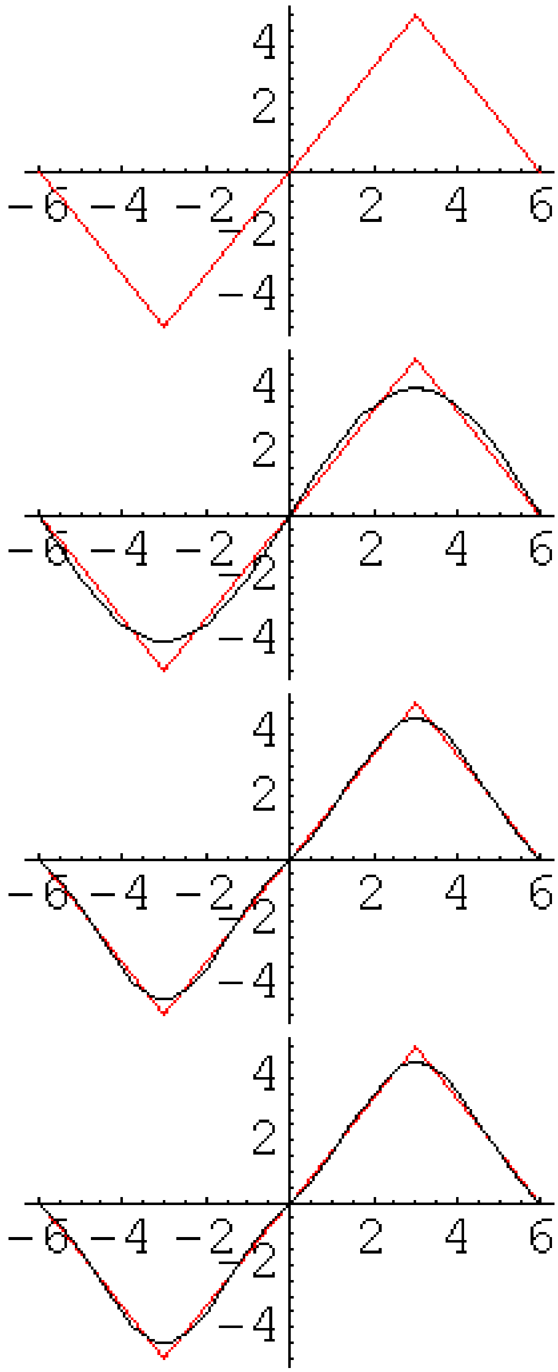
$$b_n = \frac{2}{L}[\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2A}{L}x \cdot \sin(n\frac{\pi}{L}x)dx + \int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{2A}{L}(L - x) \cdot \sin(n\frac{\pi}{L}x)dx] = \frac{8A}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

(to smo mogli dobiti parcijalnom integracijom, a još bolje izravnom uporabom programskog paketa Mathematica). Lako se vidi da je:
$\sin\frac{n\pi}{2} = 1$ za $n = 1, 5, 9, 13, ...$
$\sin\frac{n\pi}{2} = -1$ za $n = 3, 7, 11, 15, ...$
$\sin\frac{n\pi}{2} = 0$ za $n = 2, 4, 6, 8, ...$
Zato je traženi razvoj:

$$f(x) = \frac{8}{\pi^2}A(\sin\frac{\pi x}{L} - \frac{1}{9}\sin\frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{25}\sin\frac{5\pi x}{L} - \frac{1}{49}\sin\frac{7\pi x}{L} + ...)$$

Rezultat predočujemo pomoću programskog paketa Mathematica za $A = 5$ i $L = 6$.


5
4
3
2
1
1 2 3 4 5 6
5
4
3
2
1
1 2 3 4 5 6
5
4
3
2
1
1 2 3 4 5 6
5
4
3
2
1
1 2 3 4 5 6



4
2
−6
−4
−2
2
4
6
−2
−4

Idealno titranje čestice po pravcu

Intuitivno dolazimo do toga da takvo titranje po y-osi oko ishodišta uvjetuje promjenjiva sila koja ima sljedeća svojstva:
1. U svakoj točki y-osi (u kojoj se odvija titranje) sila je usmjerena prema ishodištu.
2. Zbog simetrije funkcija koja opisuje silu u ovisnosti o y je neparna (posebice, sila u ishodištu jednaka je nuli).
Najjednostavnija takva sila je oblika

$$F(y) := -ky$$

gdje je $k > 0$ konstanta.
Neka je $y(t)$ položaj čestice u vrijeme t.
Prema Newtonovu zakonu $a(t) = -\frac{k}{m}y(t)$, gdje je m masa čestice, dakle

$$y''(t) = -\omega^2 y(t)$$

gdje je $\omega := \sqrt{\frac{k}{m}}$. To je **diferencijalna jednadžba titranja**. Intuitivno je jasno da će, uz stalnu masu m, veći ω značiti brže titranje.
Da bi titranje bilo jednoznačno odredjeno (i da bismo ga mogli opisati) potrebni su **početni uvjeti**. Fizikalno najjasniji takvi uvjeti jesu **početni položaj** i **početna brzina**. Odavde postavljamo diferencijalnu jednadžbu titranja skupa s početnim uvjetima - **Cauchy-ev problem** (tradicionalno, varijablu t izostavljamo):

$$y'' + \omega^2 y = 0;\ y(0) = A,\ y'(0) = 0 \quad (*)$$

Tu je početni položaj A, a radi jednostavnosti smo se odlučili da početna brzina bude 0 (općenito bi bilo $y'(0) = v_0$, medjutim to bitno ne mijenja rješenje).
Fizikalno opravdanje. Pokusom se pokazuje (Newtonov zakon, ali ne onaj od gore), da za silu F koja djeluje na vrh vrlo elastične opruge kao na slici, približno vrijedi $F(y) = -ky$, gdje je k koeficijent elastičnosti, i da su početni uvjeti kao u $(*)$.
Intuitivno odredjivanje jednadžbe gibanja.
Prihvatljivo je sljedeće umovanje:
(i) Od točke A prema ishodištu čestica ubrzava (jer sila djeluje u smjeru gibanja).
(ii) Od ishodišta prema $-A$ čestica usporava (jer sila djeluje suprotno od

smjera gibanja). Pri tom je tempo usporavanja, zbog simetrije, u skladu s tempom ubrzavanja.
(iii) U $-A$ čestica zastane, potom se vraća prema A potpuno analogno i dalje periodno.
Vidimo da je najjednostavnija (od poznatih periodnih funkcija koja ima takav graf, a u kojoj sudjeluju parametri A i ω), zadana vezom:

$$y = A\cos(\omega t)$$

Zaista, dobijemo $y' = -A\omega\sin(\omega t)$ i $y'' = -A\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2 y$, pa vidimo da to rješenje zadovoljava (*).
Matematičko rješavanje problema (*).
Tu je karakteristična jednadžba diferencijalne jednadžbe iz (*)

$$r^2 + \omega^2 = 0$$

s rješenjima $r = \pm\omega \cdot i$, pa je opće rješenje

$$y = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)$$

Iz početnih uvjeta sad se lako vidi da je $C_1 = A$ i $C_2 = 0$.

Idealno titranje učvršćene žice.

Neka je savršeno elastična žica položena po x-osi od 0 do L, učvršćena u krajevima. Neka je dalje:
t-vrijeme
x-duljinska koordinata
$u(x,t)$ položaj (vertikalni otklon) čestice s prvom koordinatom x u vremenu t.
Tu se pokaže da je (parcijalna) diferencijalna jednadžba titranja (u idealnim uvjetima):

Jednodimenzionalna valna jednadžba

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \; (**)$$

gdje je c koeficijent elastičnosti.
Rubni uvjeti: $u(0,t) = u(L,t) = 0$ za sve t (jer je žica učvršćena).
Početni uvjeti:
početni položaj: $u(x,0) = f(x)$, **početna brzina:** $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0$.
Tu smo, radi jednostavnosti, stavili da je početna brzina 0, čime smo aludirali na predožbu da smo žicu nategli u položaj opisan funkcijom f, potom pustili da titra, bez ikakva dodatna impulsa; općenito bi bilo $\frac{\partial u}{\partial t} = g(x)$.
Intuitivno osjećamo da će titranje biti opisano sinusima i kosinusima, medjutim teško je unaprijed predvidjeti oblik.

Strategija rješavanja.

1. korak. Nalaženje puno (beskonačno mnogo) rješenja od (**) koji zadovoljavaju rubne uvjete, ali ne nužno početne.
2. korak. Traženje rješenja koje će zadovoljavati i rubne i početne uvjete u obliku linearne kombinacije rješenja iz 1. koraka (tu se nadamo da ćemo uspjeti jer nam u linearnoj kombinaciji sudjeluje beskonačno mnogo neodredjenih koeficijenata koje ćemo specificirati tako da ukupna suma zadovoljava i početne uvjete).
1. korak provodimo **metodom separacije varijabli**, tako da rješenje tražimo u obliku:

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

Sad (**) postaje (uz dogovor da točkice znače derivacije po t, a crtice po x)

$$F\ddot{G} = c^2 F''G$$

odnosno

$$\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k$$

gdje je k konstanta (naime lijeva strana ovisi samo t, a desna samo o x). Sad umjesto parcijalne diferencijalne jednadžbe dobijemo sustav običnih diferencijalnih jednadžba

$$F'' - kF = 0, \quad \ddot{G} - c^2 kG = 0$$

Napomena Za nastavak je važno da je konstanta k negativna. Naime, ako bi bilo $k > 0$, onda bi opé rješenje od $F'' - kF = 0$ bilo $F(x) = C_1 e^{\sqrt{k}x} + C_2 e^{-\sqrt{k}x}$, uz konstante C_1, C_2. Kako želimo da rješenja zadovoljavaju rubne uvjete, dobili bismo:

$$0 = u(0,t) = F(0)G(t) = (C_1 + C_2)G(t)$$

za sve t, odakle slijedi $C_1 + C_2 = 0$, tj. $C_2 = -C_1$ (jer G nije identički nula). Slično,

$$0 = u(L,t) = F(L)G(t) = (C_1 e^{\sqrt{k}L} - C_1 e^{-\sqrt{k}L})G(t) = C_1(e^{\sqrt{k}L} - e^{-\sqrt{k}L})G(t)$$

za sve t, odakle slijedi $C_1 = 0$ (jer je $e^{\sqrt{k}L} - e^{-\sqrt{k}L} \neq 0$, a G nije identički nula). Sad bi bilo i $C_2 = 0$, pa bi F bio nula funkcija, dakle i u bi bio nula funkcija,što nam ne odgovara.
Malo drukčije, ali slično odbacili bismo i mogućnost $k = 0$.
Od sad, na dalje stavljamo $k := -p^2$ za neki pozitivan realan broj p, pa sustav postaje:

$$F'' + p^2 F = 0, \quad \ddot{G} + c^2 p^2 G = 0$$

Rješenje jednadžbe $F'' + p^2 F = 0$.
Opće rješenje: $F(x) = C_1 \cos(px) + C_2 \sin(px)$ uz konstante C_1, C_2. To uvrštavamo u rubne uvjete:

$$0 = u(0,t) = F(0)G(t) = (C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0)G(t) = C_1 G(t)$$

za sve t, odakle dobijemo $C_1 = 0$.

$$0 = u(L,t) = F(L)G(t) = (0 \cdot \cos(pL) + C_2 \sin(pL))G(t) = C_2 \sin(pL)G(t)$$

za sve t, odakle, zbog $C_2 \neq 0$, dobijemo $\sin(pL) = 0$, što daje mogućnosti.

$$pL = n\pi, \ n \in \mathbf{Z}, \ \text{tj. } p = \frac{n\pi}{L}$$

Tako dobijemo niz rješenja

$$F_n(x) := \sin(\frac{n\pi}{L}x), \ n = 1, 2, 3, ... \ (***)$$

Tu smo stavili $C_2 = 1$, a negativne n odbacujemo jer s njima ne dobivamo bitno nova rješenja, a za $n = 0$ dobijemo nula funkciju.
Rješenje jednadžbe $F'' + p^2F = 0$.
Uzimajući u obzir $p = \frac{n\pi}{L}$, $n = 1, 2, 3, ...$ i stavljajući $\lambda_n := \frac{n\pi}{L}c$, dobijemo rješenja $G_n(t) = B_n \cos(\lambda_n t) + B_n^* \sin(\lambda_n t)$, odakle proizlazi (beskonačan) niz rješenja od (**) koja zadovoljavaju i rubne uvjete:
$u_n(x,t) := F_n(x)G_n(t) = \sin(\frac{n\pi}{L}x)(B_n \cos(\lambda_n t) + B_n^* \sin(\lambda_n t)),\ n = 1, 2, 3, ...$
2. korak.
Rješenje od (**) koje zadovoljava i rubne i početene uvjete tražimo u obliku $u(x,t) := u_1(x,t) + u_2(x,t) + ...$ tj. u obliku

$$u(x,t) := \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{n\pi}{L}x)(B_n \cos(\lambda_n t) + B_n^* \sin(\lambda_n t))$$

Ako uvrstimo početni uvjet $u(x, 0) = f(x)$, dobijemo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

pa zaključujemo da su B_n **Fourierovi koeficijenti** pri razvoju funkcije f u sinusni red s poluperiodom L. Zato mora biti:

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)(\sin\frac{n\pi}{L}x)$$

Koeficijente B_n^* općenito dobijemo iz početne brzine. Mi ćemo to uraditi ako je početna brzina jednaka nuli, tj. ako je: $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0$. Deriviranjem dobijemo $0 = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{n\pi}{L}x)(-\lambda_n B_n^*)$ odakle dobijemo $B_n^* = 0$ za sve n. Zato je konačno rješenje

$$u(x,t) := \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{n\pi}{L}x) B_n \cos(\lambda_n t)\ (****)$$

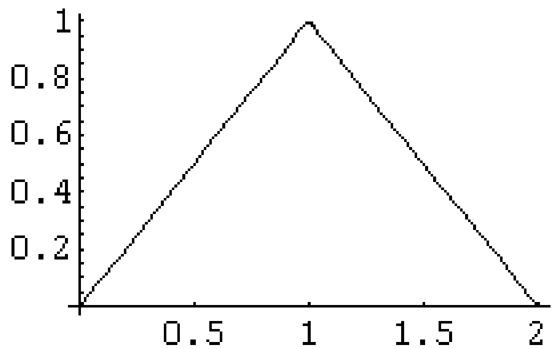
Primjer 2. Odredimo gibanje žice kojoj je početni položaj kao u Primjeru 1., tj. ako je $f(x) := \frac{2A}{L}x$, za $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$,
$f(x) := \frac{2A}{L}(L - x)$, za $\frac{L}{2} \leq x \leq L$,
Tamo je traženi razvoj bio:

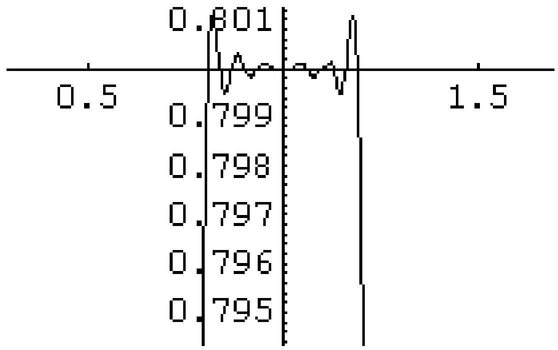
$$f(x) = \frac{8}{\pi^2}A(\sin\frac{\pi x}{L} - \frac{1}{9}\sin\frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{25}\sin\frac{5\pi x}{L} - \frac{1}{49}\sin\frac{7\pi x}{L} + ...)$$

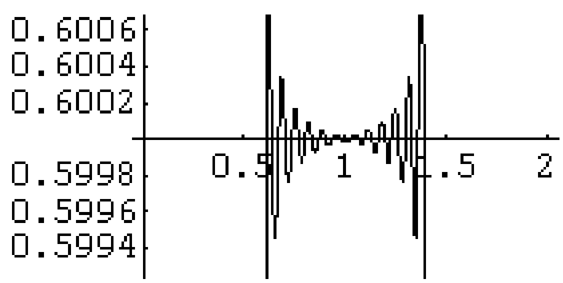
Iz njega izravno očitavamo koeficijente B_n, pa je

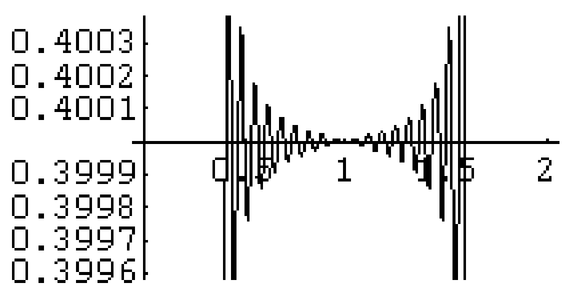
$$u(x) = \frac{8}{\pi^2}A(\sin\frac{\pi x}{L}\cos(\frac{\pi c}{L}t) - \frac{1}{9}\sin\frac{3\pi x}{L}\cos(\frac{3\pi c}{L}t) + \frac{1}{25}\sin\frac{5\pi x}{L}\cos(\frac{5\pi c}{L}t) - ...)$$

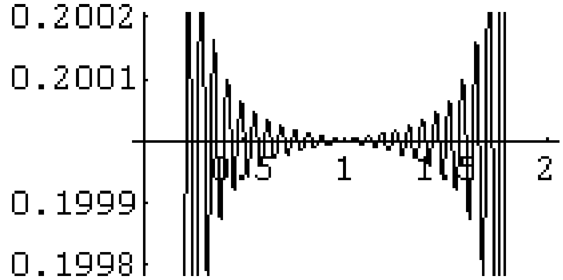
Rezultati su grafički predočeni pomoću programskog paketa Mathematica.

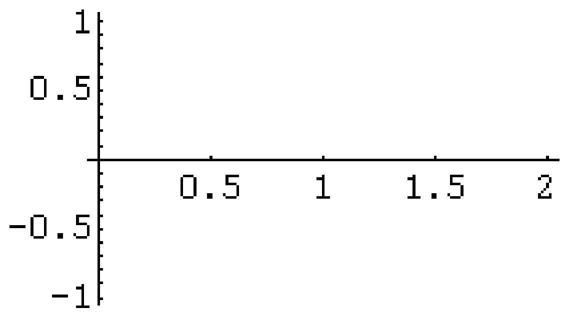

1
0.8
0.6
0.4
0.2
0.5
1
1.5
2

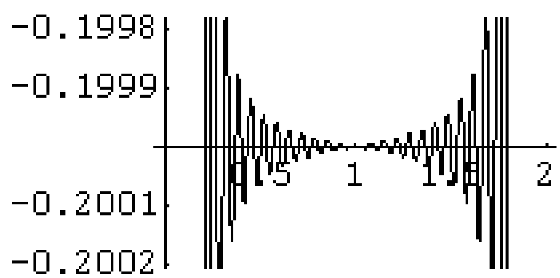

0.801
0.5
1.5
0.799
0.798
0.797
0.796
0.795

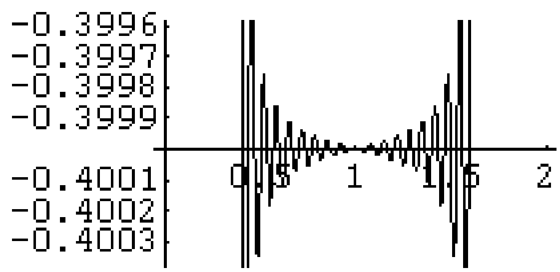

0.6006
0.6004
0.6002
0.5998
0.5996
0.5994
0.5
1
1.5
2

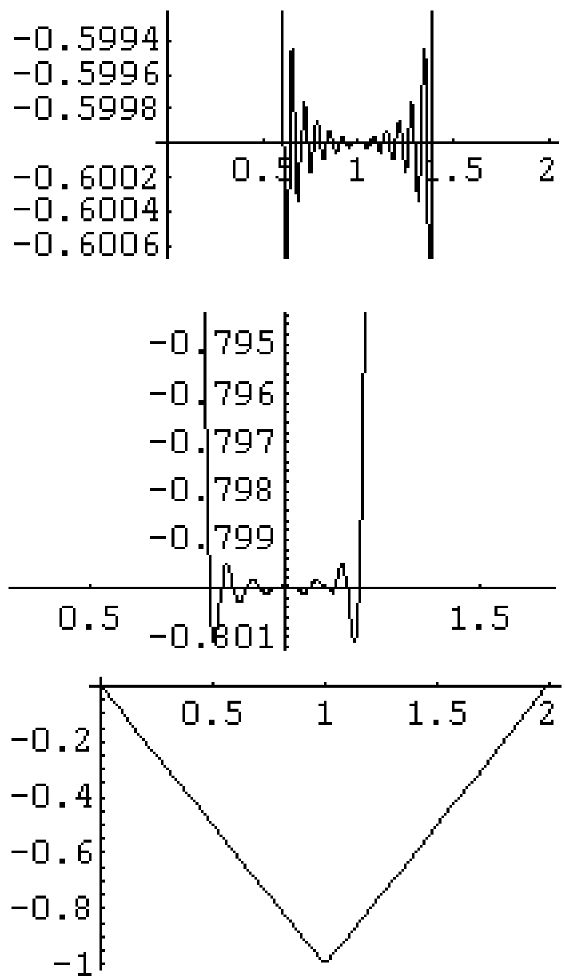

0.4003
0.4002
0.4001
0.3999
0.3998
0.3997
0.3996
0.5
1
1.5
2


0.2002
0.2001
0.1999
0.1998
0.5
1
1.5
2


1
0.5
-0.5
-1
0.5
1
1.5
2


-0.1998
-0.1999
-0.2001
-0.2002
0.5
1
1.5
2


-0.3996
-0.3997
-0.3998
-0.3999
-0.4001
-0.4002
-0.4003
0.5
1
1.5
2


-0.5994
-0.5996
-0.5998
-0.6002
-0.6004
-0.6006
0.5
1
1.5
2
-0.795
-0.796
-0.797
-0.798
-0.799
-0.801
0.5
1.5
0.5
1
1.5
2
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1