SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA
I TEHNOLOGIJE

ZAVOD ZA MATEMATIKU
Uvod u matematičke metode u inženjerstvu

SEMINARSKI RAD

Fraktali

VODITELJI:
Dr. sc. Ivica Gusić
Dr. sc. Miroslav Jerković

STUDENTI:
Igor Bočkinac
Mak Avdić

Zagreb, lipanj 2011.

OPĆI UVOD:

Fraktali su skupovi točaka kojima je fraktalna dimenzija veća od topološke dimenzije. Konačne su površine i beskonačnog opsega. Naziv je skovao Benoit Mandelbrot 1975. godine od latinskog pridjeva *fractus* što znači razlomljen.

Fraktali imaju tri važna svojstva: sličnost samome sebi, fraktalnu dimenziju i oblikovanje iteracijom. Sličnost samome sebi svojstvo je objekta da sliči sam sebi bez obzira koji njegov dio promatrali i koliko ga puta uvećali – sličnost oblika u svim mjerilima. Drugo važno svojstvo fraktala je fraktalna dimenzija koja se rijetko kada može iskazati cijelim brojevima. Fraktalna dimenzija naziva se još i razlomljena dimenzija zato što ne mora biti cijeli broj, za razliku od euklidske dimenzije. Ona opisuje i neka svojstva objekta kao što su izlomljenost i hrapavost. Specifično za fraktalnu dimenziju je to što ona ostaje konstantna bez obzira na mjerilo.

Treće svojstvo je oblikovanje iteracijom – svojstvo da se objekt može generirati nekim računskim ili geometrijskim postupkom koji se uzastopno ponavlja. Postoji početni objekt u koji se iterativno ugrađuju svojstva generatora.

Matematičko određivanje fraktalne dimenzije

Likovi klasične, euklidske geometrije su točka, pravac, ploha i tijelo. Točka ima dimenziju 0 jer nema niti jedan stupanj slobode, tj. nema ni dužinu ni širinu ni visinu. Pravac ima dimenziju 1 jer ima 1 stupanj slobode. Ploha ima 2 stupnja slobode, dužinu i širinu, a nema visinu. Dimenzija plohe je 2. Tijelo ima 3 stupnja slobode u euklidskom prostoru: širinu, dužinu i visinu, dakle dimenzija mu je 3.

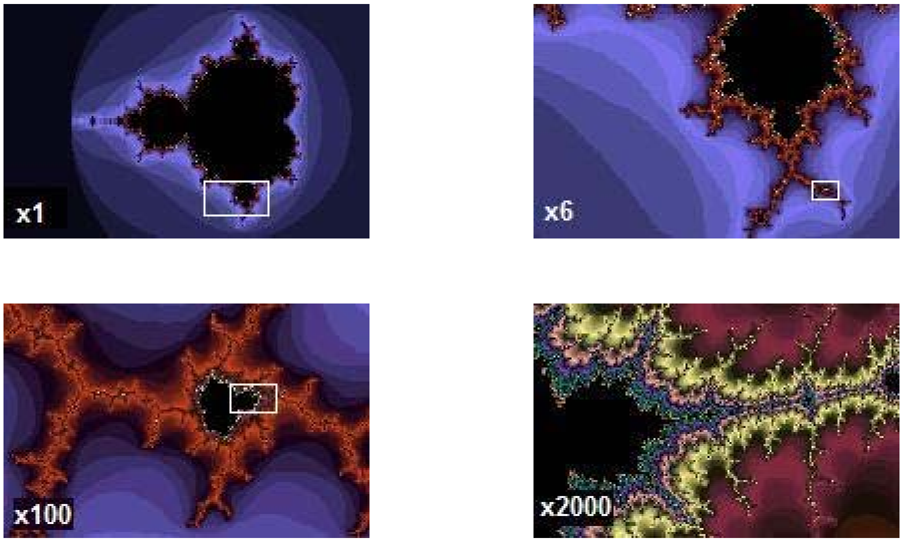
Fraktalna dimenzija (stupanj nepravilnosti) ostaje konstantna bez obzira na mjerilo, što se u prirodi vrlo često pokazuje točnim.

Fraktalnu dimenziju sebi sličnog skupa definiramo s:

$$\boldsymbol{d} = \mathbf{log}(\boldsymbol{P}) \,/\, \mathbf{log}(\boldsymbol{s}) \tag{1}$$

gdje se objekt (skup) sastoji od P kopija samog sebe za faktor s. Ova definicija vrijedi samo za sebi slične skupove.

Skup S ima topološku dimenziju d, ako svaka točka u S ima po volji malu okolinu čije granice dodiruju S u skupu dimenzije d-1, a d je najveći pozitivni cijeli broj za kojeg ovo vrijedi.



Slika 1. Fraktal je objekt koji pokazuje sličnost samome sebi – uvećanjem jednog dijela fraktala dobivamo strukturu koja je, u stvari, umanjena verzija početnog dijela fraktala.

Fraktale je moguće klasificirati prema načinu nastajanja i to na iterativne, rekurzivne i slučajne (random).

Iterativni fraktali (Kochova krivulja) posjeduju najveći stupanj samosličnosti tzv. potpunu samosličnost. Bez obzira na to koji dio bismo uvećali uvijek ćemo dobiti sliku koja je identična početnoj.

Rekurzivni fraktali (Mandelbrotov skup, slika 1.) su fraktali koje dobivamo iz rekurzivnih relacija. Oni posjeduju svojstvo kvazisamosličnosti, što znači da je fraktal približno, ali ne potpuno jednak na različitim razinama.

Slučajni (random) fraktali (cvjetača) posjeduju najmanji stupanj samosličnosti tzv. statističku samosličnost. Nalazimo ih svugdje u prirodi.

Slika 2. Brokula kao primjer slučajnog fraktala

PRIMJER ITERATIVNOG FRAKTALA:"IGRA KAOSA"

Zadan je trokut ABC te na slučajan (random) način biramo početnu (inicijalnu) točku p_0 iz unutrašnjosti trokuta. Na dalje, izabiremo na slučajan način jedan od vrhova trokuta ABC s oznakom r(ABC)=random{A,B,C}, te na slučajan način unutar trokuta još jednu točku koja je na pola puta između p_0 i r(ABC), i tako dalje:

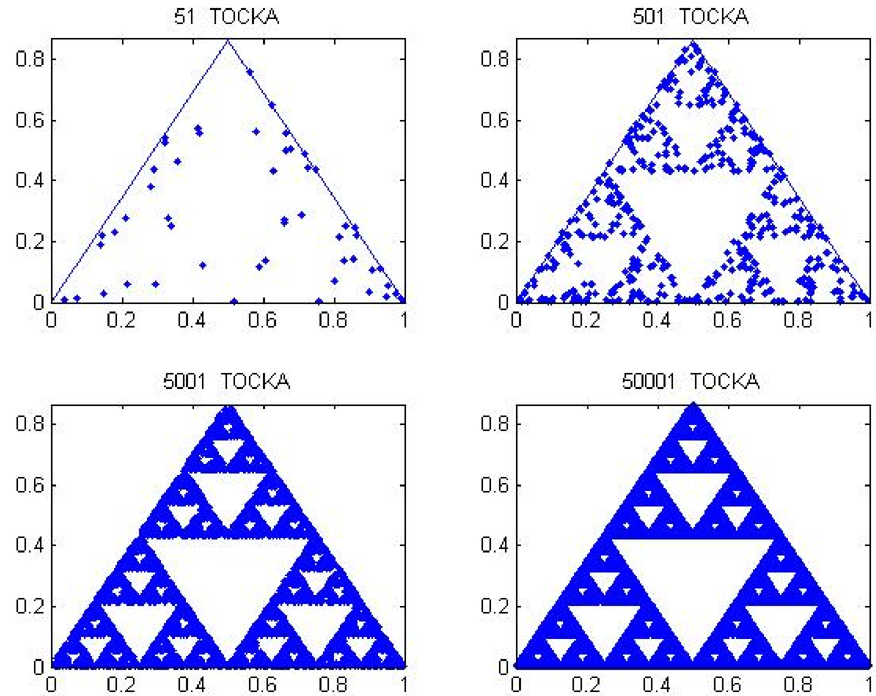
$$p_{n+1} = (p_n + r(ABC))/2. \qquad (2)$$

Svi primjeri iterativnih fraktala su izrađeni u programskom paketu Matlab R2009b.

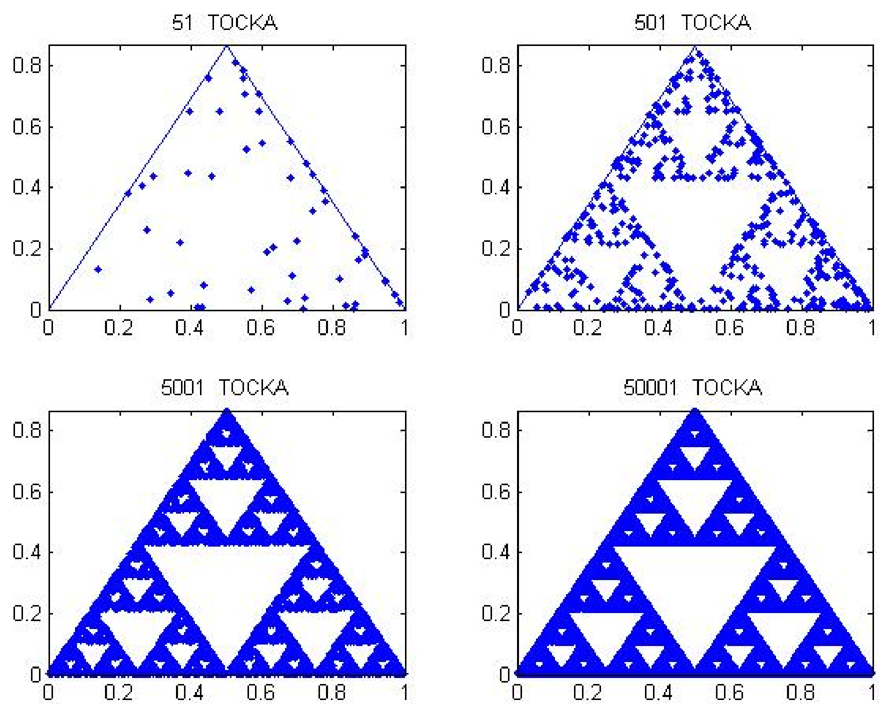
JEDNAKOSTRANIČAN TROKUT

Ispis Matlab-ovog komandnog prozora (*command windova)* za četiri puta pokrenut program s jednakostraničnim trokutom s istom početnom točkom, p_0, koja je slučajno odabrana.

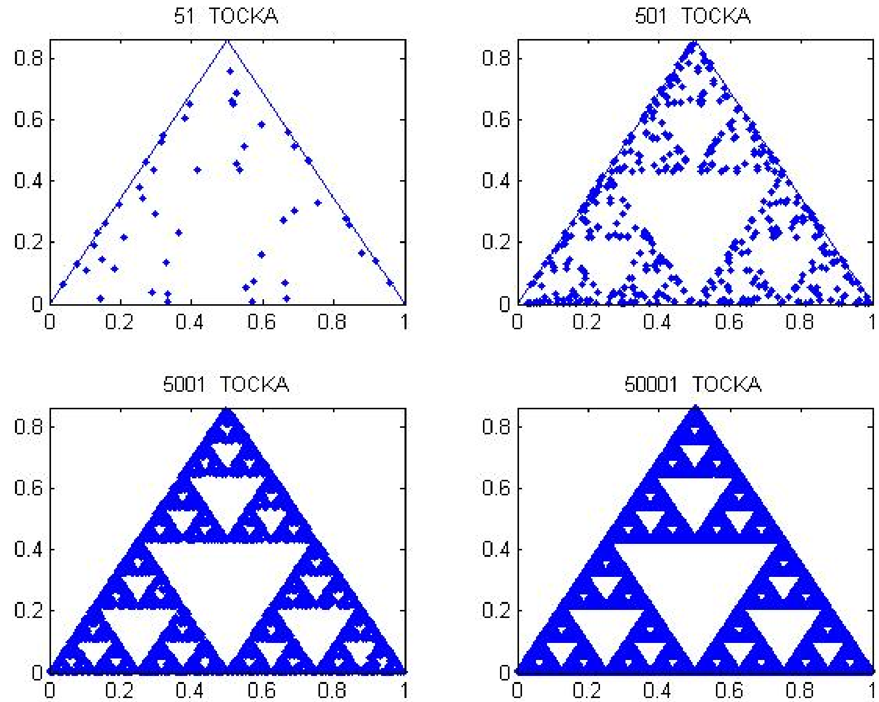
```
Chaos game s jednakostraničnim trokutom
Broj pokretanja programa:4
Unesite željeni broj točaka:50000
Unesite broj točaka za prikaz prve slike: 50
Unesite broj točaka za prikaz druge slike: 500
Unesite broj točaka za prikaz treće slike: 5000
Početna točka p0=( 0.292848, 0.43881)
```



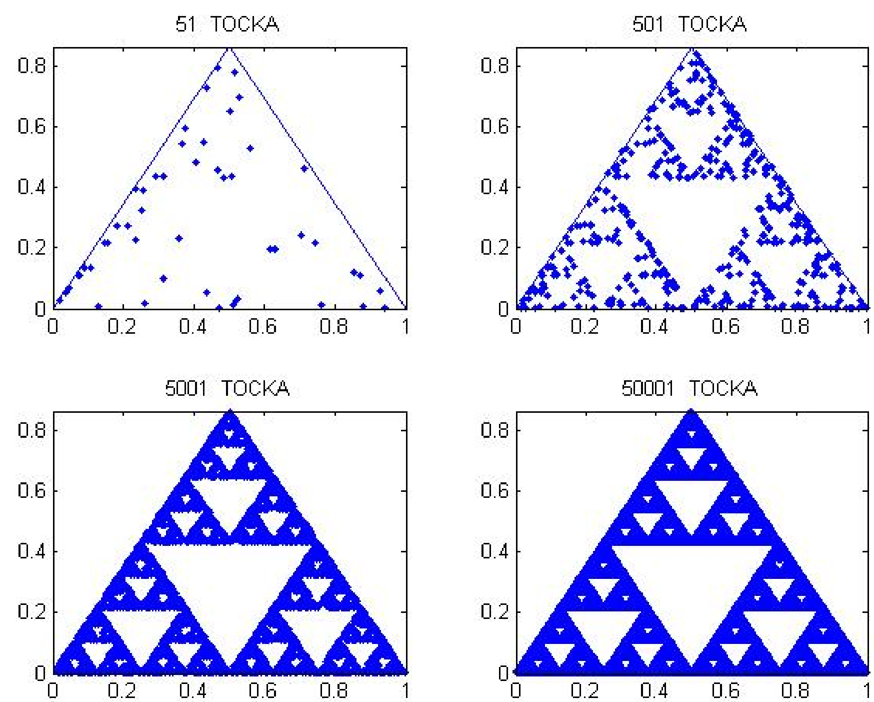
Slika 3. Prvo pokretanje programa



Slika 4. Drugo pokretanje programa



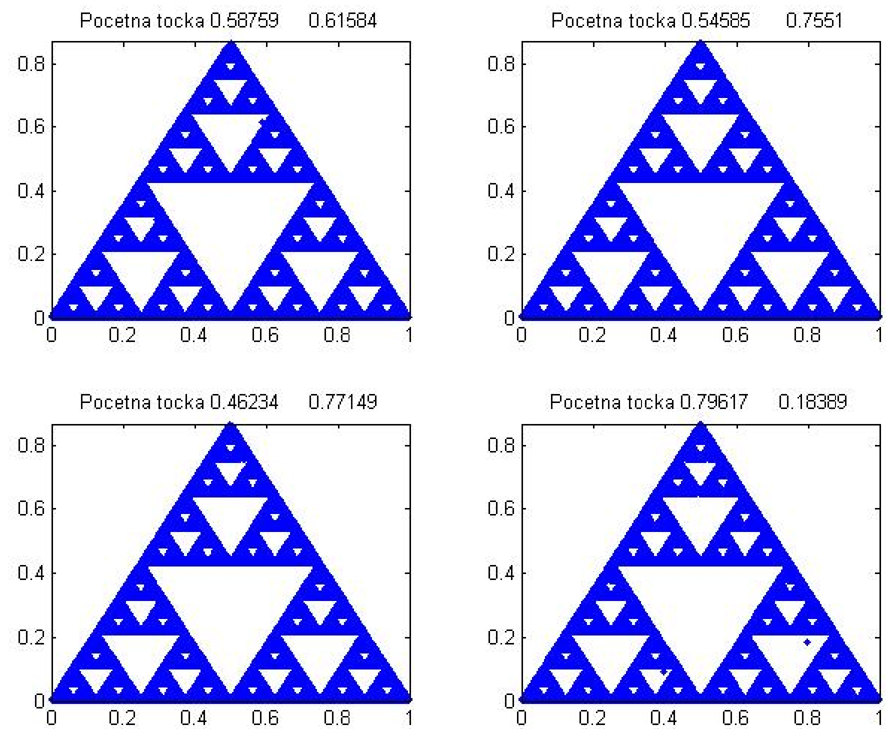
Slika 5. Treće pokretanje programa



Slika 6. Četvrto pokretanje programa

Ispis Matlab-ovog komandnog prozora (*command windova)* za četiri puta pokrenut program s jednakostraničnim trokutom s različitim slučajno odabranim početnim točkama, p_0.

Chaos game s jednakostraničnim trokutom
Broj pokretanja programa:4
Unesite željeni broj točaka:50000
Početna točka p0=(0.587595, 0.615836)
Početna točka p0=(0.545846, 0.755104)
Početna točka p0=(0.462339, 0.771491)
Početna točka p0=(0.796171, 0.183891)



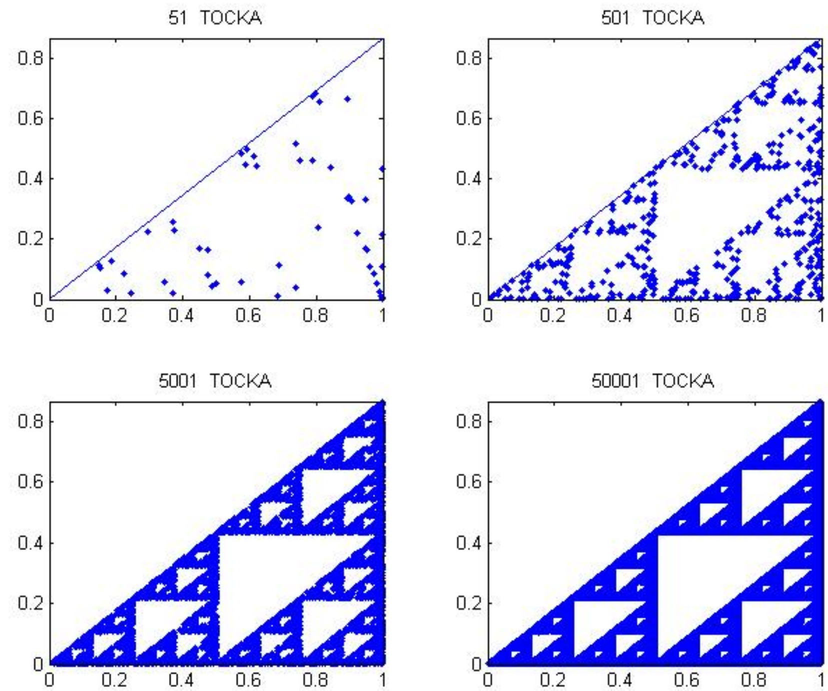
Slika 7. Ponašanje rješenja s 50001 točkom, za različite početne točke p_0

PRAVOKUTNI TROKUT

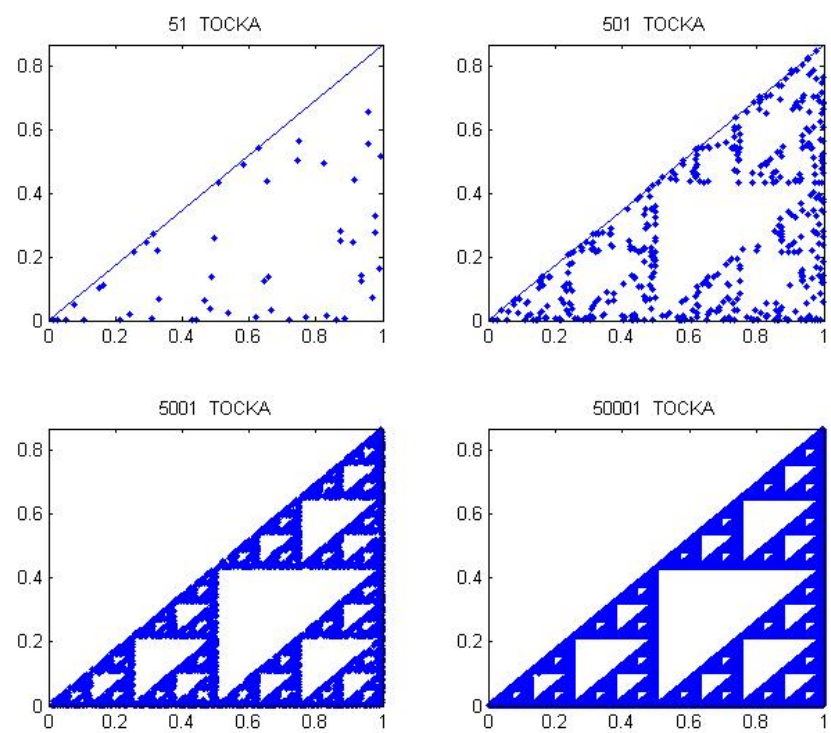
Postupak iteracije za pravokutni trokut analogan je postupku za jednakostraničan trokut, uz primjenu relacije (2).

Ispis Matlab-ovog komandnog prozora (*command windova)* za četiri puta pokrenut program s pravokutnim trokutom s istom slučajno odabranom početnom točkom, p_0.

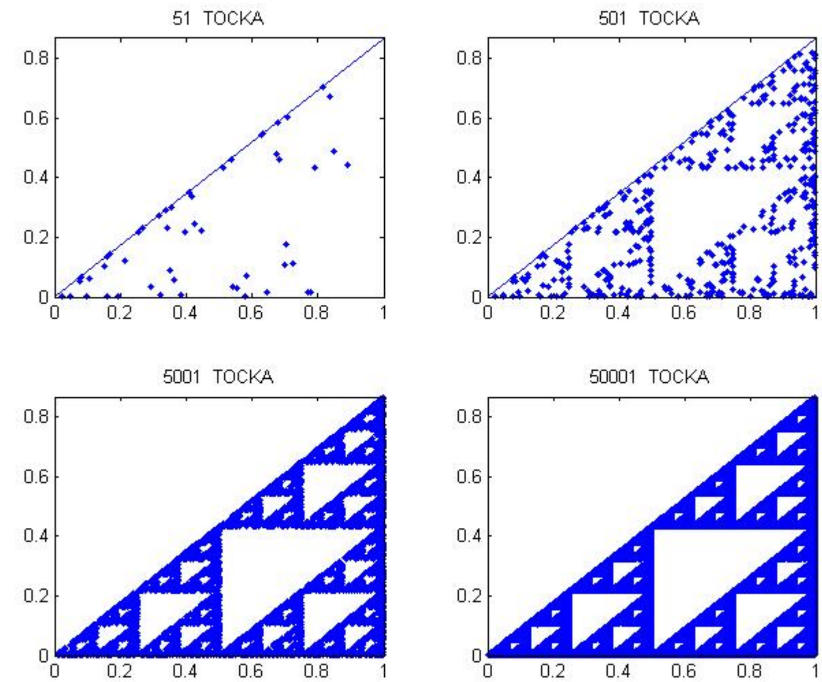
```
Chaos game s pravokutnim trokutom
Broj pokretanja programa:4
Unesite željeni broj točaka:50000
Unesite broj točaka za prikaz prve slike: 50
Unesite broj točaka za prikaz druge slike: 500
Unesite broj točaka za prikaz treće slike: 5000
Početna točka p0=( 0.152193, 0.103188)
```



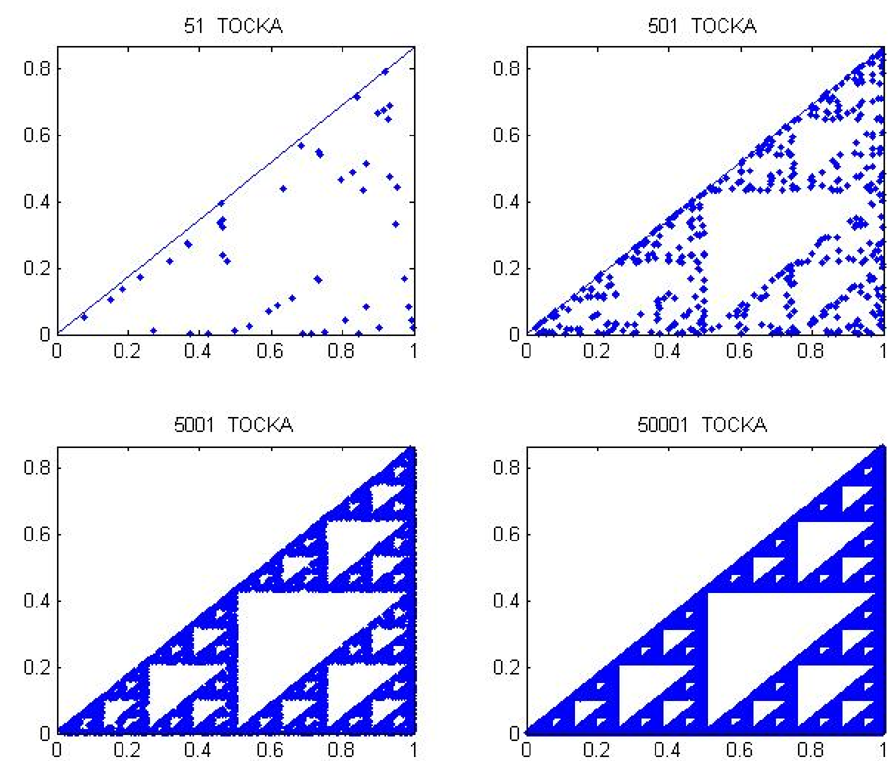
Slika 8. Prvo pokretanje programa



Slika 9. Drugo pokretanje programa



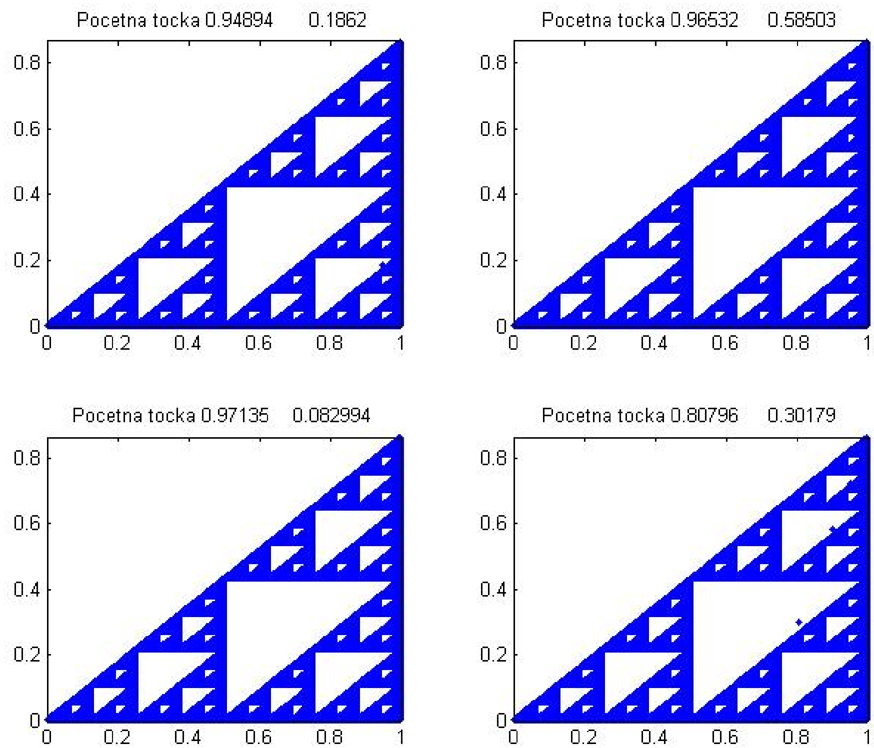
Slika 10. Treće pokretanje programa



Slika 11. Četvrto pokretanje programa

Ispis Matlab-ovog komandnog prozora (*command windova)* za četiri puta pokrenut program s pravokutnim trokutom s različitim slučajno odabranim početnim točkama, p_0.

Chaos game s pravokutnim trokutom
Broj pokretanja programa:4
Unesite željeni broj točaka:50000
Početna točka p0=(0.94894, 0.1862)
Početna točka p0=(0.965317, 0.585027)
Početna točka p0=(0.971353, 0.0829939)
Početna točka p0=(0.807965, 0.301792)



Slika 12. Ponašanje rješenja s 50001 točkom, za različite početne točke p_0

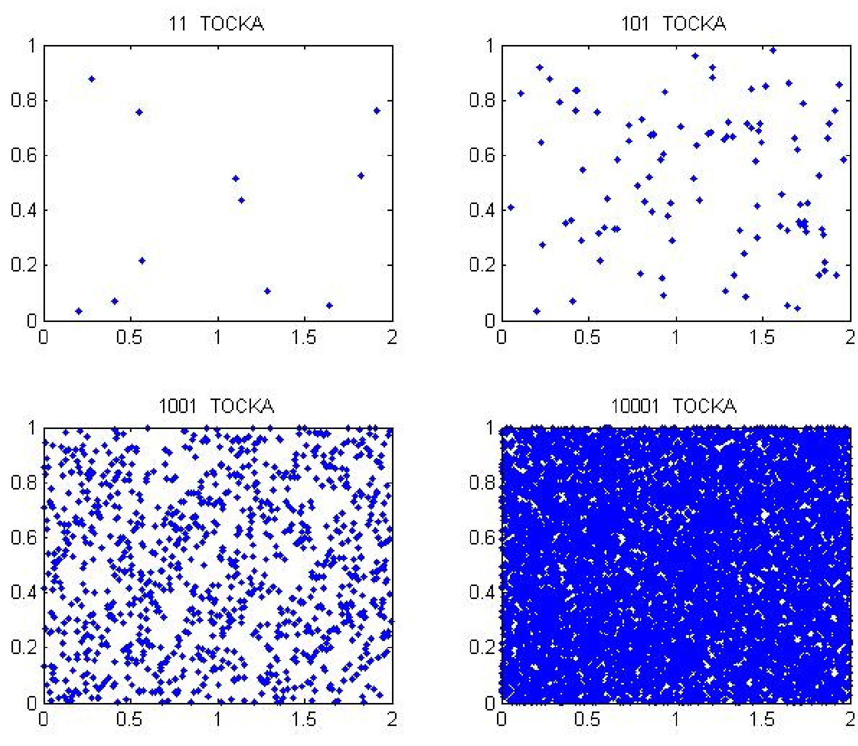
PRAVOKUTNIK

Zadan je pravokutnik ABCD te na slučajan (random) način biramo početnu (inicijalnu) točku p_0 iz unutrašnjosti pravokutnika. Na dalje, izabiremo na slučajan način jednu od točaka A, B, C, D s oznakom r(ABCD)=random{A,B,C,D}, te na slučajan način unutar trokuta još jednu točku koja je na pola puta između p_0 i r(ABCD), i tako dalje:

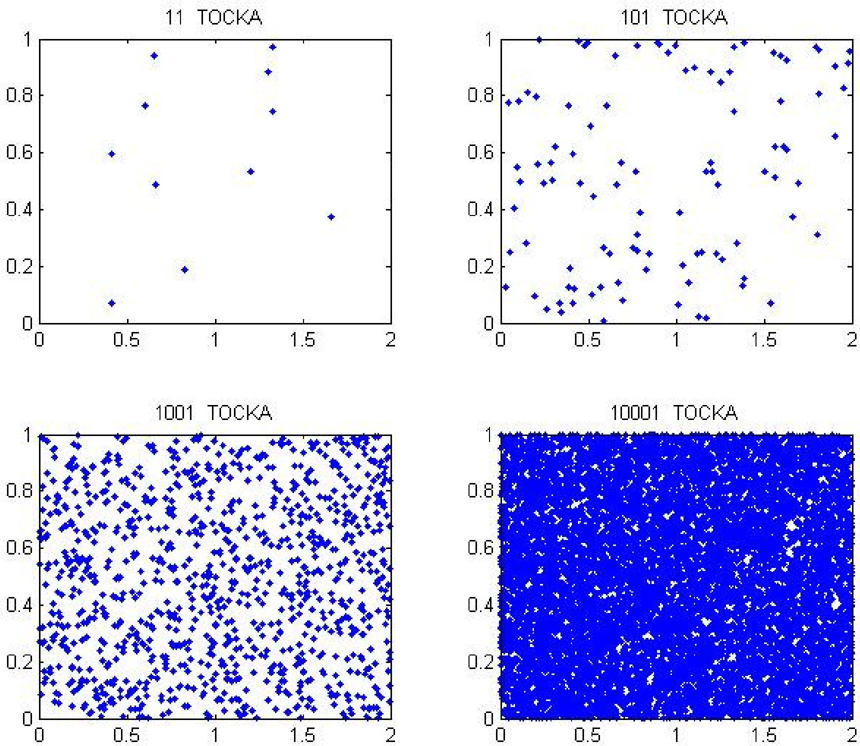
$$p_{n+1} = (p_n + \text{r(ABCD)})/2 \quad (3)$$

Ispis Matlab-ovog komandnog prozora (*command windova)* za dva puta pokrenut program s pravokutnim trokutom s istom slučajno odabranom početnom točkom, p_0 .

Chaos game s pravokutnikom
Broj pokretanja programa:2
Unesite željeni broj točaka:10000
Unesite broj točaka za prikaz prve slike: 10
Unesite broj točaka za prikaz druge slike: 100
Unesite broj točaka za prikaz treće slike: 1000
Početna točka p_0=(0.411602, 0.0719825)



Slika 13. Prvo pokretanje programa



Slika 14. Drugo pokretanje programa

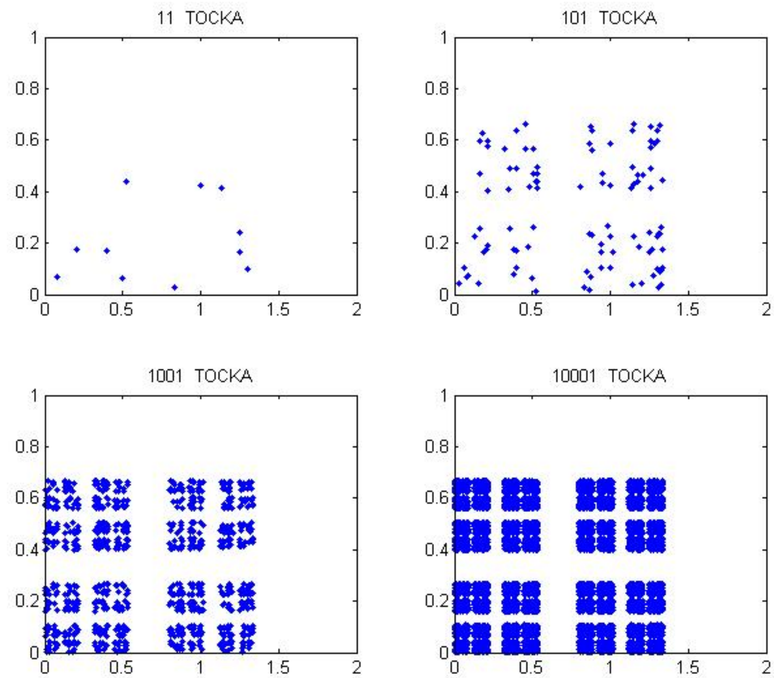
Ukoliko se primjeni ista analogija, opisana kod pravokutnika i jednadžba:

$p_{n+1} = (p_n + r(ABCD))/2.5$ (4)

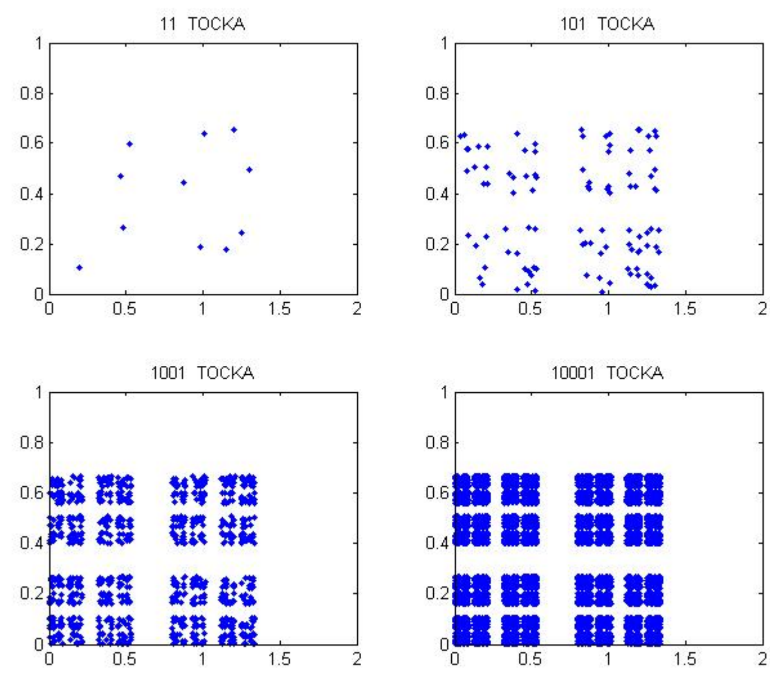
dobiva se sljedeće ponašanje rješenja:

Ispis Matlab-ovog komandnog prozora (*command windova)* za dva puta pokrenut program s pravokutnim trokutom s istom slučajno odabranom početnom točkom, p_0.

Chaos game s pravokutnikom
Broj pokretanja programa:2
Unesite željeni broj točaka:10000
Unesite broj točaka za prikaz prve slike: 10
Unesite broj točaka za prikaz druge slike: 100
Unesite broj točaka za prikaz treće slike: 1000
Početna točka p_0=(1.25467, 0.241718)



Slika 15. Prvo pokretanje programa



Slika 16. Drugo pokretanje programa

RASPRAVA:

Na slikama 3, 4, 5, 6 prikazana su ponašanja rješenja jednakostraničnog trokuta za istu početnu točku, a program je pokrenut četiri puta (proizvoljan odabir korisnika). Prilikom svakog novog pokretanja petlje u programu, početna točka ostaje ista, a generiranje točaka ABC je slučajan odabir, i različit je prilikom svakog novog pokretanja. Treba napomenuti kako je odabir početne točke unutar lika također slučajan odabir. Da je odabir točaka ABC stvarno slučajan i različit za svako pokretanje petlje, dokazuje gornja lijeva slika, na slikama 3, 4, 5, 6 koja prikazuje ponašanje rješenja s 51 točkom, i svako ponašanje rješenja je različito prilikom novog pokretanja. Naime, pri pokretanju programa zadano je (odabirom korisnika) da se nakon 50, 500 i 5000 i konačnog broja iteracija prikazuju ponašanja rješenja, te je toj vrijednosti dodana početna točka (50+1, 500+1, ...). Petlja je pokrenuta četiri puta s istom početnom točkom, kako bi se dokazalo da za neku slučajnu početnu točku unutar lika, sva ponašanja rješenja u limesu stvaraju uvijek isti fraktal. U ovom slučaju je to vidljivo s donjih desnih slika gdje se vidi da su sva ponašanja rješenja nakon 50001 ista (iako to u potpunosti nije točno). Ako bi se napravilo uvećanje tih slika, kako bi se provjerila sličnost trokuta samom sebi, svojstvo bi bilo zadovoljeno.

Na slici 7 je dano ponašanje rješenja nakon 50001 točke s različitim slučajno odabranim početnim točkama unutar lika. Slika dokazuje da neovisno o početnoj točki, sva ponašanja rješenja u nekom limesu stvaraju isti fraktal. Time je dokazano da fraktal ima sličnost samom sebi, i mogućnost oblikovanja iteracijom.

Slike 8, 9, 10, 11, 12 pokazuju ponašanje rješenja u pravokutnom trokutu, te da vrijede sve zakonitosti kao i kod jednakostraničnog trokuta.

Slike 13, 14 prikazuju ponašanje rješenja s pravokutnikom, slijedivši istu analogiju kao i za jednakostranični trokut i primjenivši jednadžbu (3) za iteracijski postupak. Vidljivo je da pravokutnik nema mogućnost oblikovanja iteracijom, i ne pokazuju sličnost samom sebi ovim iteracijskim postupkom. Ukoliko se primijeni jednadžba (4) za iteracijski postupak, pravokutnik pokazuje mogućnost oblikovanja iteracijom, ali ne po cijeloj svojoj površini, te zbog toga ne pokazuje sličnost samom sebi, jer u nekim dijelovima unutar lika to svojstvo nije zadovoljeno.

ZAKLJUČAK:

Na primjeru „Igre kaosa“ dobiveni su fraktali iz početnih likova jednakostraničnog i pravokutnog trokuta za sva ponašanja rješenja u limesu. Naime, svakim novim pokretanjem petlje u programu (uz uvjete da početna točka ostaje ista a generiranje točaka trokuta ABC je slučajan odabir i različit je prilikom svakog novog pokretanja) dokazali smo da za neku slučajnu početnu točku unutar zadanog lika sva ponašanja rješenja u limesu stvaraju uvijek isti fraktal.

Kada bi se napravilo uvećanje tih slika, kako bi se provjerila sličnost objekta samome sebi, osnovno svojstvo fraktala (samosličnost), bilo bi zadovoljeno.

Kako je za formiranje fraktala korišten iteracijski postupak, te postoji početni objekt (geometrijski lik) u koji se iterativno ugrađuju svojstva generatora, i drugo svojstvo fraktala je zadovoljeno.

Kod odabira pravokutnika za početni objekt nije postignuto oblikovanje iteracijom, te dobivene forme u limesu ne pokazuju svojstvo samosličnosti.

PRILOG:

ISPIS MATLAB-ovog KODA U *.m-fileu*

```
clc

clear all
close all

fprintf('Chaos game s jednakostraniènim trokutom\n')
g=input('\nBroj pokretanja programa:');
q=input('\nUnesite željeni broj toèaka:');
m=input('\nUnesite broj toèaka za prikaz prve slike: ');
m1=input('\nUnesite broj toèaka za prikaz druge slike: ');
m2=input('\nUnesite broj toèaka za prikaz treæe slike: ');

a=[0 0]; %1
xa=0;
ya=0;
b=[1 0];%2
xb=1;
yb=0;
c=[0.5 sqrt(3)/2]; %3
xc=0.5;
yc=sqrt(3)/2;

d=[a(1,1) b(1,1) c(1,1) a(1,1)];
e=[a(1,2) b(1,2) c(1,2) a(1,2)];

yy=2;
y1=1;
kri=yy-y1;
while kri>10^(-5)

a1 = 0; b1 = 1:1;
x1 = unifrnd(a1,b1);
a2 = 0; b2 = sqrt(3)/2:1;
y1 = unifrnd(a2,b2);

if y1 <=  1.732*x1 & y1 <=  1.732*(-x1)+1.732
    yy=y1;
    kri=yy-y1;
  end

end

fprintf('\nPoèetna toèka p0=( %g, %g)\n', x1, y1)
%p0=[x1 y1];
l=0;
for j=1:g
l=l+1;
```

```
clear X1 Y1 X2 Y2 X3 Y3
x=x1; y=y1;xp=x1; yp=y1;
n=rand(1,q);
w=length(n);
z=1;
figure
subplot(2,2,1)
%h=suptitle([int2str(l),'.  pokretanje programa']);
%set(h,'fontsize',8)
va1=zeros(1,1);va2=zeros(1,1);va3=zeros(1,1);va4=zeros(1,1);va5=zeros(1,1);va
6=zeros(1,1);
for i = 1:w
    b=n(1,z);
    if b<0.3334
        xna=(x+xa)./2;
        yna=(y+ya)./2;
        X1(1,z)=xna ;
        va1 = X1(X1~=0);
        Y1(1,z)=yna; va2 = Y1(Y1~=0);
        x=xna;
        y=yna;
    else if b>0.3333 & b<0.6667
            xnb=(x+xb)./2;
            ynb=(y+yb)./2;
            X2(1,z)=xnb; va3 = X2(X2~=0);
            Y2(1,z)=ynb; va4 = Y2(Y2~=0);
            x=xnb;
            y=ynb;
        else if b>0.6666
                xnc=(x+xc)./2;
                ync=(y+yc)./2;
                X3(1,z)=xnc; va5 = X3(X3~=0);
                Y3(1,z)=ync; va6 = Y3(Y3~=0);
                x=xnc;
                y=ync;
            end
        end
    end


if z>m-1 & z<m+1
    %figure
    plot(d,e, '-r', xp, yp, '.', va1,va2, '.',  va3,va4, '.',  va5,va6, '.',
'markersize',5,'Color','b')
    axis([0 1 0 sqrt(3)/2])
    title([int2str(m+1),'  TOCKA'])

%end
else if z>m1-1 & z<m1+1
    %figure
    subplot(2,2,2),plot(d,e, '-r', xp, yp, '.', va1,va2, '.',  va3,va4, '.',
va5,va6, '.', 'markersize',5,'Color','b')
    axis([0 1 0 sqrt(3)/2])
    title([int2str(m1+1),'  TOCKA'])
%end
    else if z>m2-1 & z<m2+1
```

```
    %figure
     subplot(2,2,3),plot(d,e, '-r', xp, yp, '.', va1,va2, '.',  va3,va4, '.',
va5,va6, '.', 'markersize',5,'Color','b')
     axis([0 1 0 sqrt(3)/2])
    title([int2str(m2+1),'  TOCKA'])
        end
    end
end
z=z+1;
end

%figure
subplot(2,2,4),plot(d,e, '-r', xp, yp, '.', va1,va2, '.',  va3,va4, '.',
va5,va6, '.', 'markersize',5,'Color','b')
axis([0 1 0 sqrt(3)/2])
title([int2str(q+1),'  TOCKA'])  %title(['Pocetna tocka ',(num2str(p0))]) %%
za razlièite poèetne toèke%%

end
```

LITERATURA:

M. Pašić, Uvod u matematičku teoriju kaosa za inženjere, Skripta FER, Zagreb, 2005. (5. poglavlje)

http://en.wikipedia.org/wiki/Fractal

http://www.fractovia.org/art/what/what_ing1.shtml

http://fractalfoundation.org