SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE
Diplomski studij EKOINŽENJERSTVO
**Kolegij: Uvod u matematičke metode u inženjerstvu**

# Lotka-Volterra model

## Grabežljivac i plijen

VODITELJI:
Dr.sc. Ivica Gusić, redovni profesor
Dr.sc. Miroslav Jerković, viši asistent

STUDENTI:
Ante Drozdek
Marko Nuskol
Tea Strmecky

Zagreb, Srpanj 2011.godine

SADRŽAJ

# 1. UVOD

Umberto D'Ancona (1896-1964), rođen u Rijeci (Fiume), sredinom dvadesetih godina prošlog stoljeća izučavao je veličinu populacije raznih vrsta riba u okolici mnogih jadranskih luka. Podaci u sljedećcoj tablici odnose se na luku Rijeka, a prikazuju postotak grabežljivaca (morski psi, itd.) u ukupnom izlovu dane godine.

| god. | 1914 | 1915 | 1916 | 1917 | 1918 | 1919 | 1920 | 1921 | 1922 | 1923 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| % | 11.9 | 21.4 | 22.1 | 21.2 | 36.4 | 27.3 | 16.0 | 15.9 | 14.8 | 10.7 |

Povećanje broja grabežljivca tijekom ratnih godina D'Ancona je objašnjavao time što je zbog smanjenog izlova za grabežljivce bilo više hrane pa se njihov broj povećavao. Međutim, nije znao objasniti fenomen zašto se u isto vrijeme smanjivao broj konzumne ribe kada nije bilo izlova. Zbog tog razloga D'Ancona se obratio poznatom talijanskom matematičaru Viti Volterra (1860-1940). Da bi objasnio navedeni fenomen, Volterra je 1926. godine podijelio ribe u grabežljivce (engl. predator) i plijen (engl. prey) te formulirao tzv. predator-prey matematički model. Nezavisno od Volterra, američki matematičar, fizičar i kemičar Alfred James Lotka (1880-1949) do istog modela došao je još 1920. godine, i to u primijenjenim istraživanjima iz kemije.

Populacije grabežljivca i plijena mogu utjecati jedni drugima na evoluciju. Ona životinjska vrsta u prirodi koja ima bolje sposobnosti pronalaženja i hvatanja plijena bit će definirana kao grabežljivac, dok će slabija vrsta koja ima potrebu samo braniti se, tj. ne biti pojedena, biti definirana kao plijen. Osobine tih dviju vrsta nisu kompatibilne što utječe na dinamiku populacija grabežljivca i plijena. Dinamički odnos između grabežljivca i plijena je jedna od dominantnih tema ekologije.

Alfred James Lotka (1880 - 1949, SAD, kemičar, demograf, ekolog i matematičar), rođen je u Lavovu (Lemberg). Došao je u Sjedinjene Američke Države 1902. i napisao niz teorijskih članaka o kemijskim oscilacijama u ranim desetljećima dvadesetog stoljeća, a autor je knjige o teorijskoj biologiji (1925). Poslije je napustio (akademsku) znanost i proveo većinu svog radnog vijeka u osiguravajućem društvu (Metropolitan Life); postao je i predsjednik PAA (the Population Association of America).

Vito Volterra (3. svibnja 1860 – 11. listopada 1940), talijanski, matematičar i fizičar, najpoznatiji za doprinos u matematičkoj biologiji, rođen je u Anconi, u vrlo siromašnoj obitelji. Volterra je već u ranoj dobi pokazao znanje iz matematike. Pohađao je Sveučilište u Pisi. Njegov rad je sažet u knjizi Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations (1930). Nakon Prvog svjetskog rata, Volterra je okrenuo pozornost na primjene matematičkih ideja u biologiji, uglavnom što je ponovio i razvio rad Pierre François Verhulsta. Najpoznatiji rezultat tog razdoblja je Lotka-Volterra model. Godine 1922, pridružio se protivnicima fašističkog režima Benita Mussolinija, a 1931 je odbio obvezati se na prisegu odanosti. Bio je prisiljen dati ostavku na sveučilištu i izgubio je članstvo znanstvenih akademija, a tijekom sljedećih godina, živio je uglavnom u inozemstvu. Vratio se u Rim prije svoje smrti.

# 2. LOTKA – VOLTERRA MODEL

## 2.1. Lotka – Volterra jednadžbe

Lotka-Volterra jednadžbe također su poznate kao jednadžbe grabežljivac-plijen. To su nelinearne diferencijalne jednadžbe prvoga reda koje se često koriste za opisivanje dinamike bioloških sustava u kojima djeluju međusobno dvije vrste, jedan grabežljivac i jedan plijen. Neka u određenom staništu obitavaju samo jedna vrsta grabežljivca i samo jedna vrsta plijena; neka x(t) označava veličinu populacije plijena, a y(t) veličinu populacije grabežljivca u trenutku t. Svi modeli temelje se na ideji da su stope rasta populacija grabežljivca i plijena funkcije veličine obaju populacija:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x,y)\\ \frac{dy}{dt} &= g(x,y).\end{aligned}}$$

Prema Volterru rast tih rivalskih populacija opisan je sustavom diferencijalnih jednadžbi:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy\\ \frac{dy}{dt} &= -\gamma y + \delta xy.\end{aligned}}$$

Mi ćemo gledati lisice i zečeve:

* y – broj grabežljivaca ( lisica );
* x - broj plijena ( zec );
* dy/ dt i dx/dt – brzina rasta dviju populacija s vremenom;
* t - vrijeme, i
* α, β, γ i δ - parametri koji predstavljaju interakciju dviju vrsta (uvijek su pozitivni)

### 2.1.1. Fizikalno značenje jednadžbi

Lotka-Volterra model zasnovan je na temelju pretpostavki o okolini i evoluciji populacije garbežljivca i plijena:

1. Populacija plijena pronalazi dovoljno hrane u svakom trenutku.
2. Zalihe hrane za predatora ovise isključivo o populaciji plijena.
3. Stopa promjene populacije proporcionalna je njenoj veličini.
4. Tijekom procesa, okoliš se ne mijenja u korist jedne vrste i genetska prilagodba je spora.

### 2.1.2. Plijen

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy}$$

Pojasnimo značenje parametara:

• α je stopa rasta populacije plijena ako nema grabežljivaca. Drugim riječima, Volterra je pretpostavio da za plijen hrane ima u izobilju, te da je njihovo stanište dovoljno veliko da u odsutnosti grabežljivca njihova populacija može neograničeno rasti po Malthusovom zakonu

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x$$

• βy je stopa mortaliteta populacije plijena uzrokovana grabežljivosti - plijen je pojeden od grabežljivca. Prema Volterru broj susreta u jedinici vremena između grabežljivca i plijena proporcionalan je produktu xy. Samo jedan dio tih susreta će završiti predacijom.
Parametar β predstavlja *efikasnost predacije*.

### 2.1.3. Grabežljivac

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy}$$

Pojasnimo značenje parametara:

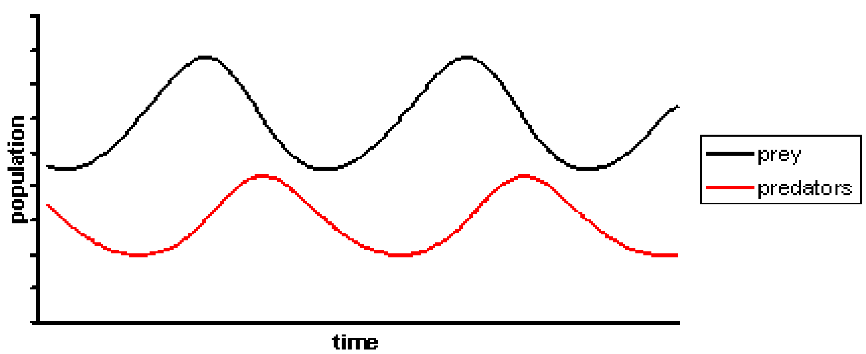
• Stopa rasta populacije grabežljivca proporcionalna je broju uhvaćenog plijena x. Međutim, grabežljivac ne može svu energiju sadržanu u plijenu upotrijebiti za svoj rast. Zbog toga je efikasnost, kojom grabežljivac konzumiranu hranu pretvara u populacijski rast, prikazana koeficijentom $\boldsymbol{\delta}$.

• $\boldsymbol{\gamma}$ je stopa mortaliteta populacije grabežljivca čiji je uzrok izvan sustava (nije ovisna o broju jedinki plijena) već predstavlja stopu umiranja zbog prirodne što dovodi do eksponencijalnog pada grabežljivca.

Uočimo da desne strane tih jednadžbi ne ovise eksplicitno o vremenu t. Takvi se sustavi diferencijalnih jednadžbi zovu *autonomni* ili *stacionarni*.

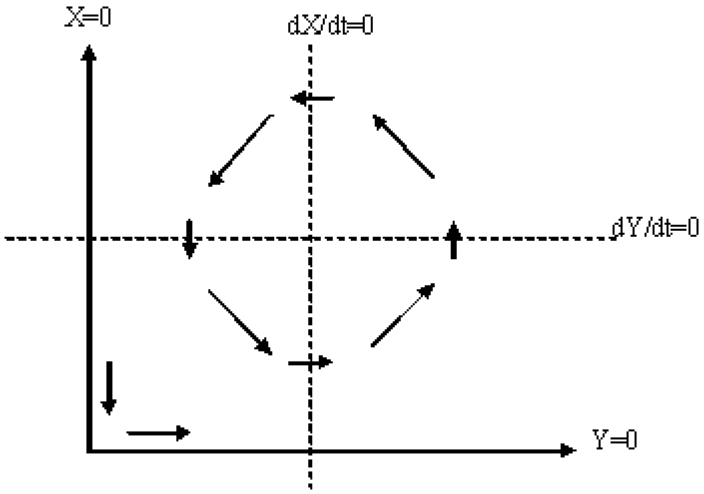
## 2.2. Rješenja jednadžbe

Jednadžbe imaju periodna rješenja koja nemaju jednostavni izraz u smislu uobičajenih trigonometrijskih funkcija. Međutim, linearizacija jednadžbi daje rješenja slična jednostavnom harmonijskom gibanju sa populacijom grabežljivca koja prate populaciju plijena za 90° (slika 1)




Slika 1. Promjena populacija grabežljivca i plijena u vremenu

### 2.2.1. Vektorsko polje




Slika 2. Skica vektorskog polja Lotka – Volterra modela

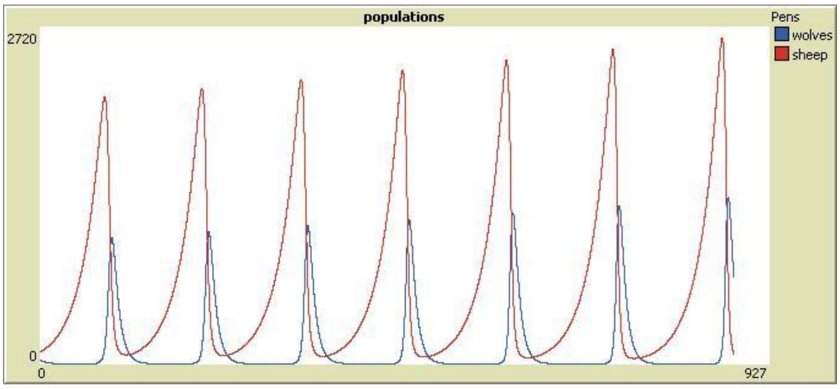
Lotka Volterr-a model ima dvije fiskne točke:

- Ishodište (0,0)
- γ/δ, α/β (konstantna populacija plijena ovisi samo o parametrima usko povezani sa grabežljivcima iobrnuto)

Nakon Jacobijeve analize može se dokazati da ta fiksna točka (0,0) je točka sedla, a γ/δ, α/β je centar (to je vektorsko polje koje rotira oko točke bez ikakvog privlačenja ili odbijanja)

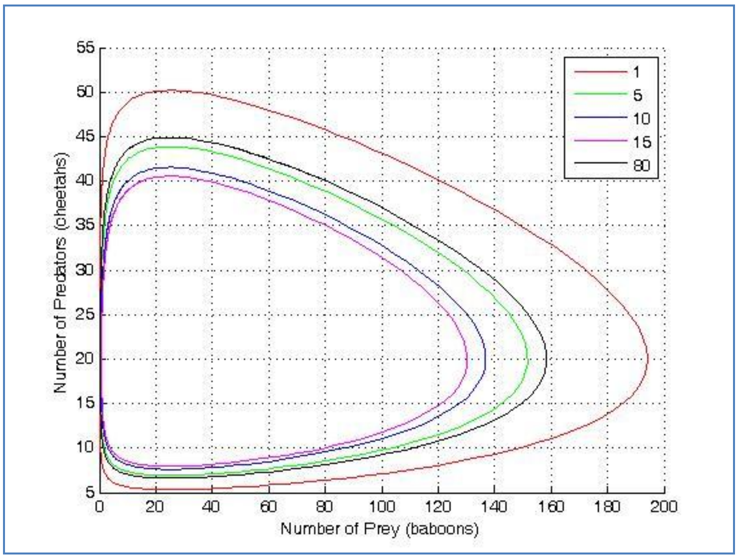
## 2.3. Primjer problema

Pretpostavimo da postoje dvije vrste životinja, ovce (plijen) i vuk (grabežljivac). Ako su početni uvjeti 100 ovaca i 40 vukova, može se prikazati napredak dvije vrste u nekom određenom vremenu. Vremenski interval je proizvoljan.




Slika 5. Promjena populacija u vremenu na primjeru ovca (crvena boja) i vukova (plava boja)

Također se mogu prikazati parcijalna rješenja koja odgovaraju prirodnoj oscilaciji populacija dviju vrsta. U ovom slučaju početni uvjeti su: pavijan 80 i gepard 40. Ovo rješenje je u stanju dinamičke ravnoteže. U bilo kojem vremenu ove faze, sustav se nalazi negdje unutar eliptičnih rješenja (koje su prikazane krivuljama). Ne postoje posebni početni uvjeti unutar granica ciklusa, a time niti stabilno rješenje, međutim, uvijek se postiže neki konačni rezultat.




Slika 6. Parcijalna rješenja prirodne oscilacije populacija grabežljivca(geparda) i plijena (pavijana)

Ovi grafovi jasno pokazuju ozbiljan problem za ovaj biološki model: u svakom ciklusu, populacija plijena se smanjuje na iznimno male brojeve bez obzira na njihov oporavak, dok populacija grabežljivca ostaje postojana i kod najnižeg broja populacije plijena. Ipak, sa sve većim izumiranjem plijena, jednom kao posljedica treba doći i do značajnog smanjenja populacije grabežljivca.

## 2.4. Dinamika sustava

U modelu, grabežljivac napreduje kada ima plijena u izobilju, ali nakon određenog vremena kada pojede sav plijen, doći će do smanjenja populacije grabežljivaca, a zatim i njegovog izumiranja. Kada je populacija grabežljivaca niska, populacija plijena će se ponovno povećati. Ta dinamika opisana je kontinuiranim ciklusom rasta i pada.

## 2.5. Ravnoteža populacije

Ravnoteža populacije u modelu se postiže kada obje populacije miruju (ne mijenjaju se) odnosno kada su obje derivacije jednake 0.

$$x(\alpha - \beta y) = 0$$

$$-y(\gamma - \delta x) = 0$$

Rješavanjem navedenih diferencijalnih jednadžbi dolazimo do ovih rješenja:

$$\{y = 0, x = 0\}$$

i

$$\left\{y = \frac{\alpha}{\beta}, x = \frac{\gamma}{\delta}\right\},$$

dakle, postoje dvije ravnoteže.

Prvo rješenje predstavlja izumiranje obje vrste, što znači da obje populacije ostaju jednake 0. Drugo rješenje predstavlja fiksnu točku u kojoj obje populacije imaju svoju trenutnu vrijednost, različitu od nule. Razina populacije pri kojima se postižu navedene ravnoteže ovisi o vrijednostima parametara α, β, γ, δ.

Postoje rješenja sustava oblika

$$K = y^{\alpha} e^{-\beta y} x^{\gamma} e^{-\delta x},$$

gdje je K = konst., Pripadne krivulje su  zatvorene putanje oko fiksne točke. Prema tome, razina ciklusa populacije grabežljivca i plijena osciliraju oko ove fiksne točke.  Najveća vrijednost konstante K može se dobiti rješavanjem problema optimizacije

$$y^{\alpha} e^{-\beta y} x^{\gamma} e^{-\delta x} = \frac{y^{\alpha} x^{\gamma}}{e^{\delta x + \beta y}} \longrightarrow \max_{x,y>0}.$$

Maksimalna vrijednost K je postignuta u stacionarnoj točki $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$, i to je dano slijedećom jednadžbom

$$K^{*} = \left(\frac{\alpha}{\beta e}\right)^{\alpha} \left(\frac{\gamma}{\delta e}\right)^{\gamma},$$

gdje je e Eulerov broj.

*[Primjer ovog slučaja naveden je u seminarskom radu „Lotka – Volterra model“, Iva Kovačić i Sonja Omerzo, lipanj 2010.]*

# 3. PRIMJERI LOTKA VOLTERRA MODELA U MATHEMATICI

Model Lotka – Volterra u Mathematici može se prikazati:

<u>Plijen</u>

```
pt=p'[t]==rp*p[t]-a*g[t]*p[t];
```

<u>Grabežljivac</u>

```
gt=g'[t]==rg*p[t]*g[t]-b*g[t];
```

Prilikom rješavanja sustava Lotke – Volterra modela u Mathematici za primjer plijena smo uzeli zeca, a za grabežljivca lisicu.

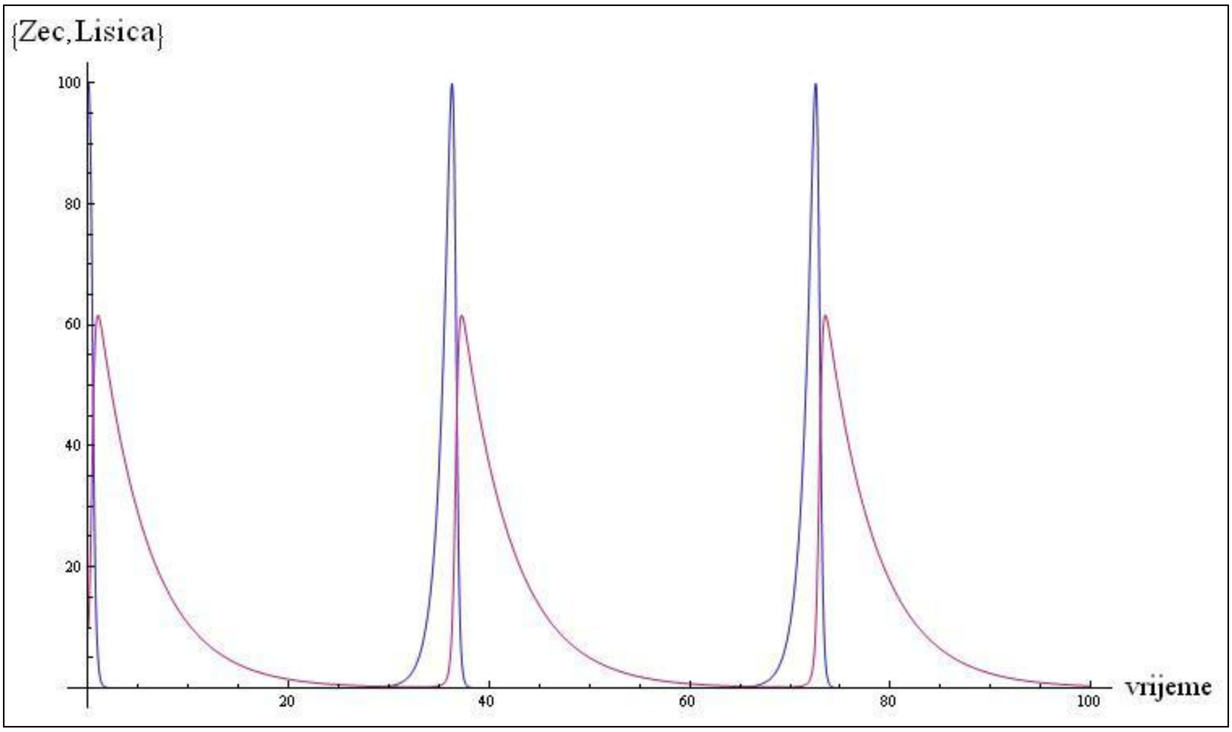
* pt – promjena populacije plijena (zec)
* gt –promjena populacije grabežljivca (lisica)
* p[t] – „gustoća“ populacije zečeva
* g[t] – „gustoća“ populacije lisica
* rp – stopa rasta jedinke zečeva
* rg – stopa rasta jedinke lisica
* a – stopa napada lisice
* b – stopa umiranja lisica bez zečeva

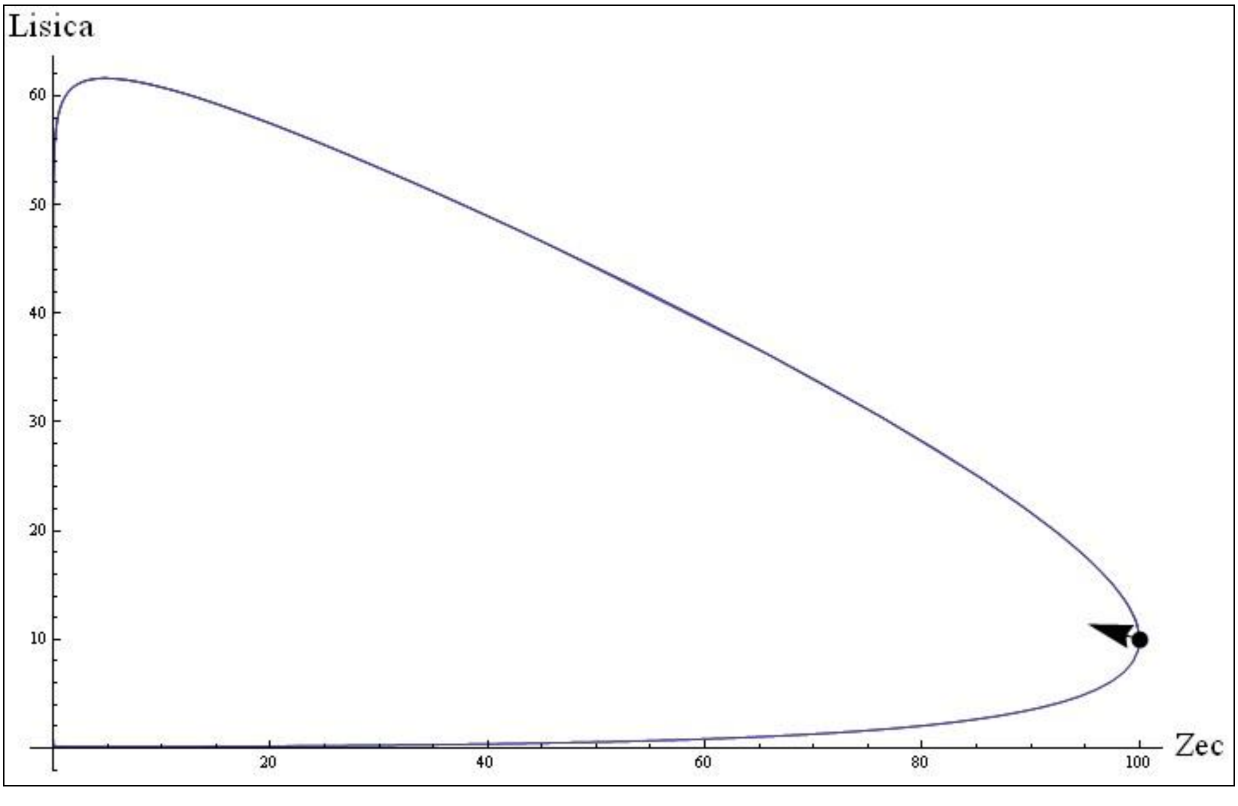
<u>Početni parametri u našem modelu:</u>

- **rp** (stopa rasta plijena –zečeva) = **1**
- **rg** (stopa rasta grabežljivca – lisica) = **0,0415**
- **a** (stopa napada grabežljivca – lisica) = **0,1**
- **b** (stopa umiranja grabežljivca – lisica bez plijena) = **0,2**
- **t** (vrijeme) = **100**
- **p0** (početna točka plijena - zečeva) = **100**
- **g0** (početna točka grabežljivca – lisica) = **10**

## *Mathematica*

```
rp:=1
rg:=0.0415

a:=0.1
b:=0.2

p0:=100
g0:=10
pocetnatocka:={p0,g0}

pdiff0:=rp*p0-a*g0*p0
gdiff0:=rg*p0*g0-b*g0

norma:=Sqrt[(pdiff0-p0)^2+(gdiff0-g0)^2]
norma

pt=p'[t]==rp*p[t]-a*g[t]*p[t];
gt=g'[t]==rg*p[t]*g[t]-b*g[t];
sustav:={pt,gt}
cijelisustav:=Join[sustav,{p[0]==p0,g[0]==g0}]
pocetnizec=NDSolve[cijelisustav,{p,g},{t,0,100}]
krivulje:=Flatten[pocetnizec]
zec:=p[t]/.krivulje[[1]]
lisica:=g[t]/.krivulje[[2]]

Show[Plot[{zec,lisica},{t,0,100},PlotRange→All,AxesLabel→Tradi
tionalForm/@{Style[vrijeme,18],{Style[Zec,20],Style[Lisica,20]
}},AxesOrigin→{0,0}]]

Show[ParametricPlot[{{zec,lisica}},{t,0,100},PlotRange→All,Axe
sLabel→TraditionalForm/@{Style[Zec,20],Style[Lisica,20]},AxesO
rigin→{0,0}],Graphics[{PointSize[0.015],Point[pocetnatocka]}],
Graphics[Arrow[{{p0,g0},{p0+5*(pdiff0-p0)/norma,g0+5*(gdiff0-
g0)/norma}}]]]

{{p→InterpolatingFunction[{{0.,100.}},<>],g→InterpolatingFunct
ion[{{0.,100.}},<>]}}
```




Slika 7a i 7b. Grafički prikazi modela u Mathematici za promjenu populacija lisica i zečeva za početne uvjete

<u>Opis slike 7a</u>:

Početna populacija zečeva je 100, a lisica 10. Na slici je prikazana njihova međusobna ovisnost preko navedenih nelinearnih diferencijalnih jednadžbi. Plava linija prikazuje zečeve a roza lisice.

U vremenskom periodu od 100, populacija zečeva je veća od populacije lisica zbog velikog stupnja rasta zečeva (rp = 1)  u odnosu na stopu rasta lisica (rg = 0.0415).

<u>Opis slike 7b:</u>

Ova slika prikazuje međusobnu ovisnost populacije lisica(y-os) i zečeva (x-os).

Točka prikazuje početnu populaciju zečeva (100) i lisica (10). Vektor prikazuje brzinu rasta u vremenu 0. Kako raste populacija lisica tako se smanjuje populacija zečeva (grabežljivac jede plijen).

Kada se populacija zečeva smanji do krajnosti, tako se smanji i populacija lisica što zatim ponovno dovodi do porasta populacije zečeva.

## 3.1 Promjena stope rasta grabežljivaca (lisica) konzumiranjem plijena (zečeva) → rg

Uzimamo početne parametre rp, a, b, p0 i g0 a mijenjamo stopu rasta lisica **rg**.

Početna stopa rasta lisica **rg = 0.0415** koja se povećava na **rg = 0.1115** i smanjuje na **rg = 0.0115**

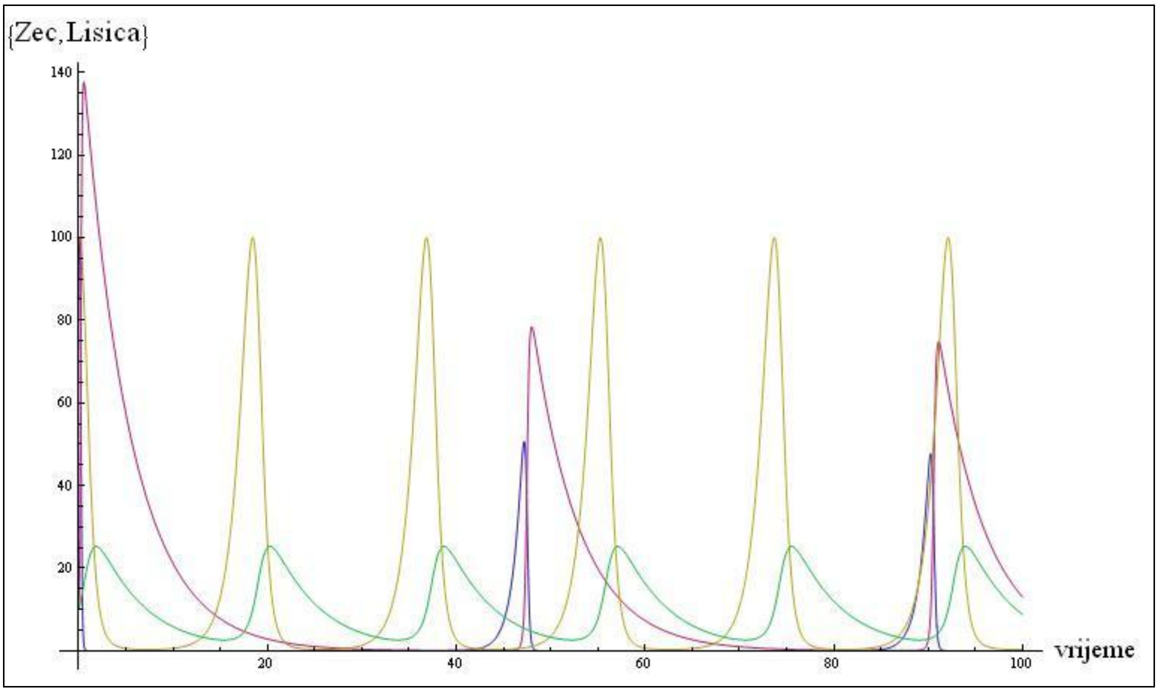
- <u>Povećanje rg parametra</u>

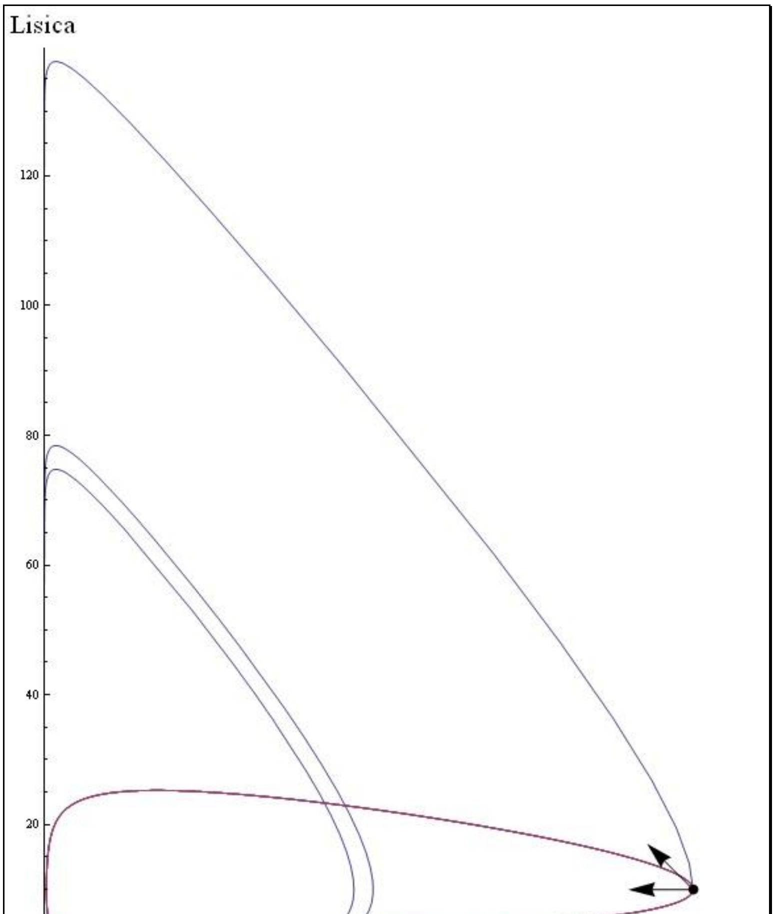
```
rp:=1
rg:=0.1115
rg1:=0.0115
a:=0.1
b:=0.2
p0:=100
g0:=10

pdiff0:=rp*p0-a*g0*p0
gdiff0:=rg*p0*g0-b*g0
norma:=Sqrt[(pdiff0-p0)^2+(gdiff0-g0)^2]
```

```
pdiff01:=rp*p0-a*g0*p0
gdiff01:=rg1*p0*g0-b*g0
norma1:=Sqrt[(pdiff01-p0)^2+(gdiff01-g0)^2]

pt=p'[t]==rp*p[t]-a*g[t]*p[t];
gt=g'[t]==rg*p[t]*g[t]-b*g[t];
sustav:={pt,gt}
pocetnisustav:=sustav/.{rp→1,rg→0.1115,a→0.1,b→0.2}
cijelisustav:=Join[pocetnisustav,{p[0]==100,g[0]==10}]
pocetnizec=NDSolve[cijelisustav,{p,g},{t,0,100}]
krivulje:=Flatten[pocetnizec]
zec:=p[t]/.krivulje[[1]]
lisica:=g[t]/.krivulje[[2]]
```

- <u>Smanjenje rg parametra</u>

```
pocetnisustav1:=sustav/.{rp→1,rg→0.0115,a→0.1,b→0.2}
cijelisustav1:=Join[pocetnisustav1, {p[0]== 100,g[0]== 10}]
pocetnizec1=NDSolve[cijelisustav1,{p,g},{t,0,100}]
krivulje1:=Flatten[pocetnizec1]
zec1:=p[t]/.krivulje1[[1]]
lisica1:=g[t]/.krivulje1[[2]]

pocetnatocka:={100,10}

Show[Plot[{{zec,lisica},{zec1,lisica1}},{t,0,100},
AxesLabel→TraditionalForm/@{Style[vrijeme,18],{Style[Zec,20],
Style[Lisica,20]}},AxesOrigin→{0,0},PlotRange→All]]

Show[ParametricPlot[{{zec,lisica},{zec1,lisica1}},{t,0,100},
PlotRange→All,AxesLabel→TraditionalForm/@{Style[Zec,20],
Style[Lisica,20]},AxesOrigin→{0,0}],
Graphics[{PointSize[0.015],Point[pocetnatocka]}],
 Graphics[Arrow[{{p0,g0},{p0+10*(pdiff0-
p0)/norma,g0+10*(gdiff0-g0)/norma}}]],
 Graphics[Arrow[{{p0,g0},{p0+10*(pdiff01-
p0)/norma1,g0+10*(gdiff01-g0)/norma1}}]]]

{{p→InterpolatingFunction[{{0.,100.}},<>],g→InterpolatingFunct
ion[{{0.,100.}},<>]}}

{{p→InterpolatingFunction[{{0.,100.}},<>],g→InterpolatingFunct
ion[{{0.,100.}},<>]}}
```




Slika 8a i 8b. Grafički prikazi modela u Mathematici za promjenu stope rasta grabežljivaca (lisice)

Opis slike 8a.

Plava(zec) i roza(lisica) linija prikazuju povećavanje parametra rg, dok tamno žuta(zec) i zelena(lisica) linija prikazuju smanjenje parametra rg.
Povećanjem stope rasta lisica smanjenja je početna populacija zečeva u usporedbi kada je smanjena stopa rasta lisica gdje dolazi do povećanja populacije zečeva.

Opis slike 8b.

Plava linija predstavlja povećanje stope rasta lisica a roza smanjenje stope rasta lisica.

Kod porasta stope rasta lisica usporedno dolazi do pada populacije zečeva i ujedno i porasta populacije lisica. Tijekom sljedećih 2 ciklusa ukupna populacija lisica i zečeva pada!
Kod smanjenja stope rasta lisica, populacija zečeva je imala dosta vremena da naraste te tek oko vrijednosti 100 dolazi do usporenog porasta populacije lisica i brzog pada zečeva.
[*Tu moramo imati u obzir da je stopa rasta zečeva velika rp = 1*]

## 3.2 Promjena stope rasta plijena (zečeva) → rp

Uzimamo početne parametre rg, a, b, p0 i g0 a mijenjamo stopu rasta zečeva **rp**.
Početna stopa rasta zečeva **rp = 1** koja se povećava na **rp = 1.2** i smanjuje na **rp = 0.5**

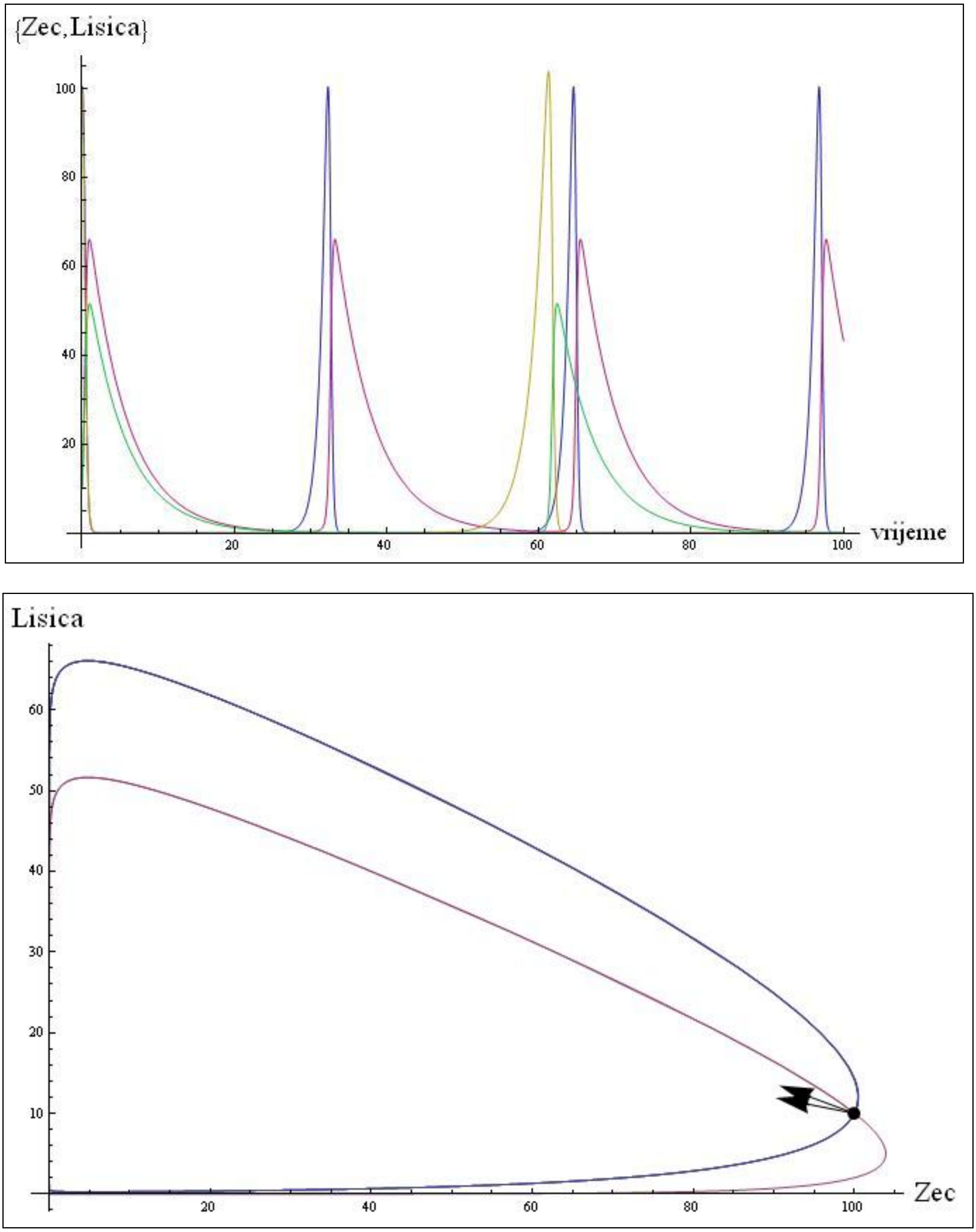
- Povećanje rp parametra

```
rp1:=1.2
rp2:=0.5
rg:=0.0415
a:=0.1
b:=0.2
p0:=100
g0:=10

pdiff0:=rp1*p0-a*g0*p0
gdiff0:=rg*p0*g0-b*g0
norma:=Sqrt[(pdiff0-p0)^2+(gdiff0-g0)^2]

pdiff01:=rp2*p0-a*g0*p0
```

```
gdiff01:=rg*p0*g0-b*g0
norma1:=Sqrt[(pdiff01-p0)^2+(gdiff01-g0)^2]

pt=p'[t]==rp*p[t]-a*g[t]*p[t];
gt=g'[t]==rg*p[t]*g[t]-b*g[t];
sustav:={pt,gt}

pocetnisustav:=sustav/.{rp→1.2,rg→0.0415,a→0.1,b→0.2}
cijelisustav:=Join[pocetnisustav,{p[0]==100,g[0]==10}]
pocetnizec=NDSolve[cijelisustav,{p,g},{t,0,100}]
krivulje:=Flatten[pocetnizec]
zec:=p[t]/.krivulje[[1]]
lisica:=g[t]/.krivulje[[2]]
```

- <u>Smanjenje rp parametra</u>

```
pocetnisustav1:=sustav/.{rp→0.5,rg→0.0415,a→0.1,b→0.2}
cijelisustav1:=Join[pocetnisustav1, {p[0]== 100,g[0]== 10}]
pocetnizec1=NDSolve[cijelisustav1,{p,g},{t,0,100}]
krivulje1:=Flatten[pocetnizec1]
zec1:=p[t]/.krivulje1[[1]]
lisica1:=g[t]/.krivulje1[[2]]

pocetnatocka:={100,10}

Show[Plot[{{zec,lisica},{zec1,lisica1}},{t,0,100},
AxesLabel→TraditionalForm/@{Style[vrijeme,18],{Style[Zec,20],
Style[Lisica,20]}},AxesOrigin→{0,0},PlotRange→All]]

Show[ParametricPlot[{{zec,lisica},{zec1,lisica1}},{t,0,100},
PlotRange→All,AxesLabel→TraditionalForm/@{Style[Zec,20],
Style[Lisica,20]},AxesOrigin→{0,0}],
Graphics[{PointSize[0.015],Point[pocetnatocka]}],
 Graphics[Arrow[{{p0,g0},{p0+10*(pdiff0-
p0)/norma,g0+10*(gdiff0-g0)/norma}}]],
 Graphics[Arrow[{{p0,g0},{p0+10*(pdiff01-
p0)/norma1,g0+10*(gdiff01-g0)/norma1}}]]]

{{p→InterpolatingFunction[{{0.,100.}},<>],g→InterpolatingFunct
ion[{{0.,100.}},<>]}}

{{p→InterpolatingFunction[{{0.,100.}},<>],g→InterpolatingFunct
ion[{{0.,100.}},<>]}}
```




Slika 9a i 9b. Grafički prikazi modela u Mathematici za promjenu stope rasta plijena (zečeva)

Opis slike 9a:

Plava(zec) i roza(lisica) linija prikazuju povećavanje parametra rp, dok tamno žuta(zec) i zelena(lisica) linija prikazuju smanjenje parametra rp.

Povećanjem stope rasta zečeva na rp = 1.2 dolazi do porasta populacije zečeva (plava linija)

Smanjenjem stope rasta zečeva na rp = 0.5 populacija zečeva je na početku mala te ne osigurava dovoljnu hranu lisicama koje umiru (smanjenje lisica).
Kasnije dolazi do naglog rasta populacije zečeva (tamno žuta linija) (ali samo u jednom ciklusa u vremenu 100)

Opis slike 9b:

Povećanjem stope rasta zečeva nastaje veća populacija lisica, dok smanjenjem stope rasta zečeva nastaje manja populacija lisica sa malo većom populacijom zečeva.

Povećanjem stope rasta zečeva imamo manje zečeva (plava linija) zbog većeg konzumiranja od strane lisica u usporedbi kada je stopa rasta zečeva manja i imamo malo veću populaciju zečeva (roza linija) zbog dužeg vremena potrebnog za rast zečeva.

## 3.3 Promjena stope napada grabežljivca (lisica) → a

Uzimamo početne parametre rg, rp, b, p0 i g0, a mijenjamo stopu napada lisica **a**.

Početna stopa napada lisica **a** = **0.1** koja se povećava na **a** = **0.2** i smanjuje na **a** = **0.05**

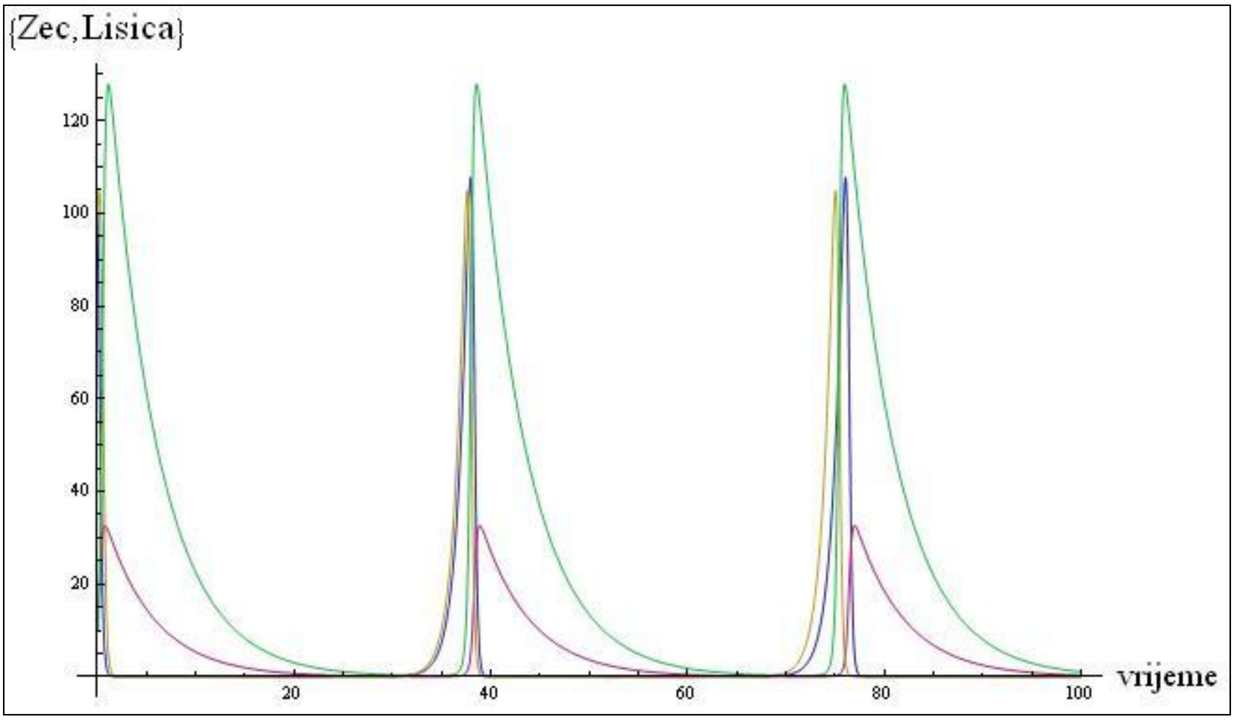
- Povećanje parametra a

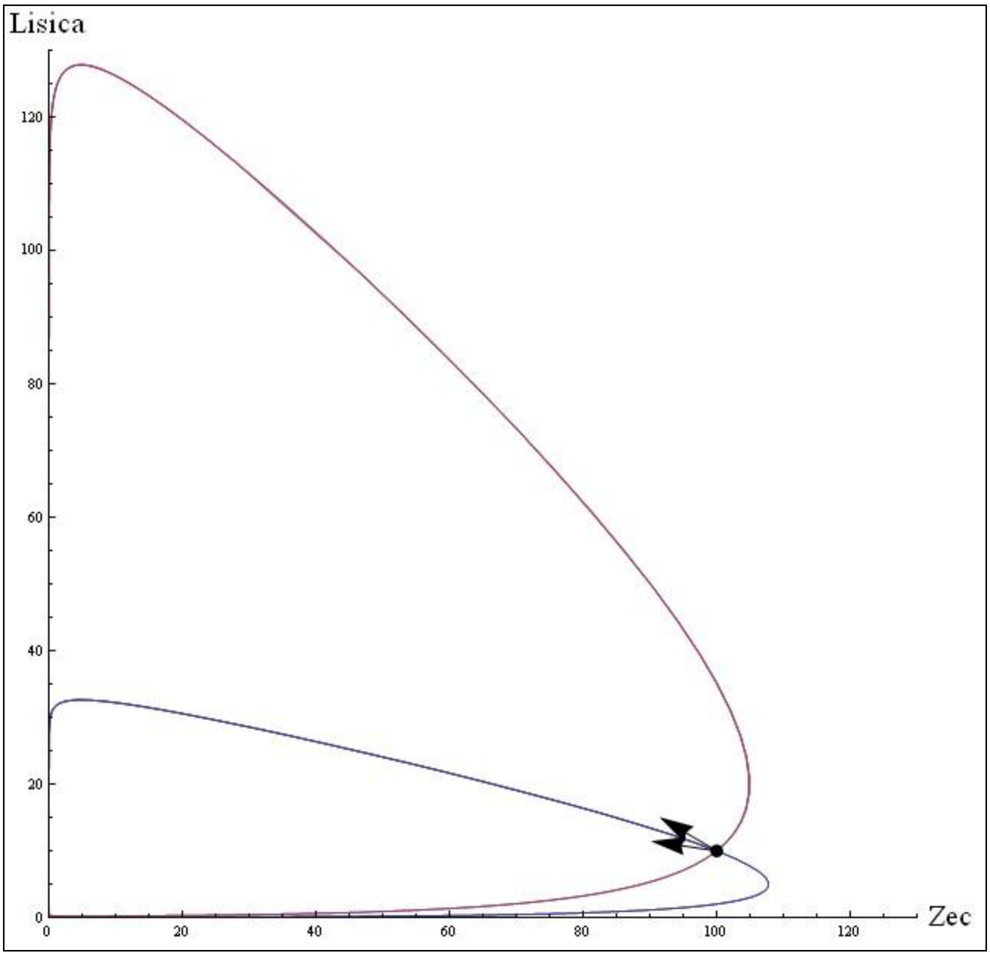
```
rp:=1
rg:=0.0415
a1:=0.2
a2:=0.05
b:=0.2
p0:=100
g0:=10

pdiff0:=rp*p0-a1*g0*p0
gdiff0:=rg*p0*g0-b*g0
norma:=Sqrt[(pdiff0-p0)^2+(gdiff0-g0)^2]

pdiff01:=rp*p0-a2*g0*p0
gdiff01:=rg*p0*g0-b*g0
norma1:=Sqrt[(pdiff01-p0)^2+(gdiff01-g0)^2]

pt=p'[t]==rp*p[t]-a*g[t]*p[t];
```

```
gt=g'[t]==rg*p[t]*g[t]-b*g[t];
sustav:={pt,gt}

pocetnisustav:=sustav/.{rp→1,rg→0.0415,a→0.2,b→0.2}
cijelisustav:=Join[pocetnisustav,{p[0]==100,g[0]==10}]
pocetnizec=NDSolve[cijelisustav,{p,g},{t,0,100}]
krivulje:=Flatten[pocetnizec]
zec:=p[t]/.krivulje[[1]]
lisica:=g[t]/.krivulje[[2]]
```

- <u>Smanjenje parametra a</u>

```
pocetnisustav1:=sustav/.{rp→1,rg→0.0415,a→0.05,b→0.2}
cijelisustav1:=Join[pocetnisustav1, {p[0]== 100,g[0]== 10}]
pocetnizec1=NDSolve[cijelisustav1,{p,g},{t,0,100}]
krivulje1:=Flatten[pocetnizec1]
zec1:=p[t]/.krivulje1[[1]]
lisica1:=g[t]/.krivulje1[[2]]

pocetnatocka:={100,10}

Show[Plot[{{zec,lisica},{zec1,lisica1}},{t,0,100},
AxesLabel→TraditionalForm/@{Style[vrijeme,18],{Style[Zec,20],S
tyle[Lisica,20]}},AxesOrigin→{0,0},PlotRange→All]]

Show[ParametricPlot[{{zec,lisica},{zec1,lisica1}},{t,0,100},
PlotRange→{{0,130},{0,130}},AxesLabel→TraditionalForm/@{Style[
Zec,20],Style[Lisica,20]},AxesOrigin→{0,0}],
Graphics[{PointSize[0.015],Point[pocetnatocka]}],
  Graphics[Arrow[{{p0,g0},{p0+10*(pdiff0-
p0)/norma,g0+10*(gdiff0-g0)/norma}}]],
 Graphics[Arrow[{{p0,g0},{p0+10*(pdiff01-
p0)/norma1,g0+10*(gdiff01-g0)/norma1}}]]]

{{p→InterpolatingFunction[{{0.,100.}},<>],g→InterpolatingFunct
ion[{{0.,100.}},<>]}}

{{p→InterpolatingFunction[{{0.,100.}},<>],g→InterpolatingFunct
ion[{{0.,100.}},<>]}}
```




Slika 10a i 10b. Grafički prikazi modela u Mathematici za promjenu stope napada plijena (lisica)

Opis slike 10a:

Kod povećanja stope napada lisica populacija zečeva (plava linija) je još i dalje veća od populacije lisica (roza linija), zbog velike stope rasta zečeva (rp = 1).

Kod smanjenja stope napada lisica, lisice prvo čekaju da im se njihova populacija lisica malo poveća (jako sporo) te onda kreću u napad na zečeve gdje usporedno dolazi do porasta lisica i pada zečeva.

Smanjenjem stope napada lisica povećava se populacija lisica!

Opis slike 10b:

Više će biti populacije lisica (oko 130) kod smanjenja stope napada lisica (roza linija), nego kod povećanja stope napada lisica(plava linija) (oko 35)!

## 3.4 Promjena stopa umiranja grabežljivca bez plijena → b

Uzimamo početne parametre rg, rp, a, p0 i g0 a mijenjamo stopu umiranja lisica bez plijena **b**.

Početna vrijednost **b** = **0.2** koja se povećava na **b** = **0.3** i smanjuje na **b** = **0.08**

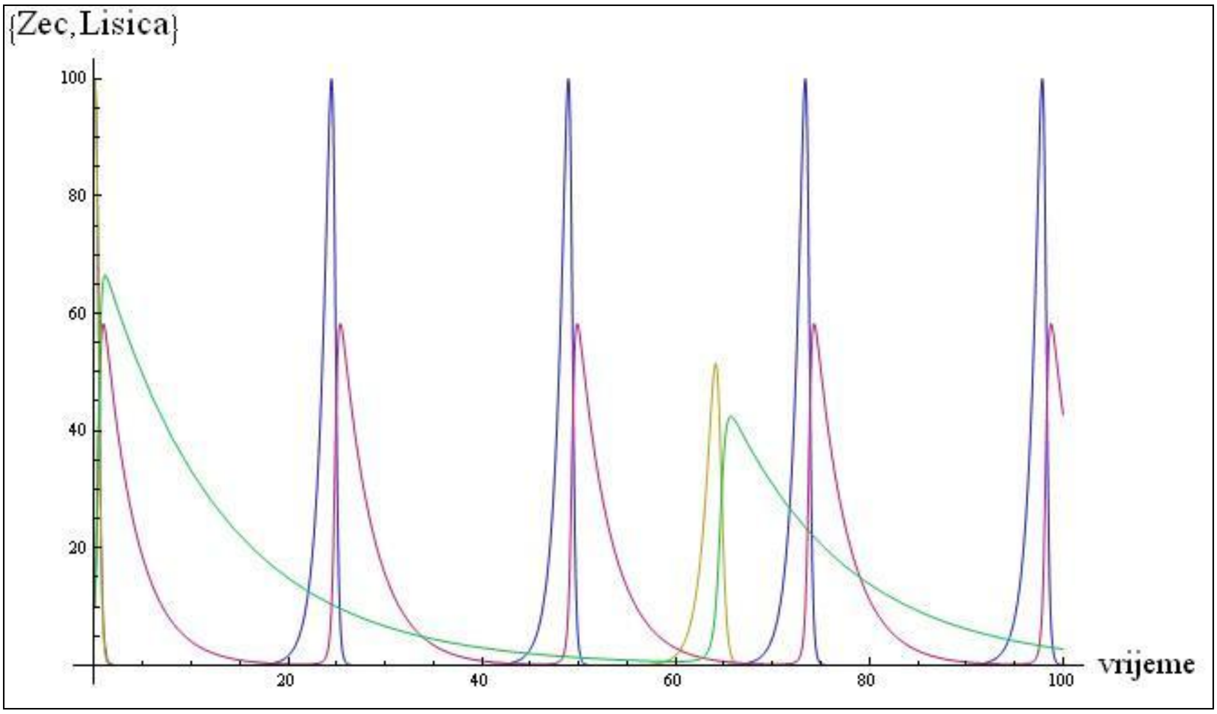
- Povećanje parametra b

```
rp:=1
rg:=0.0415
a:=0.1
b1:=0.3
b2:=0.08
p0:=100
g0:=10

pdiff0:=rp*p0-a*g0*p0
gdiff0:=rg*p0*g0-b1*g0
norma:=Sqrt[(pdiff0-p0)^2+(gdiff0-g0)^2]

pdiff01:=rp*p0-a*g0*p0
gdiff01:=rg*p0*g0-b2*g0
norma1:=Sqrt[(pdiff01-p0)^2+(gdiff01-g0)^2]

pt=p'[t]==rp*p[t]-a*g[t]*p[t];
```

```
gt=g'[t]==rg*p[t]*g[t]-b*g[t];
sustav:={pt,gt}

pocetnisustav:=sustav/.{rp→1,rg→0.0415,a→0.1,b→0.3}
cijelisustav:=Join[pocetnisustav,{p[0]==100,g[0]==10}]
pocetnizec=NDSolve[cijelisustav,{p,g},{t,0,100}]
krivulje:=Flatten[pocetnizec]
zec:=p[t]/.krivulje[[1]]
lisica:=g[t]/.krivulje[[2]]
```

- Smanjenje parametra b

```
pocetnisustav1:=sustav/.{rp→1,rg→0.0415,a→0.1,b→0.08}
cijelisustav1:=Join[pocetnisustav1, {p[0]== 100,g[0]== 10}]
pocetnizec1=NDSolve[cijelisustav1,{p,g},{t,0,100}]
krivulje1:=Flatten[pocetnizec1]
zec1:=p[t]/.krivulje1[[1]]
lisica1:=g[t]/.krivulje1[[2]]

pocetnatocka:={100,10}

Show[Plot[{{zec,lisica},{zec1,lisica1}},{t,0,100},
AxesLabel→TraditionalForm/@{Style[vrijeme,18],{Style[Zec,20],
Style[Lisica,20]}},AxesOrigin→{0,0},PlotRange→All]]

Show[ParametricPlot[{{zec,lisica},{zec1,lisica1}},{t,0,100},
PlotRange→All,AxesLabel→TraditionalForm/@{Style[Zec,20],
Style[Lisica,20]},AxesOrigin→{0,0}],
Graphics[{PointSize[0.015],Point[pocetnatocka]}],
 Graphics[Arrow[{{p0,g0},{p0+15*(pdiff0-
p0)/norma,g0+15*(gdiff0-g0)/norma}}]],
 Graphics[Arrow[{{p0,g0},{p0+10*(pdiff01-
p0)/norma1,g0+10*(gdiff01-g0)/norma1}}]]]

{{p→InterpolatingFunction[{{0.,100.}},<>],g→InterpolatingFunct
ion[{{0.,100.}},<>]}}

{{p→InterpolatingFunction[{{0.,100.}},<>],g→InterpolatingFunct
ion[{{0.,100.}},<>]}}
```





Slika 11a i 11b. Grafički prikazi modela u Mathematici za promjenu stope umiranja grabežljivca (lisice) bez plijena

Opis slike 11a:

Povećanjem stope umiranja lisica bez konzumiranja plijena, dolazi do većeg povećanja ukupne populacije zečeva (plava linija).

Smanjenjem stope umiranja lisica povećati će se ukupna populacija lisica i vrlo blizu približiti populaciji zečeva!

Opis slike 11b:

Kod povećanja stope umiranja lisica usporeno dolazi do povećanja lisica i smanjenja zečeva.

Kod smanjenja stopa umiranja lisica brže dolazi do rasta lisica te u prvom ciklusu imamo više lisica nego kod smanjenja stope umiranja. U drugom ciklusu dolazi do smanjenja populacije i lisica i zečeva.

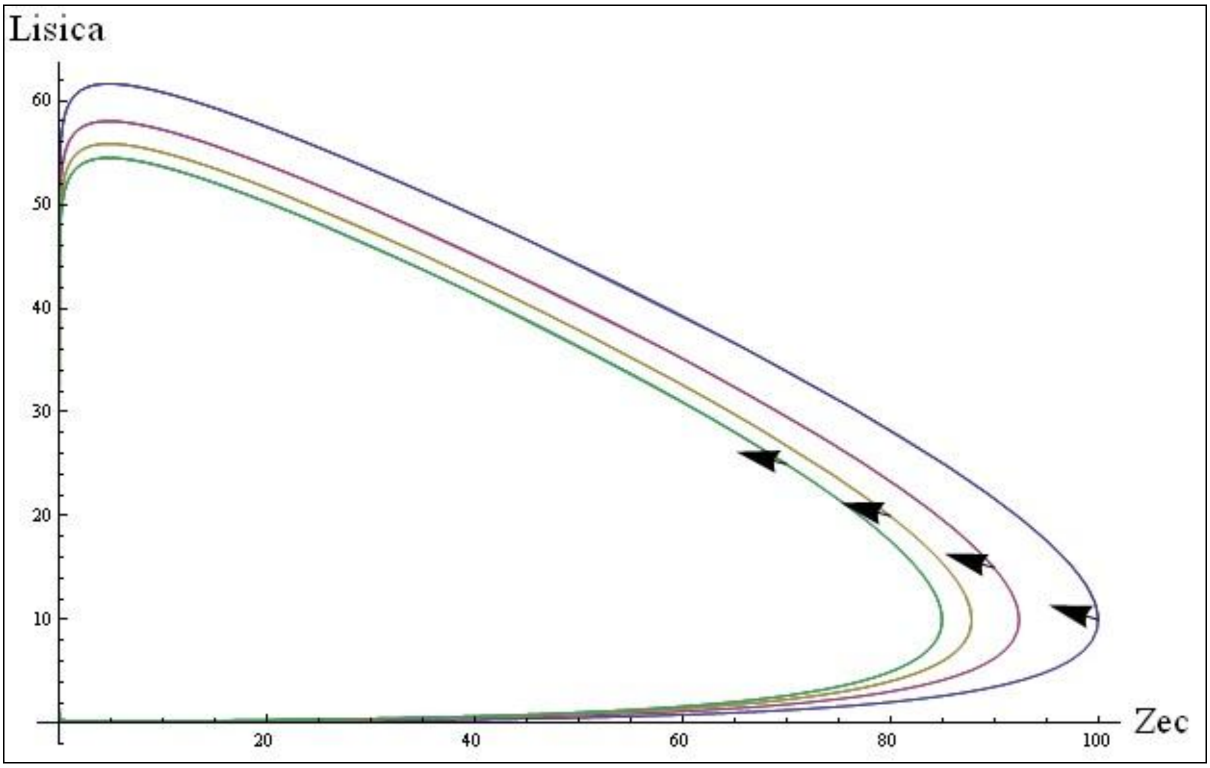
## 3.5 Promjena početnih uvjeta

Uzimamo početne parametre rg, rp, a, b a mijenjamo početne populacije zečeva i lisica, **p0** i **g0**. P0 i g0 kreće u rasponu od (100,10), (90,15), (80,20) i (70,25).

```
rp:=1
rg:=0.0415
a:=0.1
b:=0.2
p01:=100
g01:=10
p02:=90
g02:=15
p03:=80
g03:=20
p04:=70
g04:=25

pdiff01:=rp*p01-a*g01*p01
gdiff01:=rg*p01*g01-b*g01
norma1:=Sqrt[(pdiff01-p01)^2+(gdiff01-g01)^2]

pdiff02:=rp*p02-a*g02*p02
gdiff02:=rg*p02*g02-b*g02
norma2:=Sqrt[(pdiff02-p02)^2+(gdiff02-g02)^2]

pdiff03:=rp*p03-a*g03*p03
gdiff03:=rg*p03*g03-b*g03
norma3:=Sqrt[(pdiff03-p03)^2+(gdiff03-g03)^2]

pdiff04:=rp*p04-a*g04*p04
```

```
gdiff04:=rg*p04*g04-b*g04
norma4:=Sqrt[(pdiff04-p04)^2+(gdiff04-g04)^2]

pt=p'[t]==rp*p[t]-a*g[t]*p[t];
gt=g'[t]==rg*p[t]*g[t]-b*g[t];
sustav:={pt,gt}

pocetnisustav:=sustav/.{rp→1,rg→0.0415,a→0.1,b→0.2}
cijelisustav:=Join[pocetnisustav,{p[0]==p01,g[0]==g01}]
pocetnizec=NDSolve[cijelisustav,{p,g},{t,0,100}]
krivulje:=Flatten[pocetnizec]
zec:=p[t]/.krivulje[[1]]
lisica:=g[t]/.krivulje[[2]]

pocetnisustav1:=sustav/.{rp→1,rg→0.0415,a→0.1,b→0.2}
cijelisustav1:=Join[pocetnisustav1, {p[0]== p02,g[0]== g02}]
pocetnizec1=NDSolve[cijelisustav1,{p,g},{t,0,100}]
krivulje1:=Flatten[pocetnizec1]
zec1:=p[t]/.krivulje1[[1]]
lisica1:=g[t]/.krivulje1[[2]]

pocetnisustav2=sustav/.{rp→1,rg→0.0415,a→0.1,b→0.2}
cijelisustav2:=Join[pocetnisustav2, {p[0]== p03,g[0]== g03}]
pocetnizec2=NDSolve[cijelisustav2,{p,g},{t,0,100}]
krivulje2:=Flatten[pocetnizec2]
zec2:=p[t]/.krivulje2[[1]]
lisica2:=g[t]/.krivulje2[[2]]

pocetnisustav3=sustav/.{rp→1,rg→0.0415,a→0.1,b→0.2}
cijelisustav3:=Join[pocetnisustav3, {p[0]== p04,g[0]== g04}]
pocetnizec3=NDSolve[cijelisustav3,{p,g},{t,0,100}]
krivulje3:=Flatten[pocetnizec3]
zec3:=p[t]/.krivulje3[[1]]
lisica3:=g[t]/.krivulje3[[2]]

Show[ParametricPlot[{{zec,lisica},{zec1,lisica1},{zec2,lisica2
},{zec3,lisica3}},{t,0,100},PlotRange→All,
AxesLabel→TraditionalForm/@{Style[Zec,20],Style[Lisica,20]},
AxesOrigin→{0,0}], Graphics[Arrow[{{p01,g01},{p01+5*(pdiff01-
p01)/norma1,g01+5*(gdiff01-g01)/norma1}}]],
 Graphics[Arrow[{{p02,g02},{p02+5*(pdiff02-
p02)/norma2,g02+5*(gdiff02-
g02)/norma2}}]],Graphics[Arrow[{{p03,g03},{p03+5*(pdiff03-
p03)/norma3,g03+5*(gdiff03-
g03)/norma3}}]],Graphics[Arrow[{{p04,g04},{p04+5*(pdiff04-
p04)/norma4,g04+5*(gdiff04-g04)/norma4}}]]]

{{p→InterpolatingFunction[{{0.,100.}},<>],g→InterpolatingFunct
ion[{{0.,100.}},<>]}}

{{p→InterpolatingFunction[{{0.,100.}},<>],g→InterpolatingFunct
```

```
ion[{{0.,100.}},<>]}}
{p′[t]==p[t]-0.1 g[t] p[t],g′[t]==-0.2 g[t]+0.0415 g[t] p[t]}

{{p→InterpolatingFunction[{{0.,100.}},<>],g→InterpolatingFunct
ion[{{0.,100.}},<>]}}
{p′[t]==p[t]-0.1 g[t] p[t],g′[t]==-0.2 g[t]+0.0415 g[t] p[t]}

{{p→InterpolatingFunction[{{0.,100.}},<>],g→InterpolatingFunct
ion[{{0.,100.}},<>]}}
```




Slika 12. Grafički prikazi sustava s različitim početnim populacijama

<u>Opis slike 12:</u>

Mijenjanjem početnih populacija zečeva i lica od (100,10) (plava linija) do (70,25) (zelena linija) dobiva se prikaz promjene rasta populacije zečeva i rasta populacije lisica sa navedenih parametrima: stopa rasta zečeva (**rp = 1**), stopa rasta lisica konzumiranjem plijena (**rg = 0.0415**), stopa napada lisica (**a = 0.1**) i stopa umiranja lisica bez plijena (**b = 0.2**) sve u vremenu (**t = 100**).
Vidimo da povećanjem početnih populacija lisica dobijemo više lisica i potrebno je više zečeva za njihovu prehranu. Isto tako vrijedi i obrnuto: sa manjom populacijom lisica potrebna je manja populacija zečeva!

# 4. Zaključak

Lotka – Volterra jednadžbe, poznate kao jednadžbe grabežljivca / plijena su nelinearne diferencijalne jednadžbe koje opisuju dinamiku bioloških sustava u kojima dolazi do interakcija između dviju vrsta, grabežljivca (u našem slučaju lisica) i plijena (zečeva).

Definirali smo nekoliko važnih pretpostavki da bi olakšali radnju modela. Lisice kao grabežljivci imaju samo jedan izvor hrane a to su zečevi (plijen), zečevi konstantno imaju dovoljan izvor hrane, okoliš se ne mijenja u korist niti jedne vrste, genetske prilagodbe su vrlo spore i promjena stopa populacije proporcionalan je njihovoj veličini.

Mijenjanjem početnih parametara simuliramo različite situacije u odnosima između lisica i zečeva (grabežljivca i plijena).

Velika mana mu je uspješnost stvaranja oscilacijskog ponašanja. Lotka - Volterra model je slaba točka za sustave kao one što želimo formirati jer je previše osjetljiv na bilo kakve smetnje / nesreće / šum. Ovaj problem stabilnosti se može jednostavno ukloniti ako uspijemo formirati sustav s jedinstvenim ograničenjem ciklusa (da limitiramo do koje se granice / limita mogu parametri a ujedno i populacije kretati – jer inace ovako se može kretati do u beskonačnosti)

Da bi Lotka – Volterra model učinili što realnijim moramo uzeti u obzir već navedene pretpostavke.

# 5. Literatura


1. http://en.wikipedia.org/wiki/Lotka%E2%80%93Volterra_equation
2. http://www.tiem.utk.edu/bioed/bealsmodules/predator-prey.html
3. http://www.mathos.hr/modeli/Lotka.pdf
4. http://openwetware.org/wiki/IGEM:IMPERIAL/2006/project/Oscillator/Theoretical_Analyses/2D_Model1
5. http://demonstrations.wolfram.com/PredatorPreyEquations/
6. http://en.wikipedia.org/wiki/Lotka%E2%80%93Volterra_equation
7. http://mathworld.wolfram.com/Lotka-VolterraEquations.html
8. http://matematika.fkit.hr/novo/izborni/referati/Iva%20Kovacic%20i%20Sonja%20Omerzo%20-%20Lotka-Volterra%20model.pdf
9. http://openwetware.org/wiki/IGEM:IMPERIAL/2006/project/Oscillator/Theoretical_Analyses/Results/2D_Model1