SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE

ZAVOD ZA MATEMATIKU

SEMINARSKI RAD IZ KOLEGIJA UVOD U MATEMATIČKE METODE U INŽENJERSTVU

STUDIJ: 1. GODINA DIPLOMSKI, EKOINŽENJERSTVO

NATJECATELJSKI LOTKA – VOLTERRA MODEL

PREDMETNI NASTAVNIK:	STUDENTI:
Dr. sc. Ivica Gusić, redovni profesor	Bojan Džebrić,
ASISTENT:	Mirzet Velagić
Dr. sc. Miroslav Jerković, docent	Berislav Vulin

Zagreb, srpanj 2012. Godine

Sadržaj:

1. UVOD

Živi organizmi rastu, razmnožavaju se, kreću se i umiru. Kod svih tih funkcija živi organizmi utječu jedni na druge i na svoj okoliš, ali i ovise o okolišu u kojem djeluju i ograničeni su resursima dostupnima u tom okolišu. Borba za resurse, partnera za parenje i sl., događa se kod jedinki iste vrste, kao i između jedinki različitih vrsta na istom prostoru.

Dinamika ovog natjecanja može se proučavati, direktnim promatranjem populacije jedinki ili modeliranjem ponašanja jedinki. Kako direktno proučavanje zna biti vremenski dugotrajno i financijski skupo, a nekad i nemoguće, često se pribjegava drugom rješenju matematičkom modeliranju bioloških fenomena. Natjecateljski Lotka – Volterra model je jednostavan matematički model koji se koristi kako bi se shvatilo kako različiti faktori utječu na ishod natjecateljskog međudjelovanja.

Model su sastavili talijanski matematičar Vito Volterra (1860. - 1940.) i američki biofizičar mađarsko-austrijskog podrijetla Alfred L. Lotka (1880. - 1949.). Taj model još dan danas služi kao osnova za razvijanje mnogih modela koji se koriste u analizi dinamike populacija.

2. NATJECATELJSKI LOTKA – VOLTTERA MODEL

U ovom modelu radi se o sustavu jednadžbi gdje prva jednadžba opisuje brzinu promjene vrste 1, a druga brzinu promjene vrste 2. Ovaj model sadrži izraz za utjecaj na samog sebe i izraz za međusobni utjecaj s drugom vrstom. Rezultat međuvrsnog natjecanja je u tome da jedinke jedne vrste imaju smanjenu plodnost, stopu preživljavanja ili rasta kao rezultat iskorištavanja resursa ili ometanja jedinkama druge vrste.

2.1. Jednodimenzionalni sustav

Najčešći izraz za logistički populacijski model glasi:

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = rN\left(\frac{K-N}{K}\right)}$$

gdje su:

N- veličina populacije,

t – vrijeme,

K – kapacitet nosivosti,

r – stopa rasta.

Ova logistička jednadžba predstavlja stupanj rasta populacije, koja je ograničena natjecanjem unutar jedne vrste (unutarvrsno - kad se članovi određene vrste natječu jedni protiv drugih). Prvi član desne strane jednadžbe, *rN* (umnožak stope rasta i veličine populacije) opisuje porast populacije ako nema natjecanja. Drugi član $(\frac{K-N}{K})$ uključuje natjecanje unutar vrste te ima vrijednost između 0 i 1. Kako se veličina populacije *N* približava kapacitetu nosivosti *K*, vrijednost u brojniku *(K-N)* postaje manja, ali nazivnik *K* ostaje isti pa taj izraz postaje manji. Ovaj izraz pokazuje da se rast populacije usporava porastom veličine populacije, sve dok populacije ne dosegne kapacitet nosivosti. Drugim riječima, krivulja rasta populacije opisana logističkom jednadžbom je sigmoida i stupanj rasta ovisi o gustoći populacije koja je definirana izrazom $\frac{N}{K}$.

2.2. Dvodimenzionalni sustav

U logističkom dinamičkom modelu, kada imamo dvije populacije *N1 i N2*, u osnovnoj Lotka – Volterra jednadžbi dodaje se i izraz za izračun međusobnog utjecaja dviju vrsta (međuvrsno natjecanje). Prema tome Lotka - Volterra natjecateljski model može poprimiti slijedeći izraz:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= r_1 N_1 \left(\frac{K_1 - N_1 - \alpha_{12} N_2}{K_1}\right) \\[2em] \frac{dN_2}{dt} &= r_2 N_2 \left(\frac{K_2 - N_2 - \alpha_{21} N_1}{K_2}\right) \end{aligned}}$$

α_{12} – utjecaj vrste 2 na populaciju vrste 1,

α_{21} – utjecaj vrste 1 na populaciju vrste 2.

Glavna razlika je dodatak izraza koji uključuje koeficijent natjecanja α. Koeficijent natjecanja predstavlja utjecaj koji jedna vrsta ima na drugu: α_{12} predstavlja utjecaj vrste 2 na vrstu 1, a α_{21} predstavlja utjecaj vrste 1 na vrstu 2 (prvi broj u indeksu uvijek se odnosi na vrstu na koju se utječe).

U prvoj jednadžbi Lotka –Volterra modela za međuvrsno natjecanje, utjecaj koji vrsta 2 ima na vrstu 1 (α_{12}) pomnožen je s veličinom populacije vrste 2 (*N2*). Kada je $\alpha_{12}<1$, utjecaj vrste 2 na vrstu 1 manji je nego utjecaj vrste 1 na vlastite članove. I obrnuto, kada je $\alpha_{12}>1$, utjecaj vrste 2 na vrstu 1 veći je nego utjecaj vrste 1 na vlastite članove. Stoga, umnožak koeficijenta natjecanja α_{12} i veličine populacije vrste 2 (*N2*), predstavlja utjecaj ekvivalentnog broja članova vrste. Isto vrijedi i za izraz $\alpha_{21}N1$ u drugoj jednadžbi.

2.3 Izokline

Intuitivno značenje izoklina se odnosi na brzinu promjene populacije kada su N_1 i N_2 jednaki 0Izoklina vrste 1 je krivulja na kojoj je brzina promjene vrste 1 jednaka 0 tj. ako je $dN_1/dt = 0$ i dobije se pravac s jednadžbom:

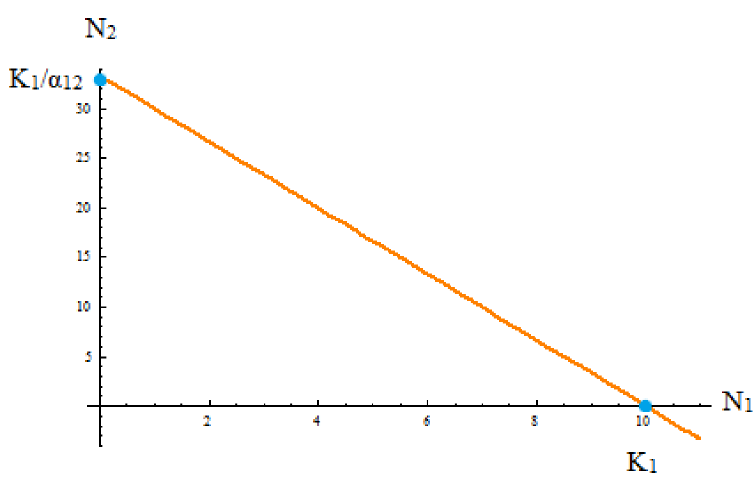
$$N_2 = \frac{K_1}{\alpha_{12}} - \frac{1}{\alpha_{21}} N_1$$

Izoklina vrste 2 je krivulja na kojoj je brzina promjene vrste 2 jednaka 0 tj. $dN_2/dt = 0$ i dobije se pravac s jednadžbom:

$$N_2 = - \alpha_{21}N_1 + K_2$$

<u>Izoklina 1. vrste</u>

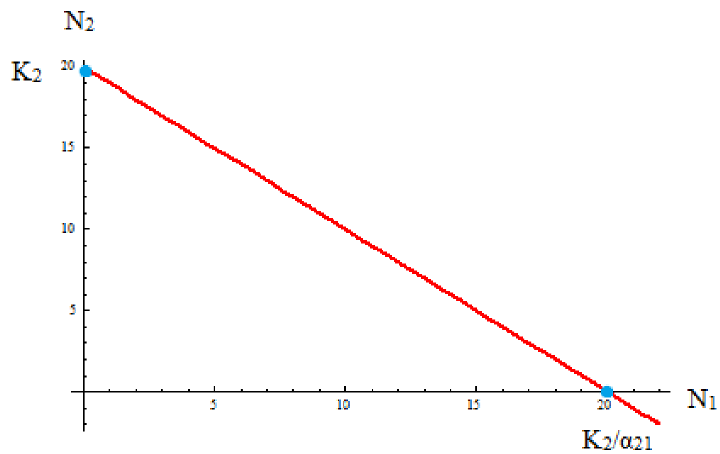
$$\frac{dN_1}{dt} = 0$$



Graf 1. Izoklina 1. vrste

Izoklina 2. vrste

$$\frac{dN_2}{dt} = 0$$



Graf 2. Izoklina 2. vrste

2.4. Fiksne točke

Kad je brzina promjene obiju vrsta 0 **tj.** rješenje sustava dN1/dt =0, dN2/dt =0 je 0, dobijemo fiksne točke sustava. One mogu biti trivijalne tj. očite, rubne kad je jedna od veličina jedanaka 0 i netrivijalne kad su N1>0 i N2>0.

Npr. kad su (N1, N2) = (0, 0) obje vrste će prestati postojati, ako je (N1, N2) = (K1, 0) prva vsta će se stabilizirati na svojem nosivom kapacitetu uz izostanak druge vrste, slično vrijedi i za slučaj (N1,N2)=(0,K2). Netrivijalne fiksne točke su presjeci izoklina, koje se dobiju rješavanjem sustava jednadžbi:

$$K_1 - N_1 - \alpha_{12}N_2 = 0$$
$$K_2 - N_2 - \alpha_{21}N_1 = 0$$

Iz kojih se dobije formula:

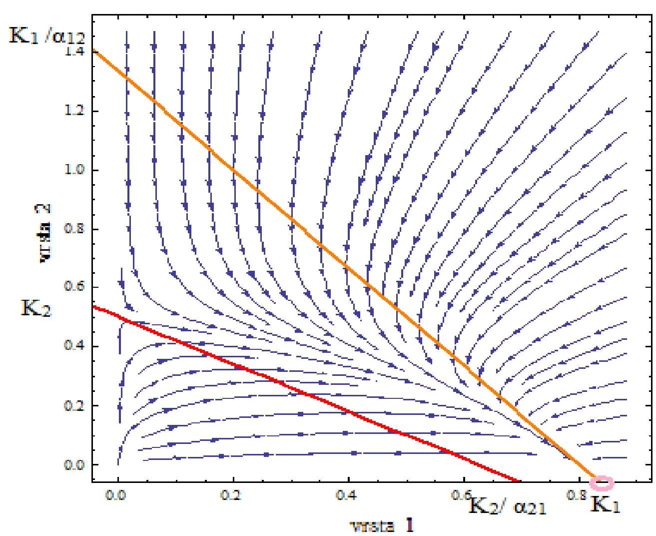
$$(N_1, N_2) = \left(\frac{K_1 - \alpha_{12}K_2}{1 - \alpha_{12}\alpha_{21}}, \frac{K_2 - \alpha_{21}K_1}{1 - \alpha_{12}\alpha_{21}}\right)$$

Bitna stvar kod fiksnih točaka je da moraju biti u prvom kvadrantu jer inače nemaju realno značenje.

3. PRIMJENA LOTKA-VOLTERRA NATJECATELJSKOG MODELA S PRIMJERIMA

3. 1. Scenarij 1 – vrsta 1 nadvladava vrstu 2

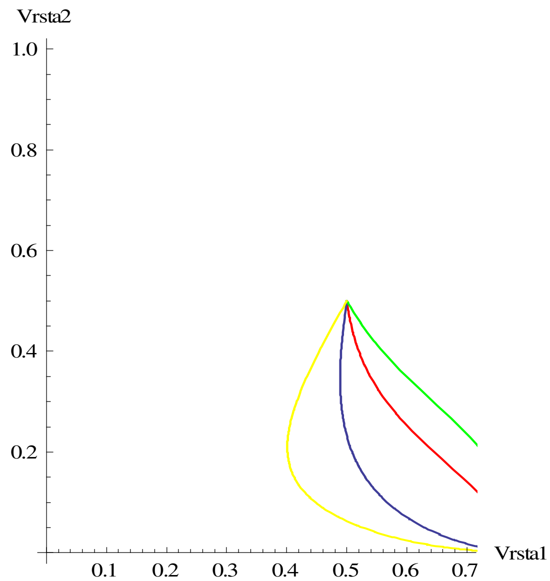
U prvom scenariju (graf 1) postavljen je slučaj gdje populacija vrste 1 uvijek nadvlada vrstu 2**,** odnosno vrsta 2 biva natjecateljski isključena vrstom 1. To je grafičko prikazano tako da je izoklina vrste 1 (narančasta linija) iznad i na desno od izokline vrste 2 (crvena linija). Za bilo koju točku u lijevom kutu grafa (bilo koja kombinacija gustoća vrsta), obje populacije su ispod njihove dotične izokline i obje rastu. Za bilo koju točku u gornjem desnom kutu grafa, obje vrste su iznad njihove dotične izokline i obje opadaju. Za bilo koju točku između dviju izoklina, vrsta 1 je još uvijek ispod svoje izokline i raste, a vrsta 2 je iznad svoje izokline i stoga opada. Udruženo kretanje dviju populacija (plave strelice) ide prema dolje i na desno, pa je vrsta 2 dovedena do izumiranja, a vrsta 1 raste dok ne dosegne svoj kapacitet nosivosti K_1. Otvoreni krug u ovoj točki predstavlja stabilnu ravnotežu.



Graf 3. Vrsta 1 nadvladava vrstu 2

Fiksna točka se dobije u četvrtom kvadrantu što znači da za naš slučaj nema realno značenje s obzirom da fiksne točke imaju realno značenje jedino ako se dobiju u prvom kvadrantu.

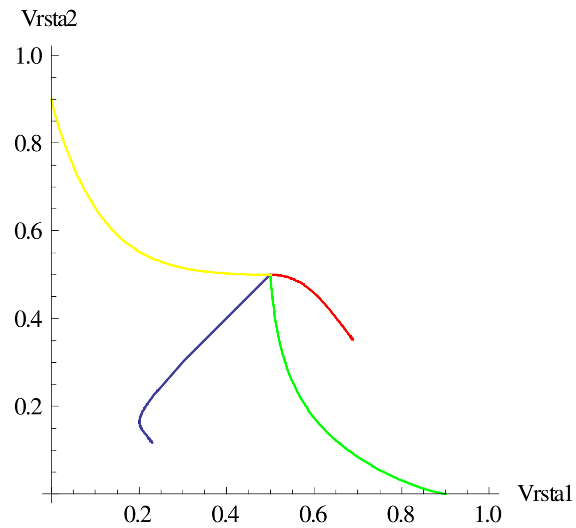
I) Utjecaj rasta/ pada koeficijenta natjecanja α



Graf 4. Utjecaj rasta/pada koeficijenta α

Porastom koeficijenta natjecanja α12 i α21 nadvladavanje vrste 1 nad vrstom 2 je otežano jer krivulje koje izviru iz zajedničke točke nemaju više tako oštri pad.

II) Utjecaj rasta/pada kapaciteta nosivosti vrste 1 ili vrste 2

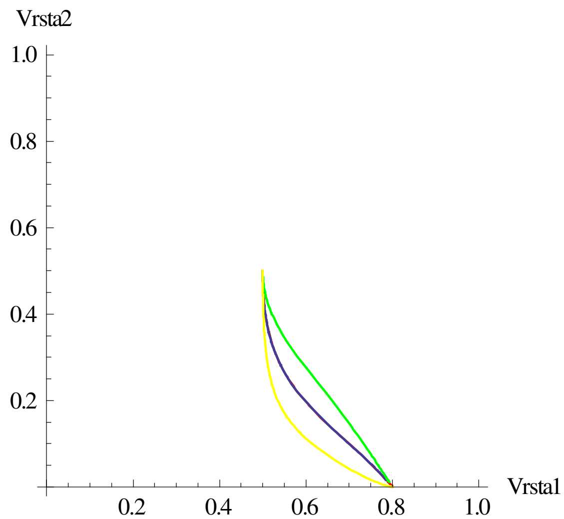


Graf 5. Utjecaj rasta/pada kapaciteta nosivosti K

- crvena linija: kapaciteti nosivosti obje vrste su visoki
- plava linija: kapaciteti nosivosti obje vrste su niski
- zelena linija: kapacitet nosivosti vrste 1 je viši, a vrste 2 znatno niži
- žuta linija: kapacitet nosivosti vrste 2 je viši, a vrste 1 znatno niži

Porastom kapaciteta nosivosti obje vrste, vrsta 1 znatno brže nadvladava vrstu 2. Smanjenjem oba kapaciteta, padaju obje populacije, tek pri kraju pojavljuje se blagi rast vrste 1. Povećanjem kapaciteta nosivosti vrste 1, samo se nešto malo usporava pad krivulje, odnosno vrsta 1 neznatno slabije napreduje u odnosu na vrstu 2. Ako se poveća kapacitet nosivosti vrste 2, vrsta 1 nikad u ne nadvlada vrstu 2, štoviše ide ka 0.

III) Utjecaj rasta/pada stope rasta vrste 1 ili vrste 2



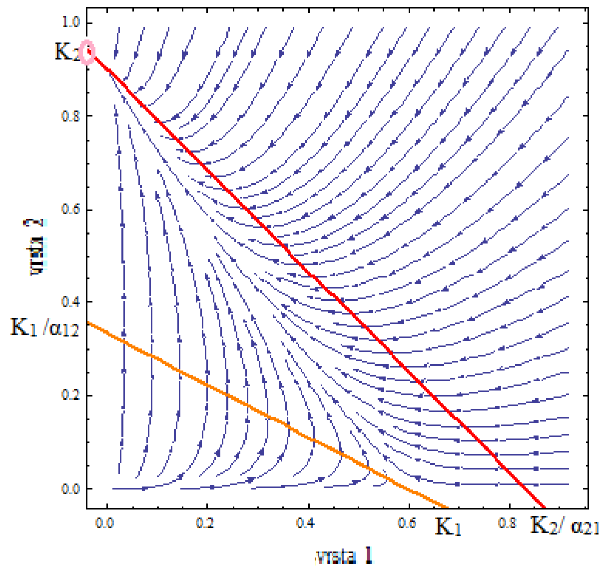
Graf 6. Utjecaj rasta/pada stope rasta r

- crvena linija: stope rasta obiju vrste su visoke
- plava linija: stope rasta obiju vrste su visoke niske
- zelena linija: stopa rasta vrste 1 je viša, a vrste 2 znatno nža
- žuta linija: stopa rasta vrste 2 je viša, a vrste 1 znatno niža

Može se primjetiti da, ako su stope rasta vrste 1 i 2 jednake, bilo obje niske ili visoke, grafovi se preklapaju s tim da ako su obje visoke, vrsta 2 će na kraju u potpunost isčeznuti. Ako je stopa rasta viša u vrste 1, ta populacija će brže nadvladati vrstu 2, a ako je ista manja, sporije. Možemo reći da promjena stopa rasta manje utječe nego promjena kapaciteta nosivosti.

3. 2. Scenarij 2 – vrsta 2 nadvladava vrstu 1

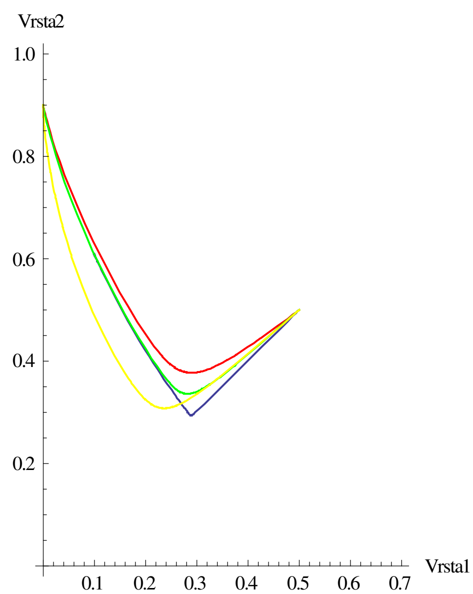
U ovom scenariju prikazan je sličan slučaj kao i u prvom, samo što je sada situacija između vrsta obrnuta. Dakle**,** vrsta 2 nadvlada vrstu 1 te je vrsta 1 natjecateljski isključena vrstom 2. Izoklina vrste 2 nalazi se iznad i na desno od izokline vrste 1. Sada je trajektorija dviju populacija, kada se kreće između izoklina, iznad i nalijevo.



Graf 7. Vrsta 2 nadvladava vrstu 1

Slično kao i kod scenarija 1 fiksna točka se dobije u četvrtom kvadrantu što znači da za naš slučaj nema realno značenje s obzirom da fiksne točke imaju realno značenje jedino ako se dobiju u prvom kvadrantu.

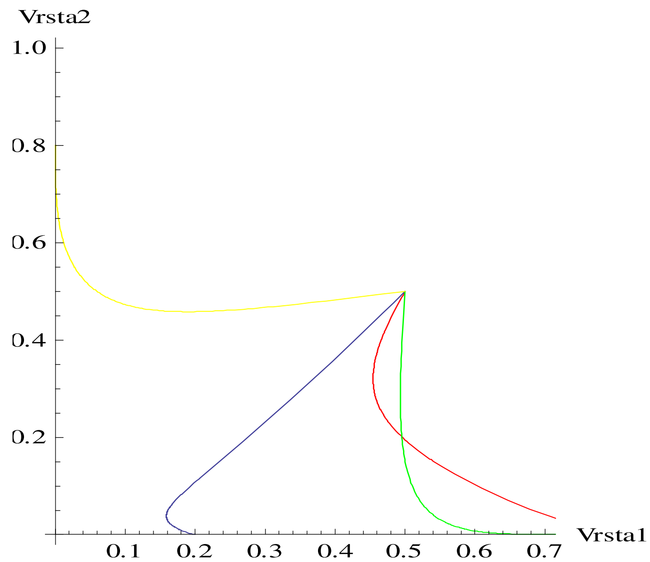
I) Utjecaj rasta/ pada koeficijenta natjecanja α



Graf 8. Utjecaj rasta/pada koeficijenta natjecanja α

Porastom koeficijenta natjecanja $\alpha 12$ i $\alpha 21$ nadvladavanje vrste 2 nad vrstom 1 je ubrzano, odnosno vrsta 1 će lakše postati natjecateljski isključena vrstom 2.

II) Utjecaj rasta/pada kapaciteta nosivosti vrste 1 ili vrste 2

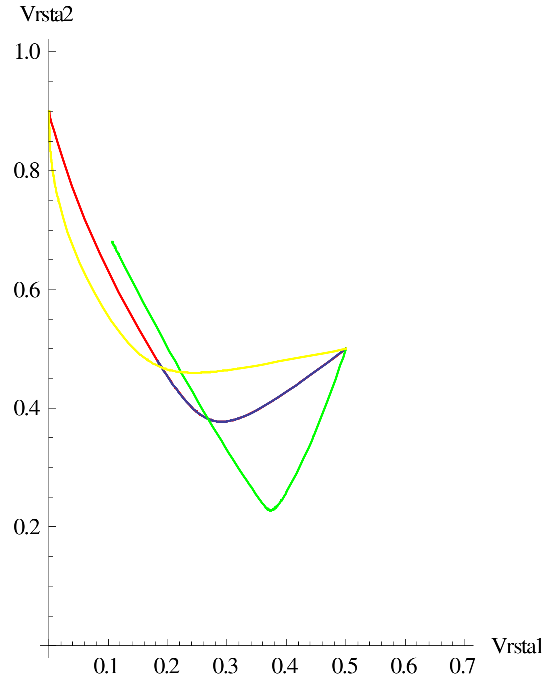


Graf 9. Utjecaj rasta/pada kapaciteta nosivosti K

- ✓ crvena linija: kapaciteti nosivosti obiju vrste su visoki
- ✓ plava linija: kapaciteti nosivosti obiju vrste su niski
- ✓ zelena linija: kapacitet nosivosti vrste 1 je viši, a vrste 2 znatno niži
- ✓ žuta linija: kapacitet nosivosti vrste 2 je viši, a vrste 1 znatno niži

Povećanjem kapaciteta nosivosti obiju vrsta u početku, populacije obiju vrsta se smanjuju, a zatim ipak vrsta 2 nadvladava. Ako smanjimo kapacitete obiju vrsta, vrste iščezavaju još brže. Povećanjem kapaciteta nosivosti vrste 1, vrsta 2 zapravo iščežava, što je još više kontradiktorno scenariju, ali odgovara zadanim uvjetima. Ako se poveća kapacitet nosivosti vrste 2, vrsta 2 kontinuirano nadvladava vrstu 1.

III) Utjecaj rasta/pada stope rasta vrste 1 ili vrste 2



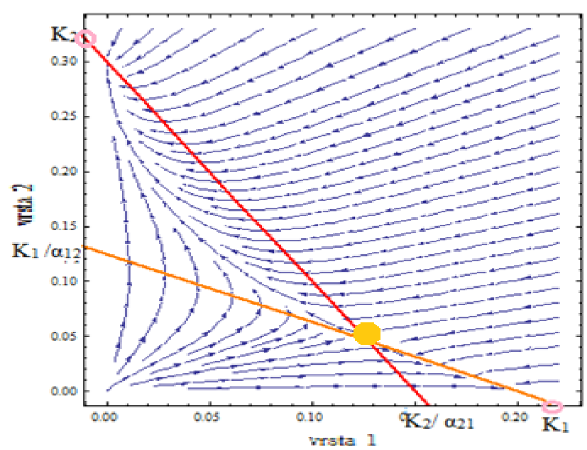
Graf 10. Utjecaj rasta/pada stope rasta r

- crvena linija: stope rasta obiju vrsta su visoke
- plava linija: stope rasta obiju vrsta su visoko niske
- zelena linija: stopa rasta vrste 1 je viša, a vrste 2 znatno niža
- žuta linija: stopa rasta vrste 2 je viša, a vrste 1 znatno niža

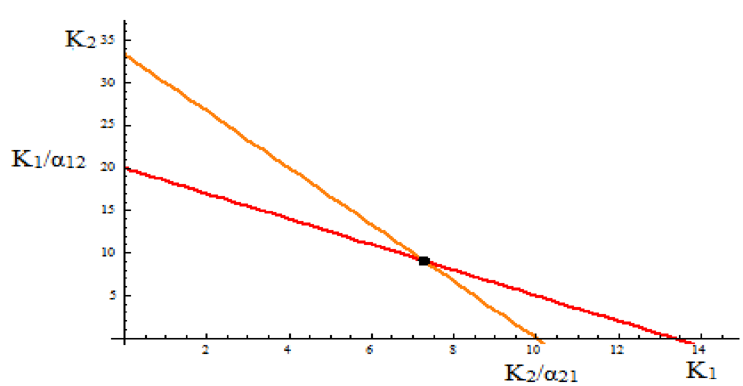
Može se primjetiti da, ako su stope rasta vrste 1 i 2 jednake, bilo obje niske ili visoke, grafovi se „nadopunjavaju" jedan na drugog s tim da ako su obje visoke, vrsta 2 će prije natjecateljski nadvladati vrstu 1. Ako je stopa rasta viša u vrste 1, to nadvladavanje će se dogoditi sporije, a ako je ista viša u vrste 2, brže.

3. 3. Scenarij 3 – eventualno prevladava vrsta 1 ili vrsta 2

Prema trećem scenariju eventualno može prevladavati vrsta 1 ili vrsta 2. Ovdje, kapacitet nosivosti vrste 1 ($K1$) je veći od kapaciteta nosivosti vrste 2 ($K2$) podijeljenog s natjecateljskim koeficijentom ($K2/\alpha_{21}$), a kapacitet nosivosti vrste 2 ($K2$) veći je od kapaciteta nosivosti vrste 1 podijeljenog s natjecateljskim koeficijentom ($K1/\alpha_{12}$). To rezultira presjecanjem izoklina vrste 1 i vrste 2, a u sjecištu nalazi se ravnotežna točka koja je nestabilna (zatvoreni krug). Mogu se primijetiti četiri različita polja u kojima se udruženo kretanje dviju populacija različito ponaša, a ishod ovisi o početnim gustoćama obiju vrsta. Ispod izokline vrste 1 obje populacije rastu, a iznad izokline vrste 2 padaju (isto kao u prva dva scenarija). Za točke iznad crvene linije (izoklina vrste 2) i ispod narančaste linije (izoklina vrste 1) ishod je jednak kao u prvom scenariju: vrsta 2 natjecateljski je isključena vrstom 1. Nasuprot tome, za točke iznad izokline vrste 1 i ispod izokline vrste 2, ishod je isti kao u drugom scenariju: vrsta 1 natjecateljski je isključena vrstom 2. Dvije stabilne ravnotežne točke opet su predstavljene otvorenim krugom.

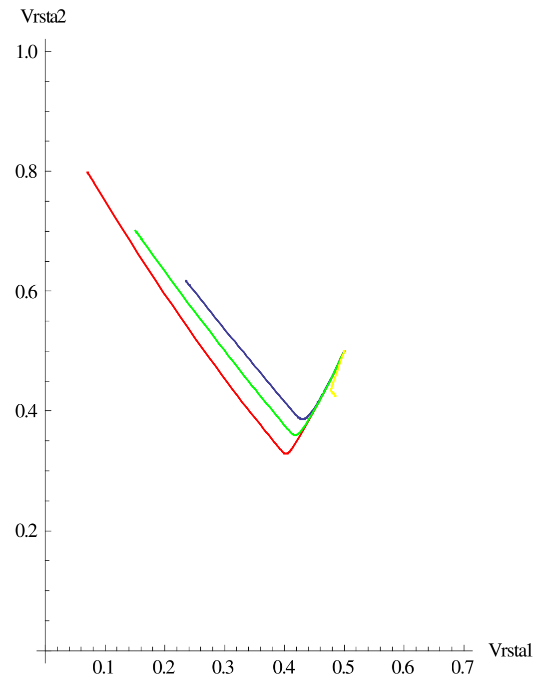


Graf 11. Eventualno prevladava vrsta 1 ili vrsta 2



Graf 12. Fiksna točka gdje eventualno prevladava vrsta 1 ili vrsta 2

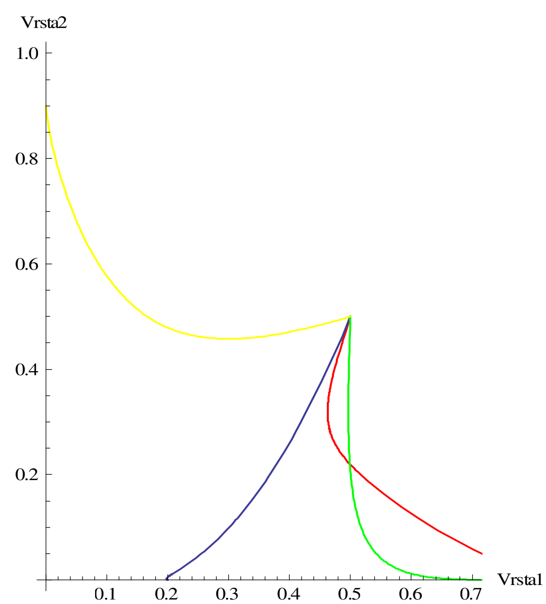
I) Utjecaj rasta/ pada koeficijenta natjecanja α



Graf 13. Utjecaj rasta/ pada koeficijenta natjecanja α

Porastom koeficijenta natjecanja α12 i α21 nadvladavanje vrste 2 nad vrstom 1 je usporeno.

II) Utjecaj rasta/pada kapaciteta nosivosti vrste 1 ili vrste 2

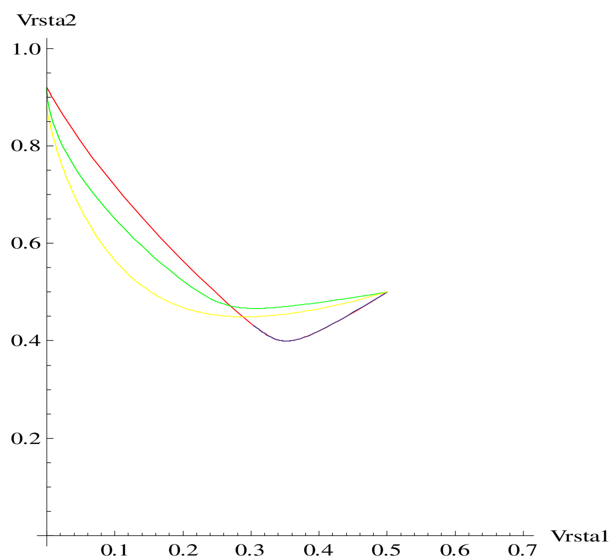


Graf 14. Utjecaj rasta/pada kapaciteta nosivosti vrste 1 ili vrste 2

- crvena linija: kapaciteti nosivosti obiju vrste su visoki
- plava linija: kapaciteti nosivosti obiju vrste su niski
- zelena linija: kapacitet nosivosti vrste 1 je viši, a vrste 2 znatno niži
- žuta linija: kapacitet nosivosti vrste 2 je viši, a vrste 1 znatno niži

Povećanjem kapaciteta nosivosti obiju vrsta u početku, populacije obiju vrsta se smanjuju, a zatim ipak vrsta 2 nadvladava.Smanjenjem kapaciteta nosivosti obje vrste, vrste se smanjuju. Povećanjem kapaciteta nosivosti vrste 1, populacija vrste 2 ubrzano opada, a vrste 1 prvo stagnira, pa vrlo sporo raste. Povećanjem kapaciteta nosivosti vrste 2, populacija vrste 2 raste također istim takvim tokom, a vrste 1 pada.

<u>III) Utjecaj rasta/pada stope rasta vrste 1 ili vrste 2</u>



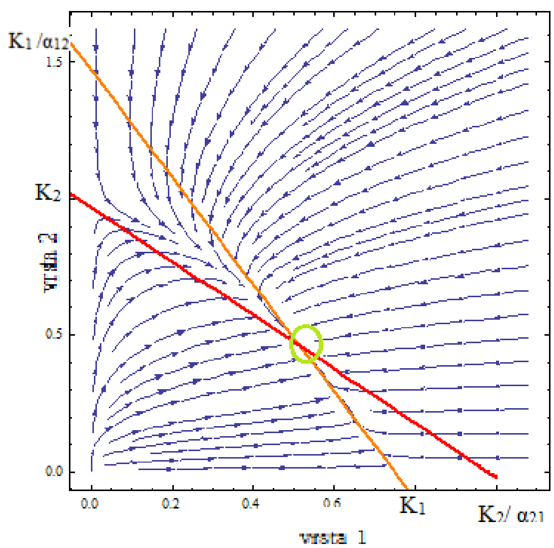
Graf 15. Utjecaj rasta/pada stope rasta vrste 1 ili vrste 2

- crvena linija: stope rasta obiju vrste su visoke
- plava linija: stope rasta obiju vrste su visoke niske
- zelena linija: stopa rasta vrste 1 je viša, a vrste 2 znatno niža
- žuta linija: stopa rasta vrste 2 je viša, a vrste 1 znatno niža

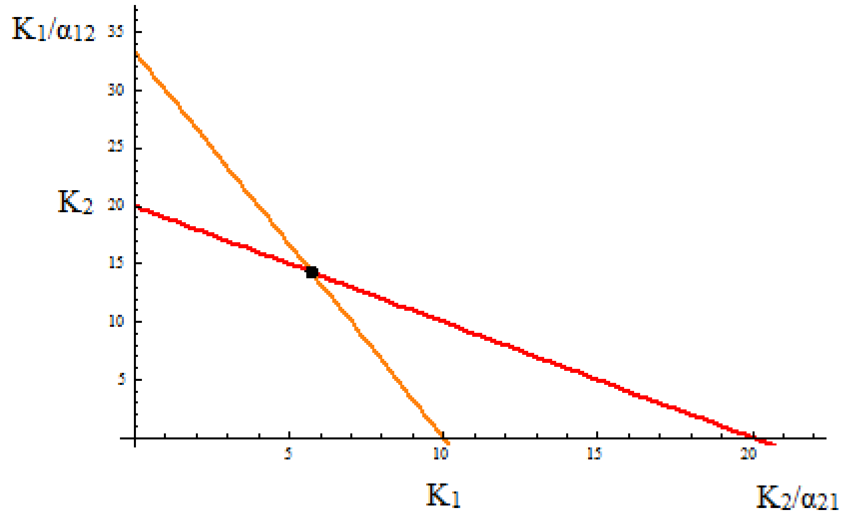
Odmah se može primijetiti da, ako su stope rasta vrste 1 i 2 jednake, bilo obje niske ili visoke, grafovi se poklapaju jedan s drugim s tim da ako su obje visoke, vrsta 2 će natjecateljski nadvladati vrstu 1. Ako je stopa rasta viša u vrste 1, to nadvladavanje će se dogoditi brže, a ako je ista viša u vrste 2, sporije. Općenito, među grafovima su manje razlike, nego u prethodna dva scenarija.

3. 4. Scenarij 4 – koegzistencija obiju vrsta

U posljednjem scenariju izokline se opet presijecaju, ali u ovome slučaju kapacitet nosivosti obiju vrsta manji je od kapaciteta nosivosti druge vrste podijeljenog s natjecateljskim koeficijentom. Ovdje, ishod nije ovisan o početnim gustoćama. Grafički, ovaj slučaj je sličan trećem scenariju - ispod obje izokline populacije rastu, a iznad izoklina opadaju. No, kada su populacije obiju vrsta između izoklina, trajektorije su uvijek usmjerene u sjecište izoklina. Umjesto nadvladavanja (isključivanja) jedne vrste drugom, dvije vrste sposobne su ko-egzistirati u ovoj stabilnoj ravnotežnoj točki (otvoreni krug).

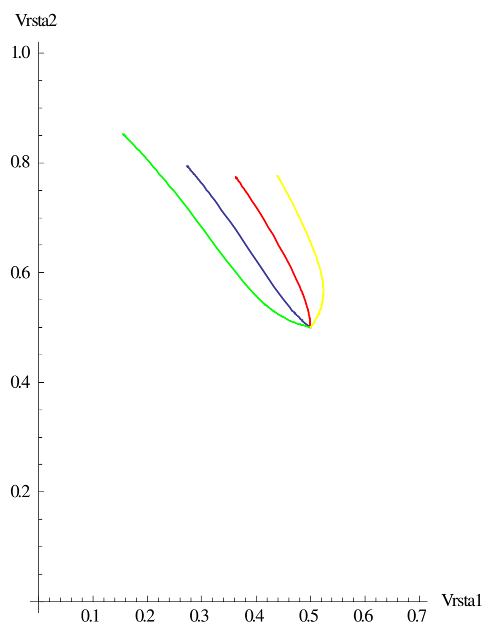


Graf 16. Koegzistencija obiju vrsta



Graf 17. Fiksna točka za koegzistenciju obiju vrsta

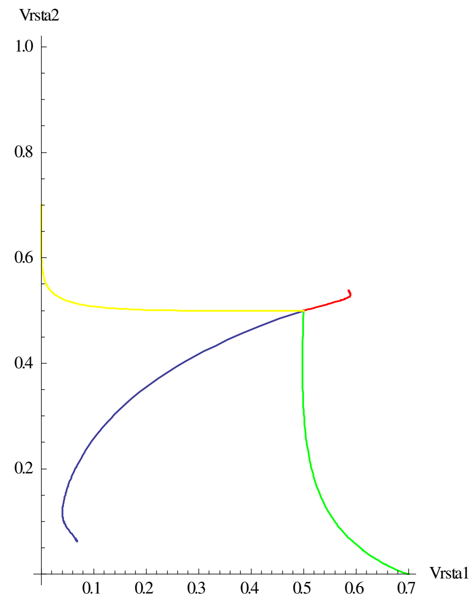
I) Utjecaj rasta/ pada koeficijenta natjecanja α



Graf 18. Utjecaj rasta/ pada koeficijenta natjecanja α

Porastom koeficijenta natjecanja α_{12} i α_{21} nadvladavanje vrste 2 nad vrstom 1 je ubrzano.

II) Utjecaj rasta/pada kapaciteta nosivosti vrste 1 ili vrste 2

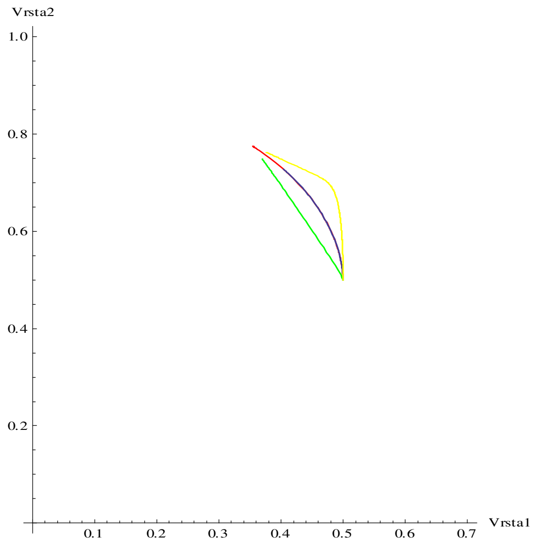


Graf 19. Utjecaj rasta/pada kapaciteta nosivosti vrste 1 ili vrste 2

- crvena linija: kapaciteti nosivosti obiju vrste su visoki
- plava linija: kapaciteti nosivosti obiju vrste su niski
- zelena linija: kapacitet nosivosti vrste 1 je viši, a vrste 2 znatno niži
- žuta linija: : kapacitet nosivosti vrste 2 je viši, a vrste 1 znatno niži

Porastom kapaciteta nosivosti obiju vrsta , vrste rastu, a smanjenjem padaju što je i logično. Povećanjem kapaciteta nosivosti vrste 1, populacija vrste 2 opada, a vrste 1 sporo raste. Povećanjem kapaciteta nosivosti vrste 2, populacija vrste 2 prvo stagnira, zatim vrlo sporo raste, a vrsta 1 pada do 0.

III) Utjecaj rasta/pada stope rasta vrste 1 ili vrste 2



Graf 20. Utjecaj rasta/pada stope rasta vrste 1 ili vrste 2

- crvena linija: stope rasta obiju vrste su visoke
- plava linija: : stope rasta obiju vrste su visoke niske
- zelena linija: stopa rasta vrste 1 je viša, a vrste 2 znatno niža
- žuta linija: stopa rasta vrste 2 je viša, a vrste 1 znatno niža

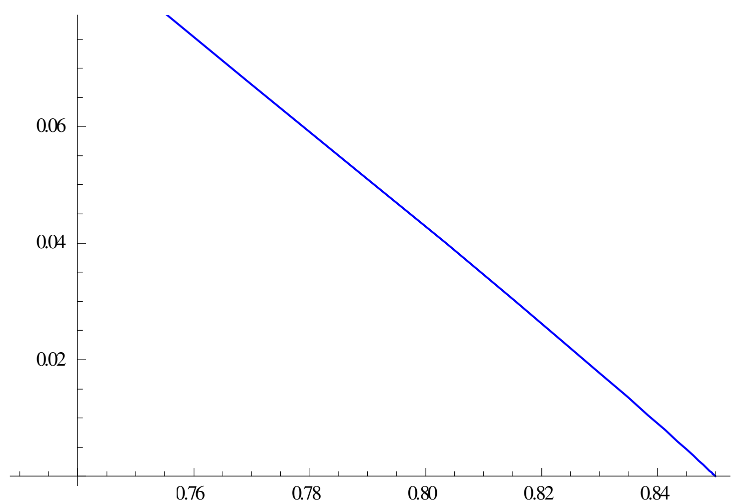
Može se primjetiti da, ako su stope rasta vrste 1 i 2 jednake, bilo obje niske ili visoke, grafovi se preklapaju jedan na drugog s tim da ako su obje visoke, vrsta 2 će natjecateljski nadvladati vrstu 1. Ako je stopa rasta viša u vrste 1, to nadvladavanje će se dogoditi brže, a ako je ista viša u vrste 2, sporije. Međutim, sam proces nadvladavanje je toliko spor, da možemo reći da ovdje uopće nema natjecanja, nego da su obje vrste sposobne živjeti zajedno.

4. IZRADA SIMULACIJA

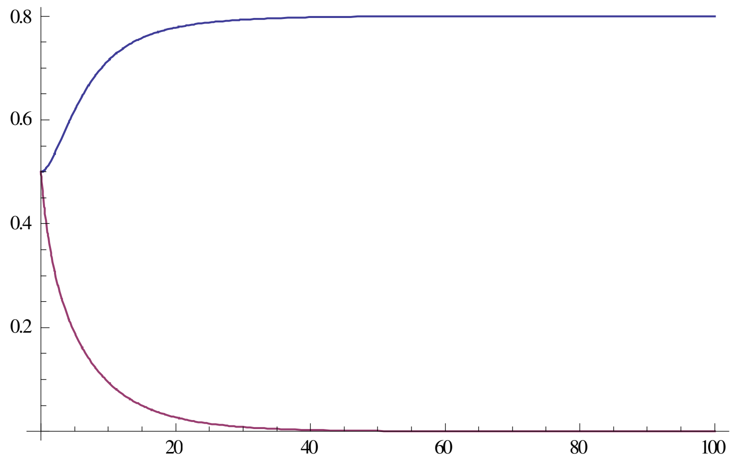
U radu je korišten programski paket Mathematica za simulacije prikazanih scenarija, kao i za prikaz vektorskog polja. Prikazani su algoritmi za svaki scenarij po jedan primjer:

4. 1. Vrsta 1 nadvladava vrstu 2

```
r1:=0.6
r2:=0.5
K1:=0.85
K2:=0.5
α12:=0.6
α21:=0.9
f[x_,y_]:=r1*x[t]*((K1-x[t]-α12*y[t])/K1)
g[x_,y_]:=r2*y[t]*((K2-y[t]-α21*x[t])/K2)
x0:=0.5
y0:=0.5
tmax:=50
rjesenje:=NDSolve[{x'[t]==f[x,y],y'[t]==g[x,y],x[0]==x0,y[0]==y0}
,{x,y},{t,0,tmax}]
rjesenje
rj11=ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/.rjesenje],{t,0,tmax},PlotSty
le→{{Blue},{RGBColor[0.1,0.8,0.9]}}]
```



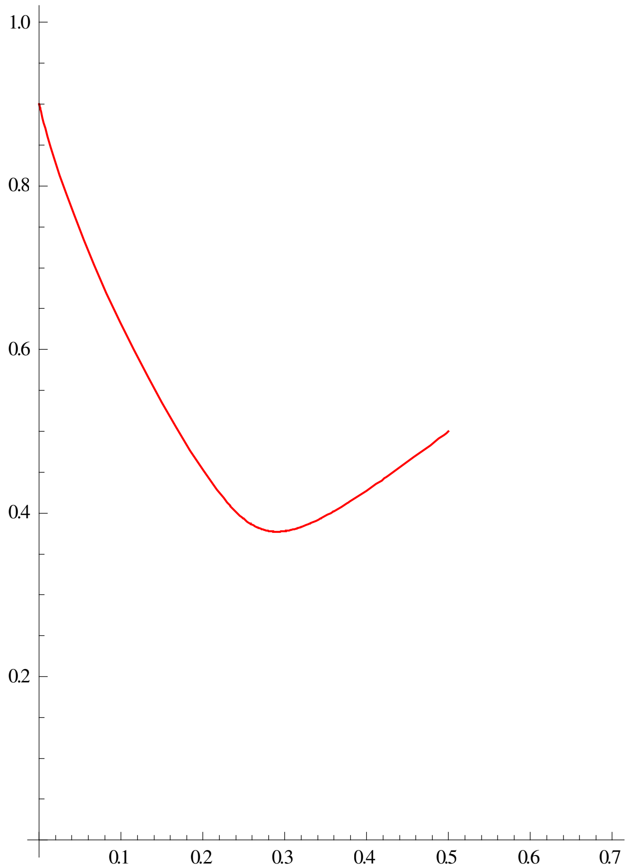
Graf 21. Vrsta 1 nadvladava vrstu 2



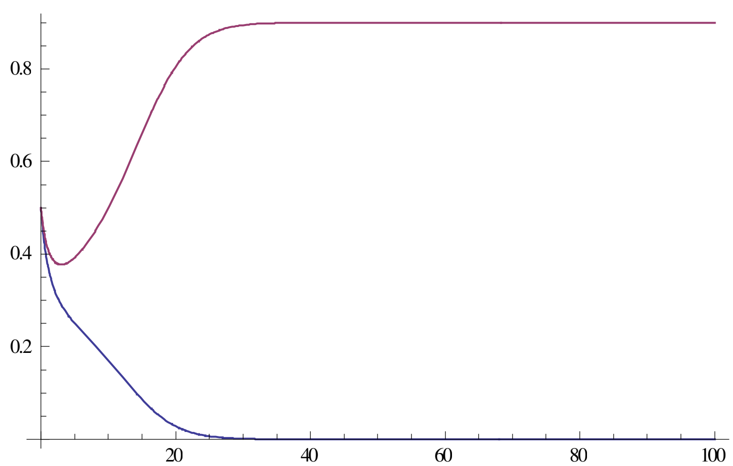
Graf 22. Evolucija veličina x i y u ovisnosti o vremenu gdje vrsta 1 nadvladava vrstu 2

4.2. Vrsta 2 nadvladava vrstu 1

```
r1:=0.59
r2:=0.59
K1:=0.6
K2:=0.9
α12:=1.08
α21:=1.8
f[x_,y_]:=r1*x[t]*((K1-x[t]-α12*y[t])/K1)
g[x_,y_]:=r2*y[t]*((K2-y[t]-α21*x[t])/K2)
x0:=0.5
y0:=0.5
tmax:=50
rjesenje:=NDSolve[{x'[t]==f[x,y],y'[t]==g[x,y],x[0]==x0,y[0]==y0}
,{x,y},{t,0,tmax}]
rjesenje
ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/.rjesenje],{t,0,tmax},PlotStyle→{{
Red},{RGBColor[0.1,0.8,0.9]}}]
```



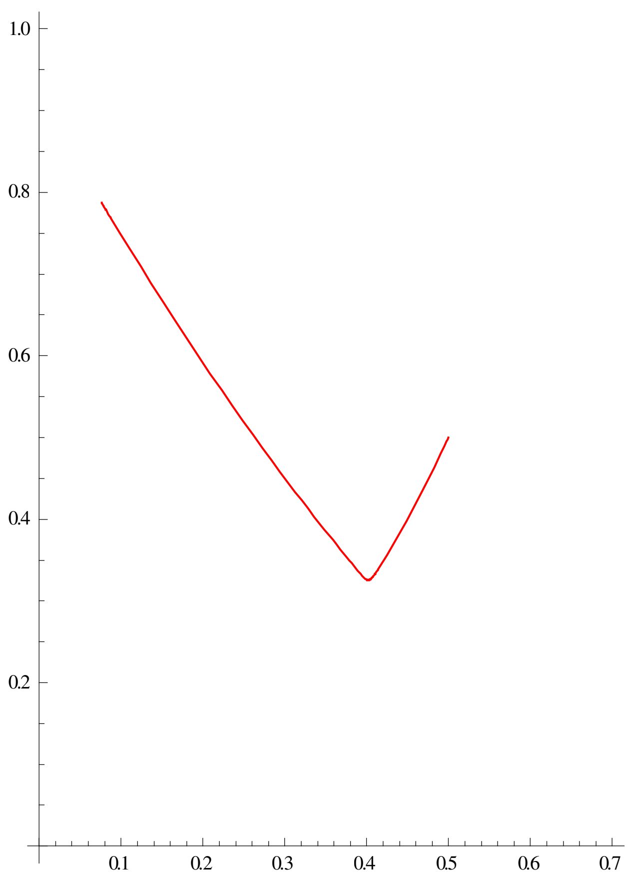
Graf 23. Vrsta 2 nadvladava vrstu 1



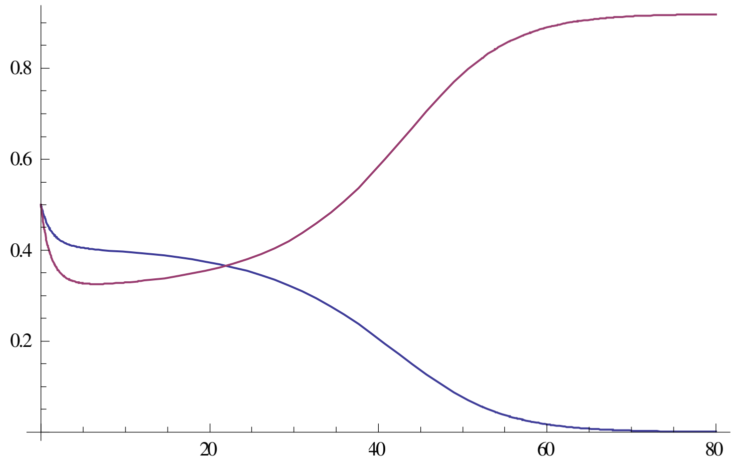
Graf 24. Evolucija veličina x i y u ovisnosti o vremenu gdje vrsta 2 nadvladava vrstu 1

4. 3. Eventualno prevladava vrsta 1 ili vrsta 2

```
r1:=0.40
r2:=0.99
K1:=0.8
K2:=0.92
α12:=1.25
α21:=1.48
f[x_,y_]:=r1*x[t]*((K1-x[t]-α12*y[t])/K1)
g[x_,y_]:=r2*y[t]*((K2-y[t]-α21*x[t])/K2)
x0:=0.5
y0:=0.5
tmax:=50
rjesenje:=NDSolve[{x'[t]==f[x,y],y'[t]==g[x,y],x[0]==x0,y[0]==y0}
,{x,y},{t,0,tmax}]
rjesenje
rj13=ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/.rjesenje],{t,0,tmax},PlotSty
le→{{Red},{RGBColor[0.1,0.8,0.9]}}]
```



Graf 25. Eventualno prevladava vrsta 1 ili vrsta 2

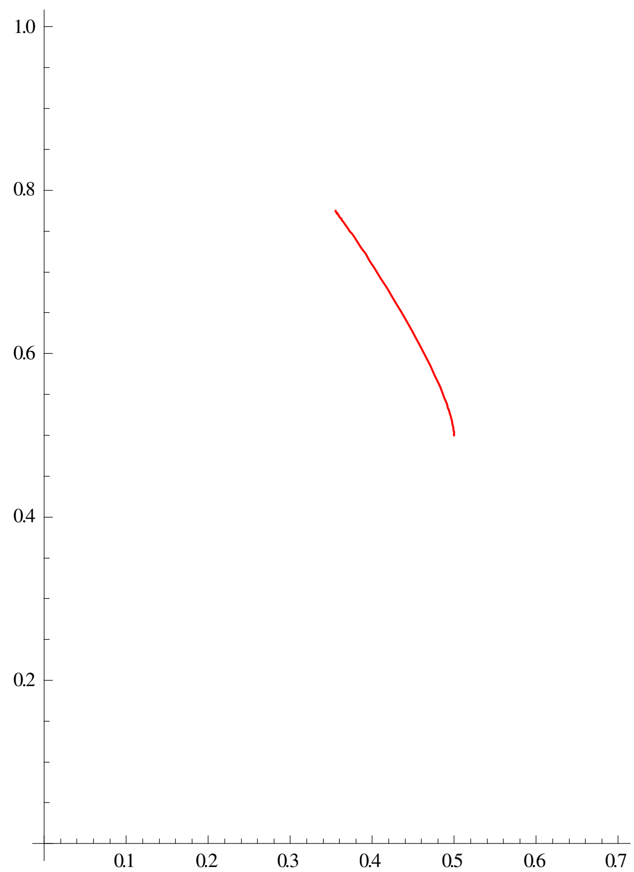


Graf 26. Evolucija veličina x i y u ovisnosti o vremenu gdje eventualno prevladava vrsta 1 ili vrsta 2

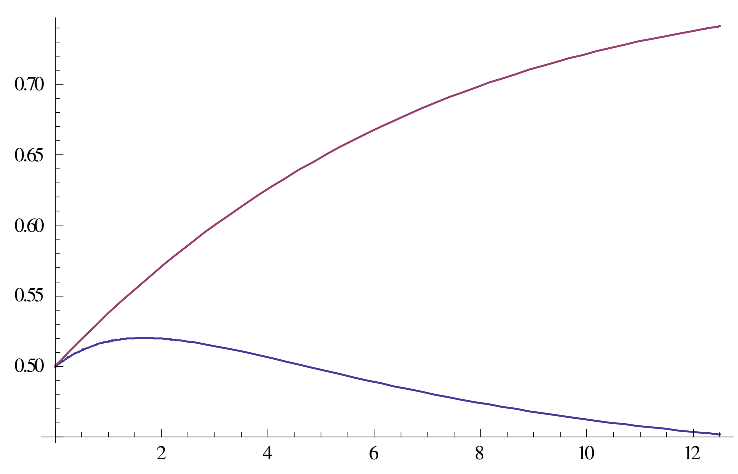
4. 4. Koegzistencija obiju vrsta

```
r1:=0.99
r2:=0.34
K1:=0.75
K2:=0.97
α12:=0.51
α21:=0.55
f[x_,y_]:=r1*x[t]*((K1-x[t]-α12*y[t])/K1)
g[x_,y_]:=r2*y[t]*((K2-y[t]-α21*x[t])/K2)
x0:=0.5
y0:=0.5
tmax:=50
rjesenje:=NDSolve[{x'[t]==f[x,y],y'[t]==g[x,y],x[0]==x0,y[0]==y0}
,{x,y},{t,0,tmax}]
rjesenje
rj14=ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/.rjesenje],{t,0,tmax},PlotSty
le→{{Red},{RGBColor[0.1,0.8,0.9]}}]

tmax:=12.5
Plot[Evaluate[{x[t],y[t],AxesOrigin→{0,0}}/.rjesenje],{t,0,tmax},PlotS
tyle→Automatic]
```



Graf 27. Koegzistencija obiju vrsta



Graf 28. Evolucija veličina x i y u ovisnosti o vremenu gdje koegzistiraju obje vrste

5. ZAKLJUČAK

U ovom radu predstavljena su najosnovnija saznanja o natjecateljskom Lotka-Volterrinom modelu. Prikazana su četiri najčešća ishoda meuđuvrsnih odnosa, a za simulacije korišten je programski paket *Mathematica* .

I. Vrsta 1 nadvladava vrstu 2:

- ovakav scenarij dolazi do izražaja ako je kapacitet nosivosti vrste 1 viši u odnosu na kapacitet nosivosti vrste 2 i ako je koeficijenta natjecanja α_{21} viši od koeficijenta natjecanja α_{12}.

II. Vrsta 2 nadvladava vrstu 1:

- ovakav scenarij dolazi do izražaja ako je kapacitet nosivosti vrste 2 viši u odnosu na kapacitet nosivosti vrste 1 i ako je koeficijenta natjecanja α_{12} viši od koeficijenta natjecanja α_{21}.

III. Eventualno prevladava vrsta 1 ili vrsta 2:

- ovakav scenarij dolazi do izražaja ako je stopa rasta vrste 2 viša u odnosu na stopu rasta vrste 1 i ako je koeficijent natjecanja α_{21} viši od koeficijenta natjecanja α_{12}.

IV. Koegzistencija obiju vrsta:

- ovakav scenarij dolazi do izražaja ako je stopa rasta vrste 1 viša u odnosu na stopu rasta vrste 2 i ako je kapacitet nosivosti vrste 2 viši kapaciteta nosivosti vrste 1

Ovaj model se odlikuje svojom jednostavnošću i konzistentnošću, premda u realnim istraživanjima odnosa vrsta je potrebno uključiti mnoge druge parametre, utjecaje i pretpostavke.

6. LITERATURA

1) I. Gusić: “Uvod u matematičke metode u inženjerstvu“, predavanja (2010./2011.), http://matematika.fkit.hr

2) A. Matić: “Natjecateljski lotka-volterra model“, seminarski rad, (2011.), http://matematika.fkit.hr

3) M. Sojčić i T.Šćulac: “Natjecateljski Lotka-Volterra model“, seminarski rad, (2010.), http://matematika.fkit.hr

4) http://en.wikipedia.org/