SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE

ZAVOD ZA MATEMATIKU

Uvod u matematičke metode u inženjerstvu

Akademska godina: 2010./2011.

FOURIEROVI REDOVI I INTEGRALI

Mia Ivanković, KPI

Mentori: dr.sc. Ivica Gusić, redoviti profesor

dr.sc. Miroslav Jeroković, viši asistent

Zagreb, kolovoz 2011.

SADRŽAJ

1. Uvod

Uobičajeni je postupak u matematici da se složenije funkcije, kao primjerice periodne funkcije, prikazuju pomoću jednostavnijih. Fourierovi redovi rastavljaju periodne funkcije na zbroj jednostavnih funkcija, sinusa i kosinusa.

Godine 1807. francuski fizičar i matematičar Joseph Fourier tvrdio je da se svaka funkcija *f(x)* na ograničenom intervalu može prikazati u obliku sume *harmonika*:

$$f(x) = C_0 + \Sigma\, C_n \sin\,(n\omega x + \varphi_n)$$

Iako su redove sličnih oblika promatrali i njegovi veliki prethodnici poput Bernoullija, D'Alemberta i Eulera, Fourierova metoda je bila toliko napredna da je trebalo proći još petnaest godina dok ne bude priznata od autoriteta njegovog doba: Laplacea, Poissona i Lagrangea. Oni su (opravdano) zamijerali Fourieru nedostatak matematičke strogosti, jer su neke njegove tvrdnje bile pogrešne. Fourier je konačno 1822. god. objavio rad pod naslovom *Théorie Analytique de la Chaleur* (Analitička teorija topline) u kojem analizira problem širenja topline, opisan parcijalnim diferencijalnim jednadžbama i koristi svoj revolucionarni način prikazivanja funkcija da bi riješio taj problem.[1]

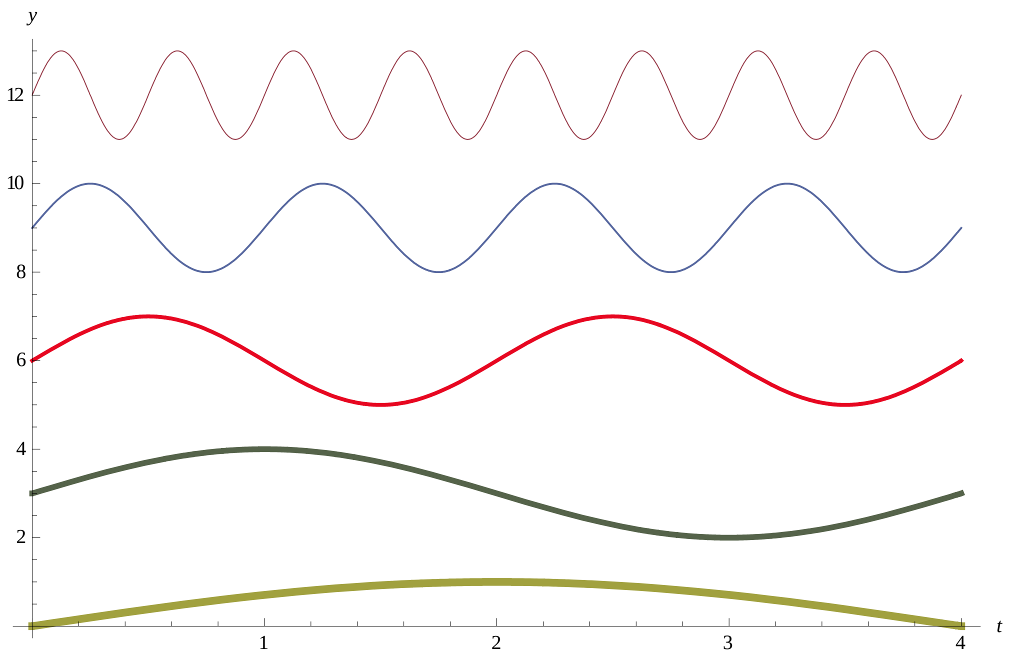
Matematičku strogost Fourierovom radu dali su poslije Dirichlet i Riemann.

2. Periodne funkcije i trigonometrijski redovi

Kažemo da je $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ **periodna funkcija**, ako postoji $T > 0$ takav da za svaki x iz domene funkcije f vrijedi

$$f(x) = f(x + T) \tag{1.1}$$

Broj T se naziva period od f. Najmanji period (ako postoji) nazivamo osnovni (ili temeljni) period. Grafovi takve funkcije dobivaju se periodnim ponavljanjem grafa u bilo kojem intervalu duljine T.[2]



Slika 1. Periodna funkcija

Cjelobrojni višekratnik perioda je period. Zaista,

$$f(x + 2T) = f(x + T + T) = f(x + T) = f(x), \forall x \in \mathbf{R}$$

prema tome, i $2T$ je period. Sada indukcijom zaključujemo da je kT period za svaki $k \in \mathbf{N}$. Ako je f periodna s periodom T, tada je dovoljno poznavati ponašanje funkcije na bilo kojem intervalu duljine T, recimo na $[a, a+T]$.

Temeljni period. Periodna funkcija ne mora imati osnovni period.

Također, funkcija definirana kao

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbf{Q}, \end{cases}$$

ima za period svaki pozitivni racionalni broj $T > 0$: ako je x racionalan, tada je i $x+T$ racionalan te je $f(x) = f(x+T) = 1$. Ako je pak x iracionalan, tada je i $x+T$ iracionalan. Zato je uvijek $f(x) = f(x + T)$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Temeljni period ne postoji, jer nema najmanjeg pozitivnog racionalnog broja.

Standardni primjeri periodnih funkcija su sinusne i kosinusne funkcije; funkcije $f = c =$ const. su također periodne funkcije u smislu definicije, jer zadovoljavaju uvjet (1.1) za svaki pozitivan broj T.

Sinusoide s cjelobrojnim frekvencijama:

$$\frac{1}{2}, \;\; \cos x, \;\; \sin x, \ldots \;\; , \cos nx, \;\; \sin nx$$

Zajednički period svih ovih funkcija je 2π. Prema tome je

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (1.2)$$

periodna funkcija s periodom 2π . Također, ako red

$$S(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1.3)$$

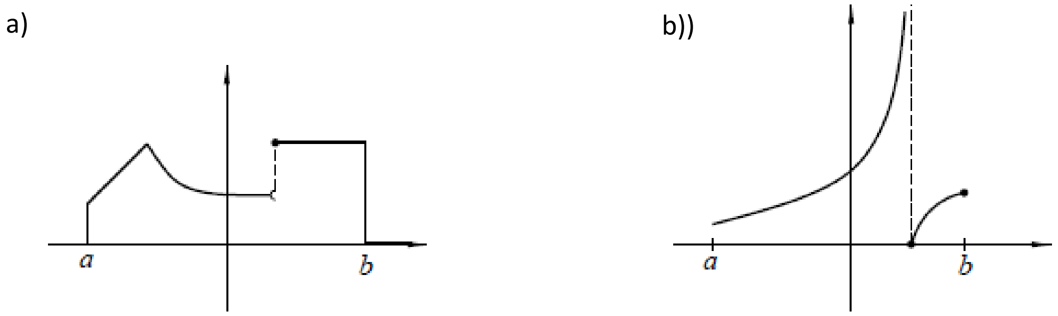
konvergira, on definira periodnu funkciju f perioda 2π. Ovaj red naziva se **trigonometrijski Fourierov red** za funkciju f. Koeficijenti a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, ... nazivaju se **Fourierovi koeficijenti** od f, dok se pribrojnici u formuli (1.3) nazivaju **harmonici**.

Kažemo da f zadovoljava **Dirichletove uvjete** na intervalu $[a, b]$, ako vrijedi

1) f je po dijelovima neprekinuta i njezini su prekidi prve vrste,

2) f je monotona ili ima najviše konačan broj strogih ekstrema.

Ako funkcija f zadovoljava Dirichletove uvjete, tada se interval $[a, b]$ može rastaviti na konačan broj podintervala na kojima je funkcija neprekinuta i monotona, a na rubovima podintervala ima konačne limese.



Slika 2. a) primjer funkcije koja zadovoljava Dirichletove uvjete

b) primjer funkcije koja ne zadovoljava Dirichletove uvjete

Teorem 1.[1] Konvergencija Fourierovog reda

Neka je f po dijelovima glatka periodna funkcija s periodom 2π koja zadovoljava Dirichletove uvjete. Tada njezin Fourierov red konvergira u svakoj točki $x \in [-\pi,\pi]$ *i za sumu S(x) reda vrijedi:*

(*i*) $S(x) = f(x)$, *ako je f neprekinuta u točki x*

(*ii*) $S(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$, *ako je x točka prekida za f* .

Dokaz Teorema 1.[1]

Ako je f neprekinuta u točki x , tada je $f(x-0) = f(x+0) = f(x)$ i dovoljno je pokazati da vrijedi

$$S_n(x) - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \to 0\,, \qquad \text{kad } n \to \infty, \forall x \in [-\pi,\pi]$$

gdje je $S_n(x)$ trigonometrijski polinom

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Koeficijenti a_0, a_k, b_k ($k > 1$) računaju se po Eulerovim formulama:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varepsilon)\,d\varepsilon \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varepsilon)\cos n\varepsilon\,d\varepsilon \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varepsilon)\sin n\varepsilon\,d\varepsilon \end{aligned} \tag{1.4}$$

Uvrstimo ih:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}[f(\varepsilon)\cos k\varepsilon \cos kx + f(\varepsilon)\sin k\varepsilon \sin kx]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varepsilon)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(\varepsilon - x)k\right]d\varepsilon = \begin{pmatrix}\varepsilon - x = z\\ d\varepsilon = dz\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kz\right]dz$$

Podintegralna funkcija je periodna s periodom 2π pa integraciju po intervalu [-π - *x*, π - *x*] možemo zamijeniti integracijom po intervalu [-π,π] . Koristeći

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\cos mx = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

imamo:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-z)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{1}{2}z}dz$$

Zatim prema

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}dx = \frac{1}{2}$$

dobivamo:

$$\frac{f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-0)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{1}{2}z}dz$$

$$\frac{f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+0)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{1}{2}z}dz$$

I zato vrijedi:

$$S_n(x) - \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}[f(x+z) - f(x-0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{1}{2}z}dz$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+z) - f(x+0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{2\sin\frac{1}{2}z}dz.$$

Ovi integrali teže k nuli kad $n \to \infty$. Funkcija

$$g(z) := \frac{f(x+z) - f(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}z}$$

je po dijelovima glatka na intervalu [0, π], jer je to i *f*. Također g zadovoljava Dirichletove uvjete jer postoji $\lim_{z\to 0} g(z)$:

$$g(z) = \frac{f(x+z) - f(x+0)}{z} \cdot \frac{z/2}{\sin z/2} \to f'(x+0) \quad \text{kad} \quad z \to 0$$

Dakle,

$$\int_0^{\pi} g(z)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z\,dz \to 0 \quad \text{kad} \quad n \to \infty$$

tj. drugi integral teži k nuli. Ista stvar je s prvim. Prema tome, vrijedi:

$$S(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)], \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Izvod Eulerovih formula[2]

Pretpostavimo da je *f(x)* periodična funkcija s periodom 2π, koju možemo prikazati trigonometrijskim redom.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Želimo odrediti koeficijente a_n, b_n u odgovarajućem redu. Prvo izračunamo koeficijent a_0 integrirajući prethodni izraz s obje strane od – π do π, te se dobiva:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right]dx$$

Parcijalna integracija daje nam sljedeću jednakost:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx)$$

Integriranjem dobivamo:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

Sada ćemo redom izračunati koeficijente a_1, a_2, ... sličnim postupkom. Množit ćemo s cos *mx*, gdje je m bilo koji fiksni pozitivan broj. Slijedi:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\right]\cos mx\,dx$$

Integriranjem dobivamo da je desna strana jednaka:

$$a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx]$$

Prvi integral i zadnji integral jednaki su nuli zato jer je podintegralni izraz neparna funkcija. Primjenjujući svojstva parnosti i neparnosti funkcije na drugi integral dobivamo izraz:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+m)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-m)\,dx$$

U ovoj formuli prvi integral s desne strane jednak je nuli za svaki *m* i *n* koji se uzimaju u obzir i posljednji integral također je jednak nuli kada je $n \neq m$ ili iznosi π za svaki $n = m$.

Proizlazi:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx \qquad m = 1,2,\dots$$

Konačno možemo izračunati koeficijente b_1, b_2,... pri čemu množimo sa sin *mx*, gdje je *m* bilo koji fiksni pozitivan broj. Integracijom dobivenog izraza od $-\pi$ do π dobivamo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\right]\sin mx\,dx$$

Integrirajući član po član, vidimo da je desna strana izraza jednaka:

$$a_0\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin mx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,dx]$$

Prvi integral jednak je nuli. Sljedeći integral je poput onih koji su razmatrani ranije i također je jednak nuli za svaki n = 1, 2,...

Dobivamo:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-m)x\,dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+m)x\,dx$$

Posljednji član ovog izraza jednak je nuli. Prvi član s desne strane jednak je nuli za svaki $n \neq m$ ili iznosi π za svaki $n = m$.

Proizlazi:

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx \qquad m = 1,2, \dots$$

Upisujući *n* umjesto *m* u ove formule, zajedno ćemo dobiti **Eulerove formule:**

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad n = 1,2, \dots$$

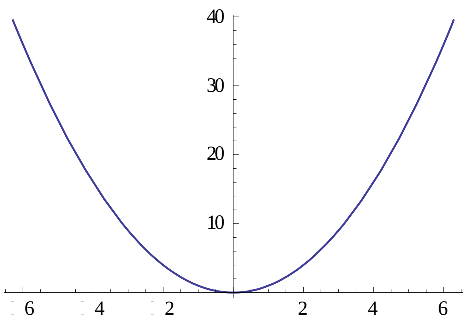
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \qquad n = 1,2, \dots$$

3. Parne i neparne funkcije

Funkcija f je **parna**, ako vrijedi

$$f(-x) = f(x)$$

za svaki realni x iz domene funkcije f. Ta domena stoga mora biti simetrična obzirom na ishodište. Graf parne funkcije je simetričan s obzirom na os Oy.

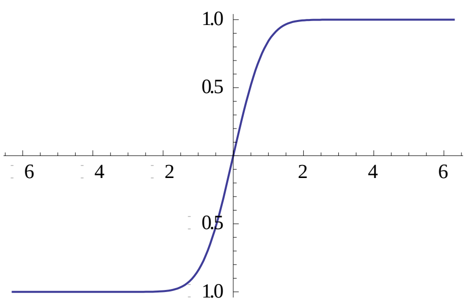


Slika 3. Parna funkcija s $f(0)= 0$

Funkcija f je **neparna**, ako vrijedi

$$f(-x) = -f(x).$$

Njezin je graf simetričan s obzirom na ishodište koordinatnog sustava.



Slika 4. Neparna funkcija

Funkcije 3, $2x^2$, $3x^4$, $\cos x$, $\sin(x^2)$ su parne. Funkcije $3x-2x^3$, $\sin x$ su neparne. Funkcija e^x niti je parna, niti neparna (i 'većina' funkcija je takva).

Ako je funkcija f , definirana na simetričnom intervalu $[-L, L]$, parna, odnosno neparna, tada će njezin Fourierov red sadržavati samo kosinus, odnosno samo sinus članove.

Fourierov red parnih i neparnih funkcija[1]

1. Ako je $f(x) = f(-x)$ za svaki x , tj. f parna funkcija, tada je $b_n = 0$ za svaki n , jer je odgovarajuća podintegralna funkcija u formuli $f(\varepsilon)\sin(\varepsilon)$ neparna.

Njezin Fourierov red glasi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

Koeficijenti uz kosinus funkcije računaju se formulama

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n \geq 0$$

2. Ako je $f(x) = -f(x)$ za svaki x , tj. ako je f neparna funkcija, tada zbog sličnih razloga vrijedi $a_n = 0$ za svaki n . Fourierov red glasi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

a koeficijenti se računaju formulama

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n \geq 1$$

Kažemo da smo funkciju f razvili u Fourierov red po kosinus, odnosno sinus funkcijama.

Fourierovi koeficijenti sume $f_1 + f_2$ su suma odgovarajućih Fourierovih koeficijenata funkcije f_1 i funkcije f_2.

4. Svojstva Fourierovog reda

4.1. Spektar periodne funkcije

Trigonometrijski Fourierov red može se napisati u obliku:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_0 x+b_n\sin n\omega_0 x)=\pm\frac{1}{2}c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin(n\omega_0 x+\varphi_n)$$

gdje je:

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

$$c_0=|a_0|$$

$$c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

$$\tan\varphi_n=\frac{a_n}{b_n}$$

c_n je **amplituda** n–tog harmonika, a φ_n **fazni pomak** n–tog harmonika. Niz (c_n) naziva se **(diskretni) amplitudni spektar** a (φ_n) **fazni spektar** funkcije f . Nizove $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ zovemo **(diskretni) sinusni**, odnosno **kosinusni spektar** funkcije f . Broj c_n naznačava s kojim intezitetom n–ti harmonik ulazi u rastav funkcije f . Parna funkcija će imati samo kosinusni, a neparna samo sinusni dio spektra.[1]

4.2. Jednoznačnost spektralnog prikaza

Teorem 2. *Ako periodne funkcije f i g zadovoljavaju Dirichletove uvjete i imaju isti diskretni spektar, onda se one podudaraju u svim točkama osim možda u točkama prekida.*

Funkcija je jednoznačno određena svojim amplitudnim i faznim spektrom. Isto vrijedi za sinusni i kosinusni spektar.

4.3. Deriviranje i integriranje Fourierovog reda

Dovoljan uvjet da bismo Fourierov red smjeli derivirati član po član jest da on konvergira uniformno prema funkciji f. To će biti slučaj kad god je funkcija f neprekinuta, a njezina derivacija f' zadovoljava Dirichletove uvjete (pa se može rastaviti u Fourierov red). Ako je f zadana samo na konačnom intervalu i na njemu je neprekinuta, to posebno znači da se njezine vrijednosti na krajevima intervala moraju podudarati.

Teorem 3. *Pretpostavimo da je periodna funkcija f perioda* 2π *neprekinuta na* **R** *i ima sljedeći Fourierov prikaz*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

Ako f ' zadovoljava Dirichletove uvjete, onda se ona može prikazati u obliku

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot n \cdot \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n) \cdot n \cdot \sin nx$$

To znači da se Fourierov red derivira član po član

Pri integriranju Fourierovog reda, red će uvijek konvergirati, ali se u općem slučaju može dobiti red koji nije Fourierov. Ako je u početnom redu koeficijent a_0 različit od nule, pri integriranju ćemo dobiti član $a_0 x$ koji ne pripada članovima Fourierovog reda. Dakako, taj se član također može rastaviti po sinus i kosinus funkcijama.[1]

4.4. Najbolja aproksimacija

Kako bi se odredila najbolja aproksimacija, prikladno je uzeti tzv. udaljenost najmanjih kvadrata, i odrediti minimum te funkcije s nepoznanicama A_N, B_N. $R_N(x)$ je predložena aproksimacija trigonometrijskim polinomom stupnja N, do kojeg se dobiva Fourierov red.

$$E := \int_{-L}^{L} |f(x) - R_N(x)|^2 dx$$

$$= \int_{-L}^{L} \left| f(x) - A_0 - \sum_{n=1}^{N} (A_N \cos\frac{n\pi x}{L} + B_N \sin\frac{n\pi x}{L}) \right|^2 dx$$

Minimume možemo dobiti uzimajući da je

$$\frac{\partial E}{\partial A_N} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial B_N} = 0$$

Dobivamo

$$\frac{\partial E}{\partial A_N} = 2\int_{-L}^{L} \left[f(x) - A_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\frac{k\pi x}{L} + B_k \sin k\pi x L \right) \right] \cos\frac{n\pi x}{L} dx$$

Zbog ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija, pod integralom ostaju samo dva člana:

$$\int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi x}{L} dx - A_N \int_{-L}^{L} \cos^2\frac{n\pi x}{L} dx = 0$$

i odavde

$$A_N = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi x}{L} dx = a_n$$

Slično vrijedi da je $B_N = b_n$. Ovime je pokazano da Fourierov polinom daje najbolju aproksimaciju za funkciju f među svim trigonometrijskim polinomima reda N.

5. Fourierov integral

Svaku periodnu funkciju možemo razviti u red po trigonometrijskim funkcijama, čije frekvencije čine niz, diskretan skup koji se sastoji od osnovne frekvencije ω_0 i svih njezinih cjelobrojnih višekratnika. Kažemo da periodna funkcija ima diskretan spektar.

Ako f nije periodna funkcija, možemo je na svakom konačnom intervalu razviti u Fourierov red, međutim, izvan tog intervala Fourierov red se periodno ponavlja i neće predstavljati danu funkciju. Pri tom će se, povećanjem intervala na kojem funkciju razvijamo u Fourierov red, smanjivati osnovna frekvencija ω_0 , jer vrijedi

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Želimo li neperiodnu funkciju $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ prikazati na čitavom $\mathbf{R}$ kao sumu harmoničkih titraja, morat ćemo to učiniti pomoću kontinuirano mnogo harmonika kojima se frekvencije neprekidno mijenjaju od 0 do ∞.

Prijelaz s konačnog na beskonačni interval:

Neka $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ zadovoljava Dirichletove uvjete na svakom konačnom intervalu. Za svaki $L > 0$, čim je x točka neprekidnosti, vrijedi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right), \qquad -L < x < L$$

Koeficijenti se računaju formulama:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(\varepsilon) \cos\frac{n\pi\varepsilon}{L} d\varepsilon$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(\varepsilon) \sin\frac{n\pi\varepsilon}{L} d\varepsilon$$

Dakle,

$$f(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(\varepsilon) d\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(\varepsilon) \cos\frac{n\pi}{L} d\varepsilon \cdot \cos\frac{n\pi x}{L} + \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(\varepsilon) \sin\frac{n\pi}{L} d\varepsilon \cdot \sin\frac{n\pi}{L} \right)$$

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{1}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L} f(\varepsilon)\cos\frac{n\pi}{L}(x-\varepsilon)\,d\varepsilon$$

Pustimo da $L \to \infty$ Ako je ispunjeno $\int_{-\infty}^{\infty}|f(\varepsilon)d\varepsilon| < \infty$, prvi član će težiti k nuli. Nadalje,

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L}, \qquad \Delta\alpha_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{\pi}{L}$$

Tada ćemo imati

$$f(x) = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\alpha_n\int_{-L}^{L} f(\varepsilon)\cos\alpha_n(x-\varepsilon)\,d\varepsilon$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon)\cos\alpha(x-\varepsilon)d\varepsilon$$

Ova se formula naziva **Fourierova integralna formula**, a integral s desne strane **Fourierov integral**.

Teorem 1. *Ako je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ po dijelovima glatka na svakom konačnom intervalu i apsolutno integrabilna, tada postoji njezin Fourierov integral i vrijedi*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon)\cos\alpha(x-\varepsilon)d\varepsilon$$

$$= \begin{cases} f(x) & \text{ako je } f \text{ neprekinuta u } x \\ \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)] & \text{ako je } x \text{ točka prekida za } f \end{cases}$$

Integral

$$\tilde{f}(x) := \int_0^{\infty}(A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x)d\alpha$$

naziva se **Fourierov integral** funkcije f . Funkcije $\alpha \to A(\alpha), \alpha \to B(\alpha)$ nazivaju se **kosinusni**, odnosno **sinusni spektar** od f i računaju se formulama

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon)\cos\alpha\varepsilon\, d\varepsilon$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon)\sin\alpha\varepsilon\, d\varepsilon$$

Kažemo da smo funkciju f rastavili na harmonična titranja čije su frekvencije svi pozitivni brojevi $0 < \alpha < \infty$

Ako funkcija *f* zadovoljava uvjet

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \qquad \text{za svaki } x,$$

tj. ako u točkama prekida ima vrijednost jednaku aritmetičkoj sredini limesa s desne i s lijeve strane, tada sinusni spektar vrijedi za svaki *x* - funkcija se podudara sa svojim Fourierovim integralom.

Kosinusni i sinusni spektar određuju **amplitudni spektar** am(α) funkcije *f*,

$$\mathrm{am}(\alpha) := \sqrt{A(\alpha)^2 + B(\alpha)^2}$$

Parna funkcija nema sinusnog spektra, tj. $B(\alpha) = 0$, neparna funkcija nema kosinusnog spektra, tj. $A(\alpha) = 0$:

f parna

$$f(x) = \int_0^\infty A(\alpha) \cos \alpha x \, d\alpha$$

$$A(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\varepsilon) \cos \alpha\varepsilon \, d\varepsilon$$

$$\mathrm{am}(\alpha) = |A(\alpha)|$$

f neparna

$$f(x) = \int_0^\infty B(\alpha) \sin \alpha x \, d\alpha$$

$$B(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\varepsilon) \sin \alpha\varepsilon \, d\varepsilon$$

$$\mathrm{am}(\alpha) = |B(\alpha)|$$

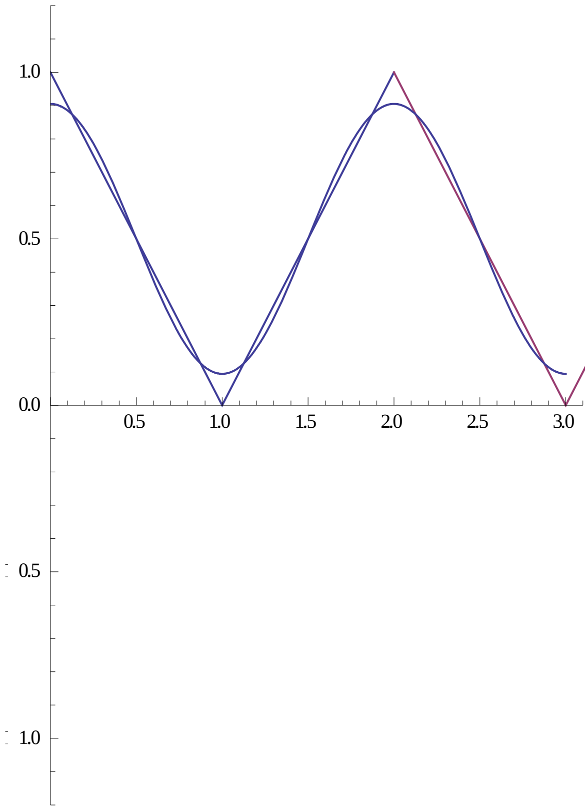
6. Primjeri iz Mathematice

Na sljedećim slikama prikazani su primjeri grafičkih prikaza Fourierova reda s pripadajućim Fourierovim koeficijentima.

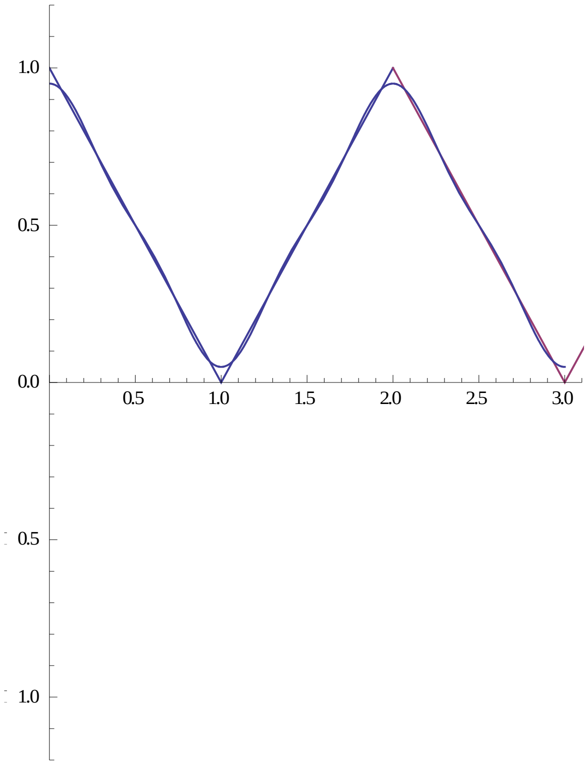
$$g(x) := \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

Pod pojmom broja elementa aproksimacije odnosi se na broj elemenata Fourierovog reda, *N*. Dakle, umjesto beskonačno elemenata Fourierovog reda, u praksi aproksimiramo s konačnim brojem elemenata Fourierovog reda, u ovom slučaju s od 1 do 4 elementa.

a) Usporedba iste funkcije s različitim brojem elemenata aproksimacije trigonometrijskih polinoma



Slika 5. Parna funkcija s jednim elementom aproksimacije



Slika 6. Parna funkcija s četiri elementa aproksimacija

Na slikama 5. i 6. prikazani su Fourierovi redovi za parnu funkciju s time da je na slici 5 funkcija aproksimirana jednim elementom aproksimacije, dok na slici 6 je funkcija aproksimirana s četiri elementa aproksimacije. Vidljivo je da je bolja aproksimacija na slici 6 gdje je aproksimirano s 4 elementa Fourierova reda. Povećanjem broja elemenata aproksimacije, smanjuje se pogreška *E*:

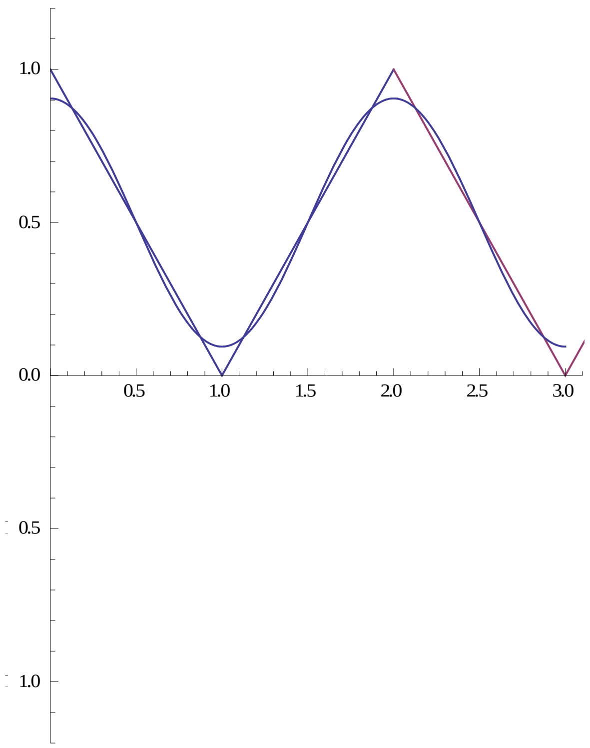
$$E := \int_{-L}^{L} |f(x) - R_N(x)|^2 dx$$

U tablici 1 su prikazani Fourierovi koeficijenti za navedene funkcije.

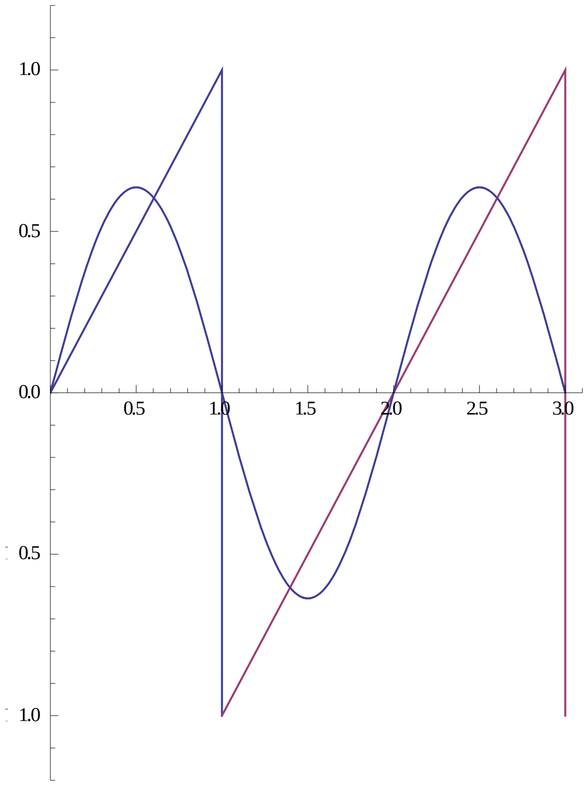
Tablica 1. Usporedba Fourierovih koeficijenata za istu funkciju s različitim brojem elemenata aproksimacije trigonometrijskih polinoma

	Parna funkcija s jednim elementom aproksimacije	**Parna funkcija s četiri elementa aproksimacije**
a_0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
a_n	$\left\{\frac{4}{\pi^2}\right\}$	$\left\{\frac{4}{\pi^2}, 0, \frac{4}{9\pi^2}, 0\right\}$
b_n	$\{0\}$	$\{0,0,0,0\}$

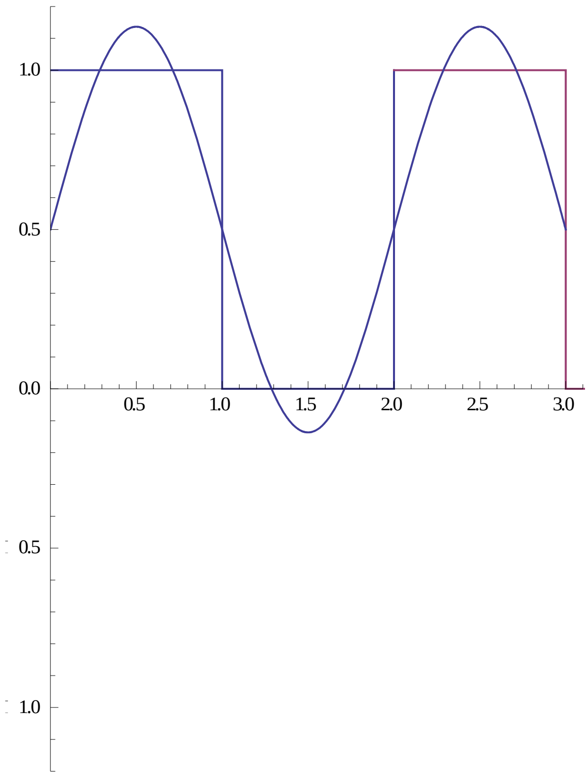
b) Usporedba različitih funkcija s jednakim brojem elemenata aproksimacije trigonometrijskih polinoma



Slika 7. Parna funkcija s jednim elementom aproksimacije



Slika 8. Neparna funkcija s jednim elementom aproksimacije



Slika 9. Ni parna ni neparna funkcija s jednim elementom aproksimacije

Na slikama 7, 8 i 9 prikazane su parna, neparna i niti parna ni neparna funkcija s jednim elementom aproksimacije. Na tablici 2 su prikazani Fourierovi koeficijenti za navedene funkcije. Vidljivo je da kod parne funkcije ne postoji sinusni član, tj. koeficijent b_1 je 0. Također kod neparne funkcije nema kosinusnog člana, koeficijent a_1 je 0. Kod niti parne niti neparne funkcije u načelu postoje i sinusni i kosinusni članovi, no u ovom primjeru nema kosinusnog člana, dakle a_1 je 0.

Tablica 2. Usporedba Fourierovih koeficijenata za različite funkcije s istim brojem elemenata aproksimacije trigonometrijskih redova

	Parna funkcija s jednim elementom aproksimacije	**Neparna funkcija** s jednim elementom aproksimacije	**Ni parna ni neparna** s jednim elementom aproksimacije
a_0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
a_1	$\frac{4}{\pi^2}$	0	0
b_1	0	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{2}{\pi}$

6.1. Izvorni kôd iz programa Mathematica

```
Manipulate[
 Module[{L,f,x,step,tooth,a0,an,bn,aotext,g,fourier},
  L=1;f[x,1]=x+1;f[x,2]=1-x;f[x,3]=x;f[x,4]=x;f[x,5]=0;f[x,6]=1;
  step[1]=Table[{{i-1,1},{i,0},{i+1,1}},{i,1,3,2}];
  step[3]=Table[{{(i-2),-1},{i,1},{i,-1}},{i,1,3,2}];
  step[5]=Table[{{(i-
1),1},{i,1},{i,0},{(i+1),0},{(i+1),1}},{i,1,3,2}];tooth=ListLinePlot[step[choice],P
lotRange→{{0,3.1},{-1.2,1.2}},AspectRatio→1.5,ImageSize→{200,300}];
  a0=1/(2L) (∫_-L^0 f[x, choice] ⅆx + ∫_0^L f[x, choice+1] ⅆx);
  an=Table[1/L
(∫_-L^0 (f[x, choice] Cos[(i π x)/L]) ⅆx + ∫_0^L (f[x, choice+1] Cos[(i π x)/L]) ⅆx),{i,1,n}];
  bn=Table[1/L
(∫_-L^0 (f[x, choice] Sin[(i π x)/L]) ⅆx + ∫_0^L (f[x, choice+1] Sin[(i π x)/L]) ⅆx),{i,1,n}];
  a0text=Row[{Style["a",Italic]_0," = ", TraditionalForm[a0]}];
  antext=TraditionalForm[an];
  bntext=TraditionalForm[bn];
```

```
g[x_]:=a0+∑_{i=1}^{n} (an[[i]] Cos[(i π x)/L] + bn[[i]] Sin[(i π x)/L]);fourier=Plot[g[x],{x,0,3},PlotRange→{{0,3.1},{-1.2,1.2}},AspectRatio→1.5,ImageSize→{200,300}];
  Show[{tooth,fourier},ImageSize→{300,400}]],
 {{choice,1,"funkcija"},{1→"     sawtooth 1     \n    (parna funkcija)     ",3→"     sawtooth 2     \n    (neparna funkcija)     ",5→"     square wave     \n(ni parna ni neparna)"},ControlType→Setter,ControlPlacement→Top},
 {{n,1,"broj perioda"},Range[4],ControlType→Setter,ControlPlacement→Top},
 Delimiter,
 Style["Fourierovi koeficijenti",Bold],
 "                                                                              ",
 Dynamic[Text[Style[a0text,16]]],
 Delimiter,
 Text@Style[Row[{Style["an",Italic],": ",
     Dynamic[antext]}],16],
 Delimiter,
 Text@Style[Row[{Style["bn",Italic],": ",
     Dynamic[bntext]}],16],
 {aotext2,ControlType→None},
 {{antext,{TraditionalForm[4/π^2]}},ControlType→None},
 {{bntext,{TraditionalForm[0]}},ControlType→None},
 ControlPlacement→Left,TrackedSymbols⧴{n,choice}]
```

7. Literatura

1. N. Elezović, „Fourierov red i Laplaceove transformacije", Element (2006)
2. A. E. Kreyzig, "Advanced engineering mathematics", John Wiley & Sons Inc (1995)
3. http://demonstrations.wolfram.com/FourierSeriesForThreePeriodicFunctions/