SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TENOLOGIJE
ZAVOD ZA MATEMATIKU
DIPLOMSKI STUDIJ EKOINŽENJERSTVO

SEMINARSKI RAD

MODEL SUŽIVOTA GDJE JEDNA VELIČINA OMETA DRUGU

Voditelj rada:
dr.sc.Ivica Gusić, red.prof.
dr.sc. Miroslav Jerković, viši asistent

Studenti:
Kristina Janžetić
Lara Karužić
Petar Krajnović

Srpanj, 2011.

SADRŽAJ

1. UVOD

Nijedan organizam nije sam na ovome svijetu, već barem dio svog života provodi u nekakvoj zajednici. Svaki organizam rođenjem pripada zajednici te populaciji određene vrste koja na istom staništu koegzistira s populacijama istih ili drugih vrsta.

Organizmi djeluju jedni na druge, kako unutar populacije, tako i među populacijama. Međuodnosi se mogu kretati od simbiotičkog načina suživota do borbe za opstanak. Jednostavnija međudjelovanja mogu se modelirati pa tako i odnos među populacijama gdje jedna populacija na drugu utječe samo redukcijom broja njenih jedinki, dok ta druga populacija na prvu ne utječe uopće.

Model suživota gdje jedna vrsta ometa drugu jednostavan je matematički model koji se može koristiti u svrhu promatranja i shvaćanja kako će se razvijati i ponašati dvije skupine jedinki dviju različitih vrsta, a da su pritom na neki način izolirane od ostalih vrsta, pri čemu jedna vrsta na drugu utječe samotako da joj smanjuje kapacitet.

2. DINAMIČKI SUSTAVI

Dinamika općenito govori o promjeni, stoga se može reći da dinamički sustav opisuje međusobnu zavisnost sustava varijabli i njihovu promjenu u vremenu. Dinamički sustavi opisani su diferencijalnim i diferencijskim jednadžbama.

Dinamički sustavi mogu biti kontinuirani, diskontinuirani te kombinacija navedenih (hibridini). Kontinuiran ("fluidan", neisprekidan) je onaj sustav koji pokazuje da u proizvoljno malenom vremenskom periodu dolazi do promjene vrijednosti varijabli (dok su parametri sustava stalni – na primjer parametar K, osim, naravno, u slučaju kada sustav miruje). Takvi su sustavi opisani diferencijalnim jednadžbama, i intuitivno su najbliži stvarnim uvjetima u prirodi. Diskontinuirani (diskretan, isprekidan, skokovit) je onaj sustav kod kojeg se promjene ne događaju stalno, nego u diskretnim vremenskim intervalima.

Ponašanje dinamičkih sustava moguće je predočiti orbitama (trajektorijama), koje se, nakon dovoljno vremena, mogu razviti u skup koji nazivamo atraktorima. Atraktori čine dio faznog prostora promatranog sustava, odnosno njih smatramo geometrijskim podskupom faznog prostora. Orbita dinamičkog sustava unutar atraktora može biti periodna ili kaotična. Geometrijska predodžba dinamičkih sustava olakšava nam razumijevanje promatranog sustava.

Da bi se moglo predvidjeti ponašanje dinamičkog sustava za neko određeno vremensko razdoblje ili da bi se mogla proučavati povijest dinamičkog sustava, potrebno je riješiti njegovu jednadžbu. Problem je što se mnogi sustavi ne mogu zapisati pomoću jedne jednadžbe, a čak i da se mogu, ta jednadžba (ili sustav jednadžbi) najčešće nije eksplicitno rješiva. Cilj nije pronaći točna rješenja jednadžbi, cilj je odgovoriti na pitanja poput „Hoće li se sustav umiriti do stacionarnog stanja, a ako hoće, koja su moguća stacionarna stanja?" ili „Ovisi li ponašanje sustava kroz duže razdoblje vremena o početnim uvjetima?". Znači, cilj je kvalitativno opisati sustav. Važno je takoder opisati fiksne točke ili stacionarna stanja danog dinamičkog sustava jer su to vrijednosti varijabli koje se neće promijeniti s vremenom. Jednako tako su zanimljive i periodične točke jer su to stanja sustava koja se ponavljaju nakon određenog perioda vremena. Pri proučavanju dinamičkih sustava važnu ulogu imaju trajektorije. Trajektorija je putanja ili orbita točke (x_0, y_0) kroz sva vremena, odnosno to je skup svih stanja (život) dinamičkog sustava (koji ima gornje početne uvjete – naime, tek sve trajektorije opisuju sva stanja).

Dinamički sustavi mogu biti linearni (jako rijetko) ili nelinearni. Nelinearni dinamički sustav je onaj sustav čiji je model opisan nelinearnim jednadžbama.

2.1. Logistička jednadžba

Rast neke populacije može se opisati jednom od jednostavnijih nelinearnih diferencijalnih jednadžbi 1. reda – *logističkim modelom*, koji predstavlja kontinuirani logistički model:

$$x' = \frac{dx}{dt} = kx \cdot \left(1 - \frac{x}{M}\right)$$

gdje je t vrijeme, k koeficijent rasta populacije, a M označava nosivi kapacitet, odnosno maksimalnu veličinu koju populacija može dosegnuti. dx/dt predstavlja brzinu rasta populacije i možemo to kraće zapisati kao x'. Ovaj model često se naziva populacijskim modelom upravo zato jer se koristi za izračunavanje kretanja neke populacije, bilo neke biljne ili životinjske vrste, uključujući i ljudsku.

3. MODEL SUŽIVOTA GDJE JEDNA VELIČINA OMETA DRUGU

Model predstavlja situaciju gdje jedna varijabla ometa drugu pri čemu ta druga ne ometa prvu, znači jedna nesimetrična situacija. Ovaj model nije jedini način kako ćemo nešto modelirati, ali je svakako jedan od najjednostavnijih nelinearnih modela. Od varijabli imamo *x*, *y* i *t*. Ako govorimo u biološkim terminima, varijable *x* i *y* predstavljaju pojedine organizme, odnosno vrste, a *t* predstavlja vrijeme. Imamo situaciju u zatvorenom sustavu gdje varijabla *y* ne utječe na varijablu *x*. U tom sustavu, varijabla *x* se normalno razvija i jednako ponaša bez obzira postoji li varijabla *y* u sustavu ili ne postoji. Ako varijabla *y* postoji, onda varijabli *x* nije bitno koliko je varijable *y* u okolini, jednostavno varijabla *y* uopće ne utječe na varijablu *x*. Međutim, varijabla *x* ometa varijablu *y* i u biti što je varijabla *x* veća po iznosu, varijabli *y* je teže i manje je ima. U sustavu postoji neki određeni maksimum do kojeg može ići varijabla *x* i do kojeg može ići varijabla *y*. Taj maksimum predstavlja nosivi kapacitet do kojeg se svaka pojedina varijabla može razvijati. Logistička jednadžba za razvoj varijable *x* postavlja se na sljedeći način:

$$x' = \frac{dx}{dt} = ax \cdot (1 - \frac{x}{K})$$

Imamo jednu veličinu (*x*) koja se razvija u vremenu (*t*). Brzina razvoja te veličine ovisi o trenutnoj količini veličine te njenom nosivom kapacitetu (*K*). Kada nosivi kapacitet teži beskonačnosti ili ako je količina veličine jako malena, izraz *x/K* teži ka nuli. Tada se izraz u zagradi približava vrijednosti 1 što znači da je brzina razvoja veličine u tom slučaju praktički proporcionalna veličini. Zato je rast veličine eksponencijalan za male vrijednosti veličine. Pri velikim vrijednostima veličine izraz *x/K* teži vrijednosti 1 što znači da izraz u zagradi teži ka nuli pa se rast veličine eksponencijalno usporava i teži nekoj konstantnoj vrijednosti, a to je iznos nosivog kapaciteta. Drugim riječima, krivulja razvijanja opisana ovakvom jednadžbom ima sigmoidalan oblik i stupanj rasta ovisi o trenutnoj količini te veličine. Radi drugog pristupa tumačenju jednadžbe, ona se može prikazati i na sljedeći način:

$$x' = \frac{dx}{dt} = ax - ax \cdot \frac{x}{K}$$

Vidimo da imamo x^2. Ako je $0 < x < 1$, x^2 je još manji po iznosu te se drugi član za male vrijednosti veličine x praktički gubi. Koeficijent a predstavlja koeficijent razvoj veličine x pri malim kolicinama. S obzirom da se radi o razvijanju, tj. rastu veličine, $a > 0$.

Bitno je naglasiti da se radi o malim količinama jer postoji ograničenje, a to je K – nosivi kapacitet za x. Kad se približavamo nosivom kapacitetu, kao što je objašnjeno maloprije, rast veličine x se usporava. Logistička jednadžba za razvoj varijable y bez prisutnosti varijable x postavlja se na isti način kao i za razvoj varijable x:

$$y' = \frac{dy}{dt} = by \cdot (1 - \frac{y}{L})$$

Analogno logističkoj jednadžbi za razvoj veličine x, koeficijent b je koeficijent razvoja veličine y pri malim kolicinama, a L je nosivi kapacitet za veličinu y kada ne bi bilo varijable x. Medutim, ima je, i što je više ima, to više ometa razvoj veličine y pa se i kapacitet veličine y smanjuje. Najjednostavniji model je da zamislimo da veličina x nema drugog utjecaja na veličinu y osim što joj smanjuje kapacitet. Znači, veličina y se nastavlja jednako ponašati, a veličina x ne utječe na nju nikako drukčije osim tako što veličine y ne može biti onoliko koliko bi je bilo kad ne bi bilo veličine x. Prema tome, korekcije u gornjim jednadžbama uvodimo samo kod nosivog kapaciteta i to tako da se on umanjuje za neku funkciju od x, $f(x)$.

$$y' = \frac{dy}{dt} = by \cdot (1 - \frac{y}{L - f(x)})$$

Najjednostavniji model bio bi kod pretpostavke da se kapacitet veličine y linearno smanjuje s povećanjem veličine x i to u slucaju kad je $f(x) = x$. Međutim, to implicira da povećanje veličine x za 1 znači smanjenje nosivog kapaciteta za 1, a to nije skroz realno pa je bolje napisati $f(x) = cx$ pri čemu c označava neku konstantu što u prijevodu znači da neka jedinka x može ometati dvije, tri ili više jedinki y.

Kad se ove korekcije uzmu u obzir, gornja jednadžba poprima sljedeći oblik:

$$y' = \frac{dy}{dt} = by \cdot (1 - \frac{y}{L - cx})$$

Sustav logističkih jednadžbi za razvoj pojedinih varijabli

$$x' = \frac{dx}{dt} = ax \cdot (1 - \frac{x}{K})$$

$$y' = \frac{dy}{dt} = by \cdot (1 - \frac{y}{L - cx})$$

nelinearan je što znači da egzaktno rješavanje nije izgledno. U biti, iz prve logističke jednadžbe za razvoj veličine x, mi možemo odrediti x kao funkciju od t, ali uvrštavanjem dobivenog rješenja u logističku jednadžbu za razvoj veličine y u prisutnosti veličine x dobiva se komplicirana diferencijalna jednadžba koja se može riješiti numerički, ali nije praktično. Zato se pristupa kvalitativnom opisu rješenja.

4. PRIMJERI MODELA SUŽIVOTA GDJE JEDNA VELIČINA OMETA DRUGU U MATHEMATICI

U ovom poglavlju prikazani su primjeri u Mathematici koji se sastoje od grafova i komentara dobivenih rezultata. Proučavali smo utjecaj početnih uvjeta i parametara na sudbinu dviju vrsta. U daljnjem tekstu populacija jedne vrste (x) nazvana je "agresori", a druge (y) "žrtve".

Što se tiče parametara, prvo imamo koeficijente a i b kao brzinu ili intenzitet razvoja ili razmnožavanja agresora, odnosno žrtve. Koeficijent c govori o napasnosti agresora, tj. na koliko jedinki žrtava ima utjecaj jedna jedinka agresora. Zatim imamo kapacitete K i L koji nam govore kolika je maksimalna teoretska količina pojedine populacije do koje se ona može razmnožiti. Početni uvjeti x_0 i y_0 označavaju početnu količinu agresora, odnosno žrtve.

Agresori mogu dostići svoj maksimalan broj K jer žrtva nema nikakav utjecaj na njih, dok žrtva nikad neće ostvarirti puni brojčani potencijal.

4.1. Početno stanje sustava – ravnoteža

Sustav je u ravnoteži ako je:

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

što znači da je

$$ax = 0$$

$$by = 0$$

ili

$$1 - \frac{x}{K} = 0$$

$$1 - \frac{y}{L - c \times x} = 0$$

iz toga slijedi da je

$$K = x$$

$$L = y + c \times x$$

Ako uzmemo da je

$$x = 10$$

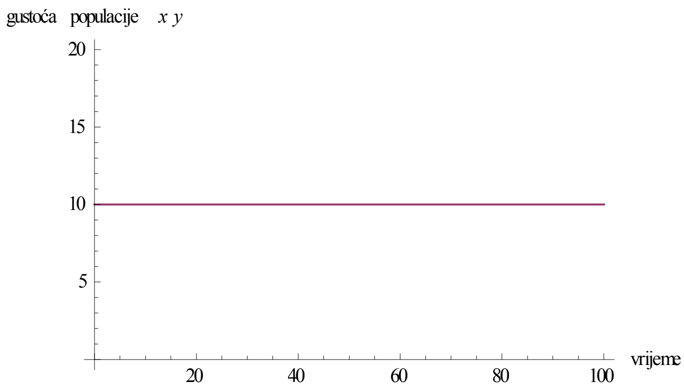
$$y = 10$$

Da bi sustav bio u ravnoteži *K* mora biti 10, a *L* 11.

- **Primjer 1.**

```
a:=0.1;
b:=0.1;
c:=0.1;

K:=10;
L:=11;

f[x_,y_]:=a* x[t]*(1-x[t]/K);
g[x_,y_]:=b * y[t]*(1-y[t]/(L-c*x[t]));

x0:=10;
y0:=10;
tmax:=100;

rjesenje:=NDSolve[{x'[t]==f[x,y],y'[t]==g[x,y],x[0]==x0,y[0]==y0}
,{x,y},{t,0,tmax}]

ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/.rjesenje],{t,0,tmax},Plot
Range→ All,AxesOrigin→ {0,0}, AxesLabel→{gustoć07a populacije
x , gustoć07a populacije y}]

velicinax:=x[t]/.Flatten[rjesenje][[1]]
velicinay:=y[t]/.Flatten[rjesenje][[2]]

Plot[Evaluate[{velicinax,velicinay}],{t,0,tmax},PlotRange→
All,AxesOrigin→ {0,0}, AxesLabel→{vrijeme, gustoć07a
populacije x  y}]
```

U primjeru 1. $x_0 = 10$ i $y_0 = 10$ što znači da je početan broj agresora, odnosno žrtve 10. K, broj do kojeg se agresor može razviti, je također 10, a pošto žrtve ne utječu na agresore ravotežni kapacitet agresora je uvijek jednak kojom god se brzinom razmnožavali. *c* je 0,1 što znači da je potrebno 10 agresora da bi se broj žrtava smanjio za 1. Da bi i ravnotežni kapacitet žrtava bio kroz cijelo vrijeme jednak potrebno je maksimalan broj žrtava povećati za 1 od početnog broja, tj. L = 11.



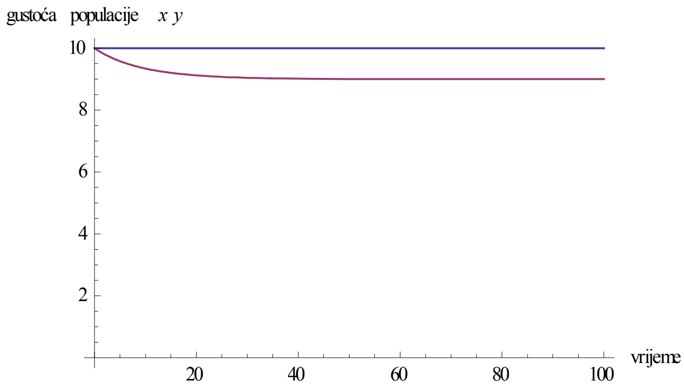
Graf 4.1. *Promjena gustoće populacije vrsta u vremenu kada je sustav u ravnoteži*

Iz grafa 4.1. možemo vidjeti da su u ravnoteži kapaciteti žrtava i agresora uvijek jednaki. Kako vrijeme prolazi, broj obiju populacija se ne mijenja.

4.2. Utjecaj koeficijenta *c*, odnosno utjecaj napasnosti agresora

4.2.1. $c = 0,2$

Povećanje koeficijenta *c* možemo gledati kao na povećani utjecaj agresora na žrtve što rezultira većim smanjenjem kapaciteta žrtava; jedan agresor počinje utjecati na veći broj žrtava. Svi ostali parametri ostaju isti samo se koeficijent *c* povećao s 0,1 na 0,2, što znači da pet agresora utječu na smanjenje kapaciteta žrtve za jedan.

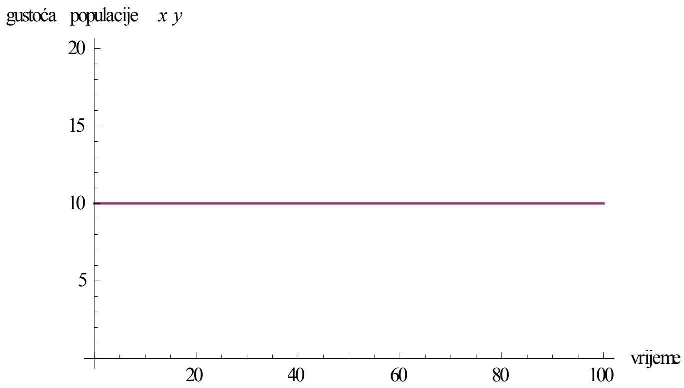


Graf 4.2. *Promjena gustoće populacije vrsta u vremenu kada je c = 0,2*

Na ovom grafu jasno možemo vidjeti kako se, povećanjem napasnosti agresora s vremenom smanjuje kapacitet žrtava.

4.2.2. c = 0,2 vraćanje u ravnotežno stanje

Kako u početku imamo 10 agresora, a koeficijent c je sada 0,2 znači da će tih 10 agresora utjecati na smanjenje kapaciteta žrtava za 2. Pošto je početna vrijednost žrtava 10 da bi sustav bio u ravnoteži koeficijent L treba biti 12. Da je sustav u ravnoteži možemo također vidjeti iz grafa 4.3.

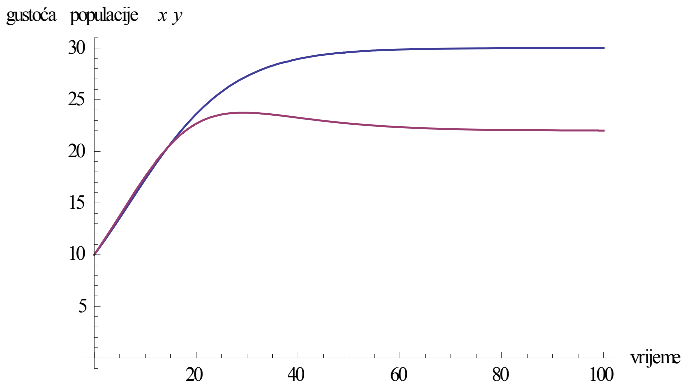


Graf 4.3. *Promjena gustoće populacije vrsta u vremenu kada je c = 0,2 i L = 12*

- **Primjer 2.**

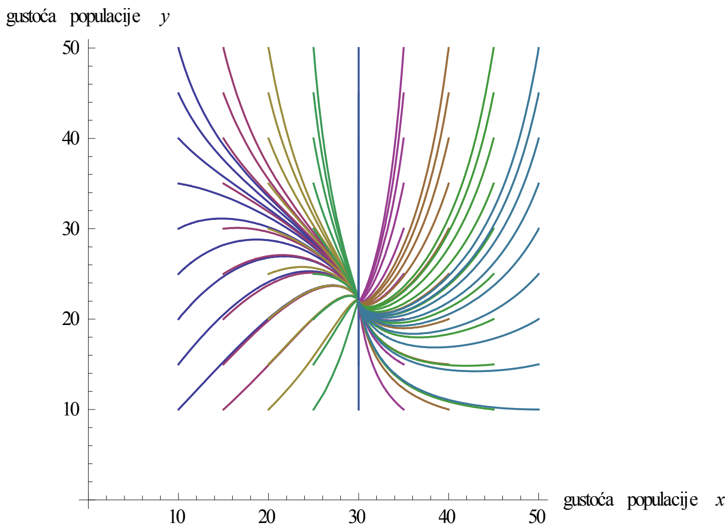
Utjecaj pomjene koeficijenata, parametara i početnih uvjeta proučavat ćemo na primjeru 2. U primjeru 2 broj do kojega se agresor može razviti je 30, a broj do kojeg se žrtva može razviti je 40. Početne vrijednosti agresora i žrtve su 10 kao u primjeru 1. Možemo reći da su u ovom primjeru bolji životni uvjeti nego u primjeru 1.

```
a:=0.1;
b:=0.1;
c:=0.6;

K:=30;
L:=40;

f[x_,y_]:=a* x[t]*(1-x[t]/K);
g[x_,y_]:=b * y[t]*(1-y[t]/(L-c*x[t]));

x0:=10;
y0:=10;
tmax:=100;

rjesenje:=NDSolve[{x'[t]==f[x,y],y'[t]==g[x,y],x[0]==x0,y[0]==y0}
,{x,y},{t,0,tmax}]

ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/.rjesenje],{t,0,tmax},Plot
Range→All,AxesOrigin→{0,0},AxesLabel→{gustoć07a populacije
x,gustoć07a populacije
y}]velicinax:=x[t]/.Flatten[rjesenje][[1]]
velicinay:=y[t]/.Flatten[rjesenje][[2]]

Plot[Evaluate[{velicinax,velicinay}],{t,0,tmax},PlotRange→
All,AxesOrigin→    {0,0},    AxesLabel→{vrijeme,    gustoć07a
populacije x  y}]
```



Graf 4.4. *Promjena gustoće populacije vrsta u vremenu - primjer 2*

Iz grafa 4.4. jasno možemo vidjeti kako su se obje vrste s poboljšanjem uvjeta za život počele razmnožavati. Također možemo vidjeti u kojem je vremenu broj agresora prešao određenu količinu te se kapacitet žrtava počeo smanjivati.



Graf 4.5. *Ovisnost promjene gustoće vrste 1 o promjeni gustoće vrste 2 - primjer 2*

Na grafu 4.5. prikazan je skup trajektorija koje opisuju životne cikluse dviju vrsta. Ovdje lijepo možemo vidjeti kako povećanje gustoće agresora (x) utječe na žrtvu (y). Kada gustoća agresora dostigne određenu vrijednost gustoća žrtava počinje padati.

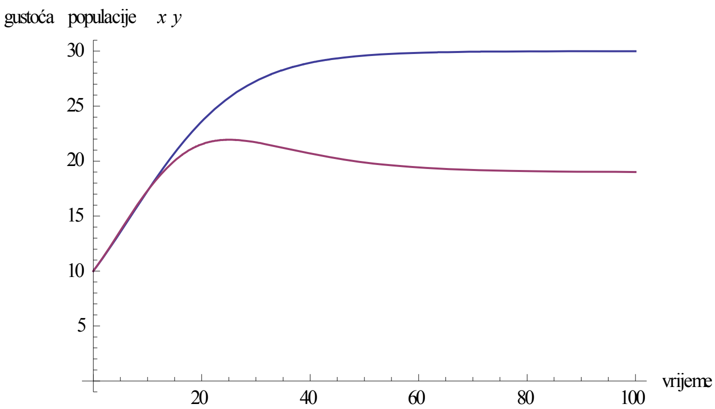
Trajektorije su definirane za različite početne uvijete x_0 i y_0 koji se kreću od vrijednosti 10 do 50 sa korakom 5. Određenom bojom označene su različite početne vrijednosti y za istu početnu vrijednost x. Tako su na primjer tamnoplavom bojom označene trajektorije za x_0 = 20, te y_0 = 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 ,45 i 50.

Zbog toga na ovom grafu možemo promatrati utjecaj početnih uvijeta. Ako je y_0 konstantan i ako povećavamo x_0, utjecaj agresora se povećava. Što je x_0 veći y će doseći sve manji maksimalan broj. Ako pak imamo konstantan x_0 i povećavamo y_0, y će doseći sve veći maksimalan broj.

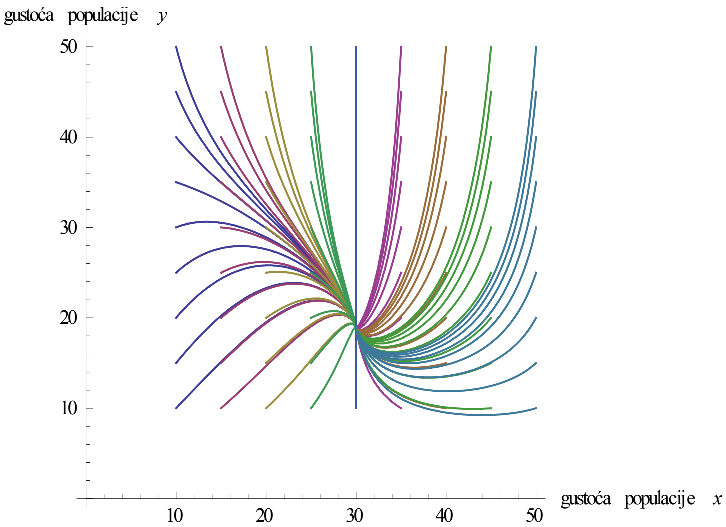
Kod početne vrijednosti $x_0 = 30$ možemo primjetiti pravac. To je zbog toga što je K, odnosno maksimalan kapacitet agresora 30 što znači da se broj agresora ne mijenja. Na tom pravcu nalaszi se i točka ponora trajektorija, (30,22) - to je fiksna točka u kojoj x ide prema svom kapacitetu, a y prema svom relativnom kapacitetu.

4.2.3. Povećanje koeficijenta *c*

$c = 0,7$



Graf 4.6. *Promjena gustoće populacije vrsta u vremenu kada je c = 0,7*

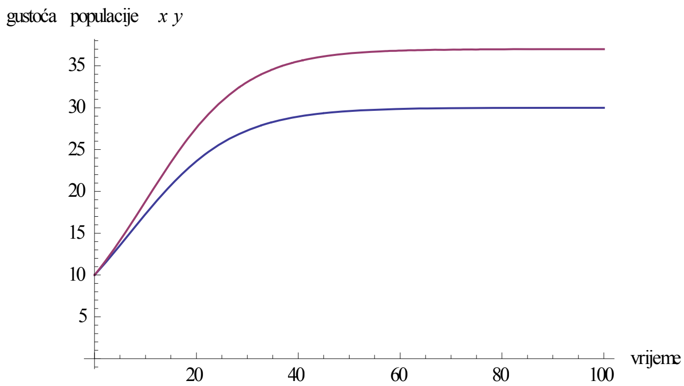


Graf 4.7. *Ovisnost promjene gustoće vrste 1 o promjeni gustoće vrste 2 kada je c = 0,7*

Ako povećamo utjecaj napasnosti agresora s 0,6 na 0,7 možemo vidjeti da će prije (graf 4.6.), odnosno pri manjem broju agresora (graf 4.6. i 4.7.) broj žrtava početi padati.

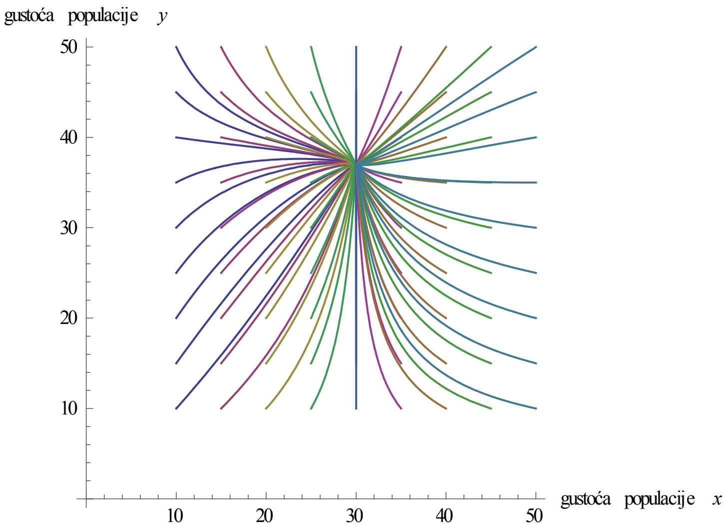
4.2.4. Smanjenje koeficijenta c

$c = 0{,}1$



Graf 4.8. *Promjena gustoće populacije vrsta u vremenu kada je c = 0,1*

Kada je $c = 0{,}1$, vidimo da je broj žtrava veći od broja agresora jer je njihov kapacitet veći od kapaciteta agresora, no agresori utječu na žrtve i usporavaju rast broja žrtava te žrtve nikad neće dostići svoj maksimalni kapacitet (L = 40).



Graf 4.9. *Ovisnost promjene gustoće vrste 1 o promjeni gustoće vrste 2 kada je c = 0,1*

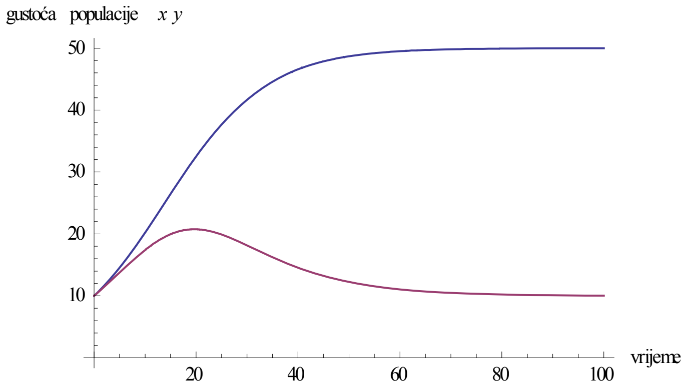
Iz grafa 4.9. pak možemo primjetiti da se točka ponora trajektorija podigla na višu vrijednost y u odnosu na c = 0,6. To je zbog toga što je utjecaj agresora manji pa se samim time i relativni kapacitet žrtava povećao.

4.3. Utjecaj parametra *K*, odnosno utjecaj kapaciteta agresora

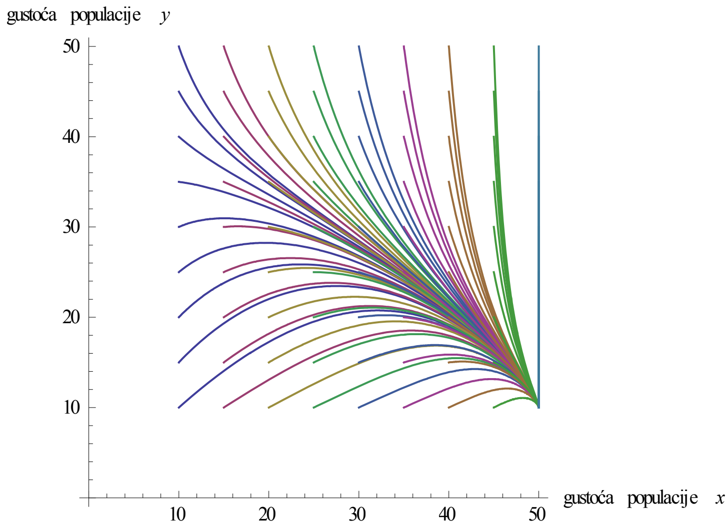
4.3.1. Povećanje parametra *K*

$K = 50$

Povećanje kapaciteta agresora direktno znači i njihovo brojčano povećanje. Dakle, veći broj agresora na određeni način utječe na smanjenje kapaciteta žrtava. Svi parametri su identični početnom stanju sustava prikazanog u primjeru 2.



Graf 4.10. *Promjena gustoće populacije vrsta u vremenu kada je K = 50*



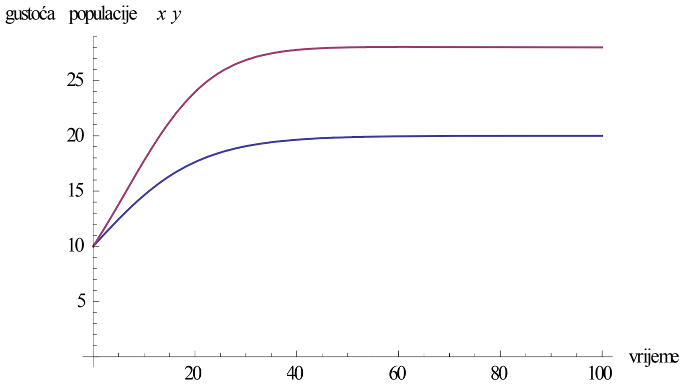
Graf 4.11. *Ovisnost promjene gustoće vrste 1 o promjeni gustoće vrste 2 kada je K = 50*

Iz gore prikazanih grafova je vidljivo da porastom kapaciteta agresora (K = 50) tijekom vremena, istovremeno se smanjuje kapacitet žirtve, odnosno veći broj agresora znači manji kapacitet žrtava.

Iz grafa 4.11. lijepo se može vidjeti ponor trajektorija u točki (30, 10)

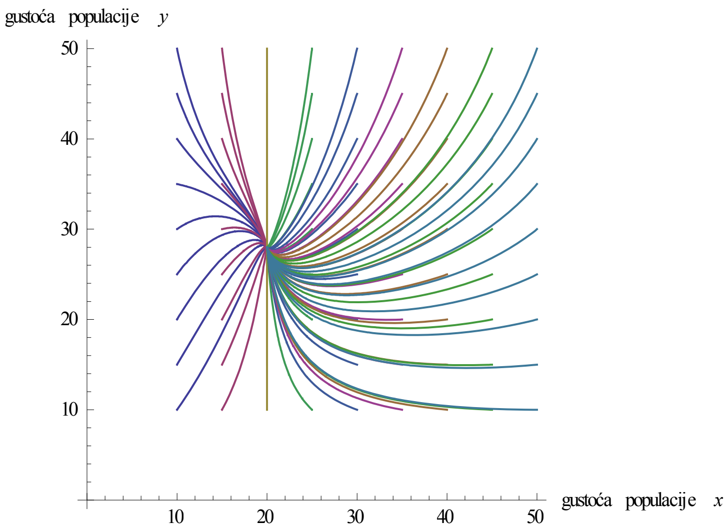
4.3.2. Smanjenje parametra *K*

$K = 20$



Graf 4.12. *Promjena gustoće populacije vrsta u vremenu kada je K = 20*

U ovom grafu je vidljivo smanjenje kapaciteta utjecaja agresora na žrtve. Dakle, protekom vremena znatno povećanje žrtava u odnosu na manje povećanje agresora.



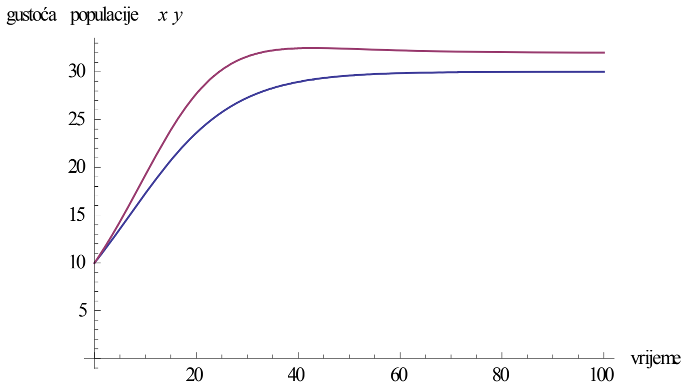
Graf 4.13. *Ovisnost promjene gustoće vrste 1 o promjeni gustoće vrste 2 kada je K = 20*

Iz grafa 4.13. vidljivo je kako se zbog smanjenja parametra *K* utjecaj gustoće agresora na gustoću žrtava smanjio.

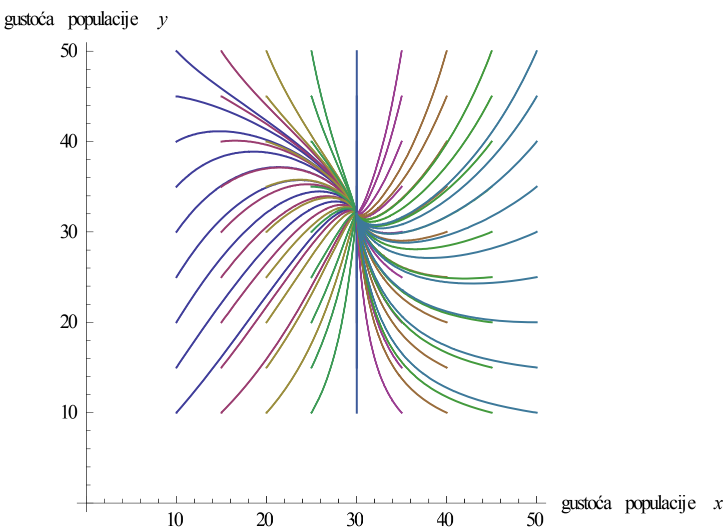
4.4. Utjecaj parametra *L*, odnosno utjecaj kapaciteta žrtve

4.4.1. Povećanje parametra *L*

$L = 50$



Graf 4.14. *Promjena gustoće populacije vrsta u vremenu kada je L = 50*

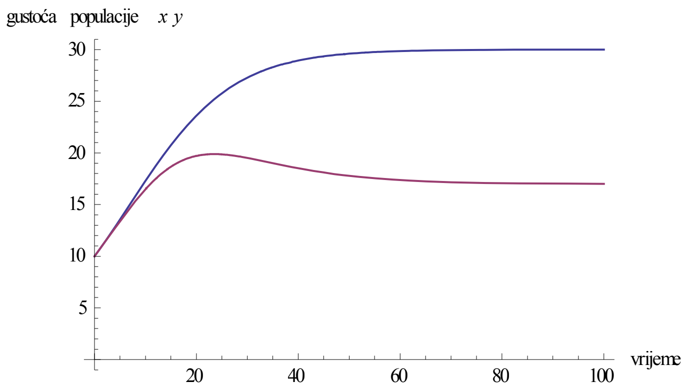


Graf 4.15. *Ovisnost promjene gustoće vrste 1 o promjeni gustoće vrste 2 kada je L = 50*

Povećanjem parametra *L* jasno dolazi do povećanja broja žrtvi, ali se one mogu razviti do punog potencijala (do *L*=50) jer je ipak agresora još dovoljno mnogo da taj rast zaustave na određenom nivou.

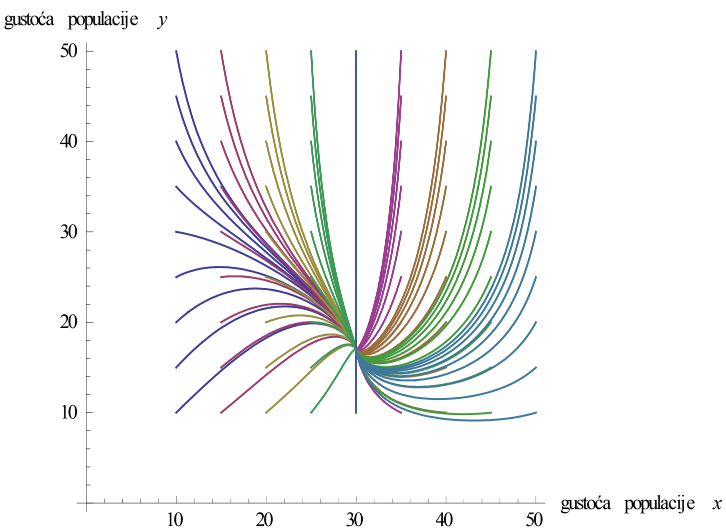
4.4.2. Smanjenje parametra *L*

$L = 35$



Graf 4.16. *Promjena gustoće populacije vrsta u vremenu kada je L = 35*

U ovom grafu je vidljivo smanjenje kapaciteta žrtve. Pošto smo smanjili kapacitet žrtava ranije će doći do pada gustoće žrtava.



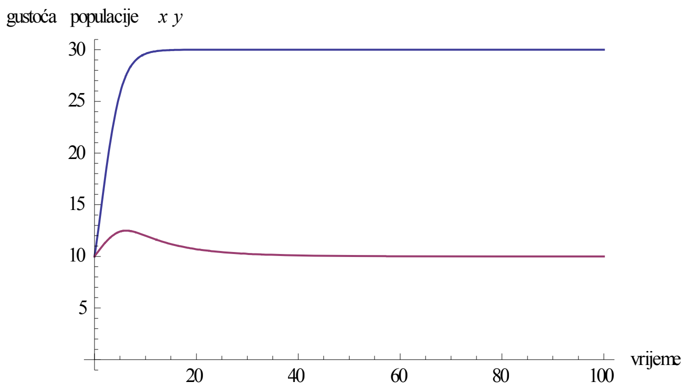
Graf 4.17. *Ovisnost promjene gustoće vrste 1 o promjeni gustoće vrste 2 kada je L = 35*

Graf 4.17. prikazuje izgled trajektorija u ovom slučaju. Nagib trajektorija je veći nego kod $L = 40$, što znači da porastom broja agresora broj žrtava brže pada – veći utjecaj agresora na žrtve.

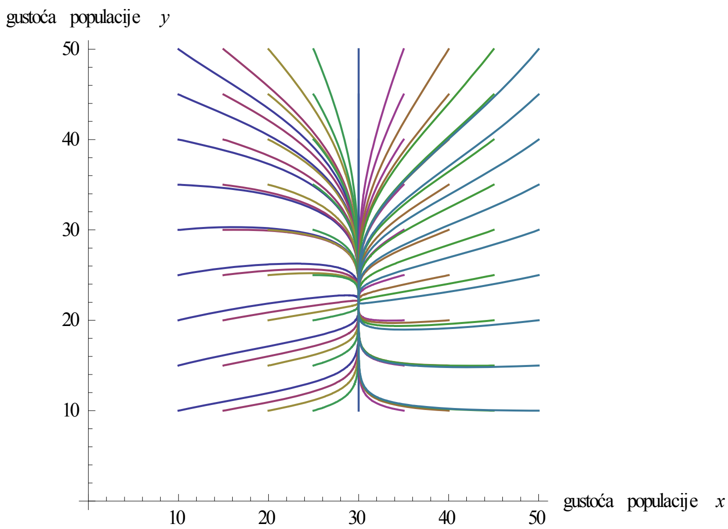
4.5. Utjecaji koeficijenata *a* i *b*, odnosno intenziteta razmnožavanja pojedinih vrsta

4.5.1. Promjena koeficijenta *a*

$a = 0{,}5$



Graf 4.18. *Promjena gustoće populacije vrsta u vremenu kada je a = 0,5*

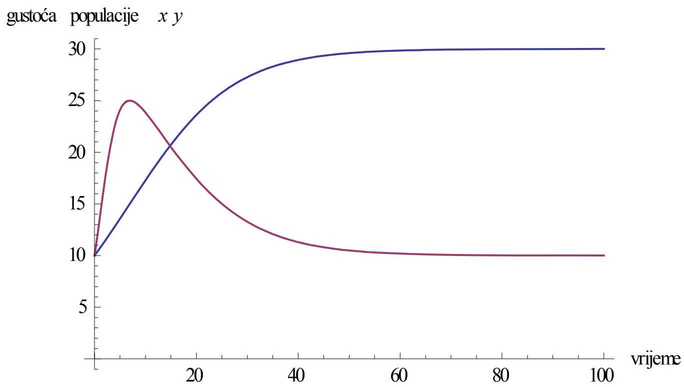


Graf 4.19. *Ovisnost promjene gustoće vrste 1 o promjeni gustoće vrste 2 kada je a = 0,5*

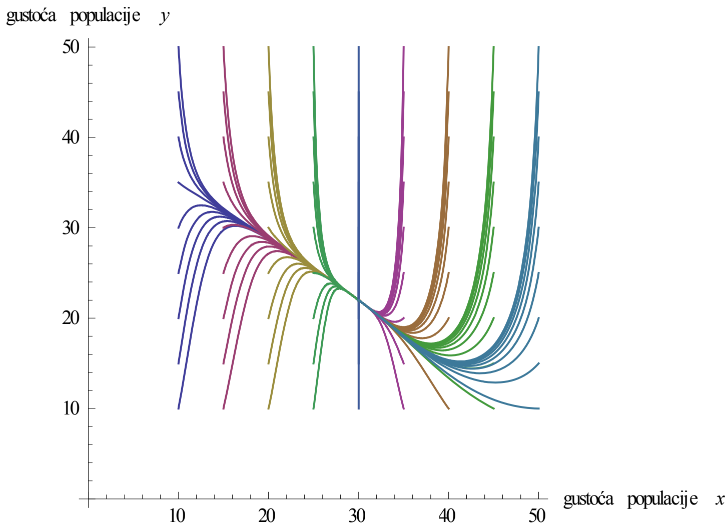
Promjenom parametra *a* broj agresora puno brže dosegne svoj maksimum (intenzitet njihovog razvoja je puno veći), pa samim time i broj žrtvi brze padne.

4.5.2. Promjena koeficijenta *b*

$b = 0{,}5$



Graf 4.20. *Promjena gustoće populacije vrsta u vremenu kada je b = 0,5*



Graf 4.21. *Ovisnost promjene gustoće vrste 1 o promjeni gustoće vrste 2 kada je b = 0,5*

Promjenom parametra *b* se povećava intenzitet razvoja žrtvi pa brzo dosegnu maksimalan broj koji mogu dostići, ali čim se agresori dovoljno razviju, opet broj žrtvi opada

5. ZAKLJUČAK

Model suživota gdje jedna veličina ometa drugu je krajnje jednostavan i razumljiv. Pretpostavka ovog modela je da su dvije populacije različitih vrsta potpuno izolirane od ostatka svijeta.

Mijenjanjem određenih parametara i početnih uvjeta dolazimo do različitih odnosa populacija. Agresor utječe na žrtvu na način da smanjuje njezin kapacitet. Možemo zaključiti da se povećnjem početnog, intenziteta razvoja ili razmnožavanja, napasnosti te maksimalnog kapaciteta agresora povećava utjecaj na žrtvu. Do istog učinka dolazi ako se neki od tih parametara i koeficijenata kod žrtve smanjuju. Dok promjena bilo kojeg parametra ili koeficijenata žrtve ili agresora nema utjecaj na razvoj agresora.

Ovaj model se zbog svoje pouzdanost može koristiti za izračunavanje kretanja neke populacije, bilo neke životinjske vrste ili biljne ili čak populacije ljudi.

6. LITERATURA

1) http://en.wikipedia.org/wiki/Dynamical_systems_theory

2) Petra Sabljic; Diskretni dinamicki sustavi – logisticki model, Kaos; seminarski rad; Zagreb, 2009

3) Dr. sc. Ivica Gusić; Uvod u matematičke metode u inženjerstvu; predavanja s Fakulteta kemijskog inženjerstva i tehnologije u Zagrebu

4) Wolfram Mathematica 7