SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE

ZAVOD ZA MATEMATIKU

Seminarski rad iz kolegija Uvod u matematičke metode u inženjerstvu

Studentica: Matea Kovač

Mentor: dr.sc. Ivica Gusić, red. prof.

Tema: Jednodimenzijska toplinska jednadžba

Zagreb, kolovoz, 2012

Sadržaj

1. Uvod

Kako bi mogli započeti s razmatranjem matematike toplinske jednadžbe, potrebno je utvrditi što se smatra pod pojmom toplina. Uobičajen primjer nerazumijevanja termina toplina jest klasično fizikalno pitanje: što sadrži veću količinu topline, kada puna tople vode ili šalica puna kipuće vode? Premda šalica puna kipuće vode ima višu temperaturu, ona sadrži manje topline nego kada. U skladu s time, pri izračunu problema koji se tiču topline potrebno je razlučiti dvije vrste mjerenja, mjerenje temperature i mjerenje količine topline sadržane u objektu. Unutar ovog seminarskog rada, pri spominjanju izraza toplina govorit ćemo o količini topline sadržane unutar objekta.

2. Izvod toplinske jednadžbe

(Izlaganje prema radu [2])

Toplinska jednadžba za tok topline kroz objekt rješava se u dva koraka. Prvi korak proizlazi iz svojstava samog objekta, dok drugi korak proizlazi iz mjerenja brzine prijenosa toka topline kroz rubove objekta.

2.1. Prvi korak

Eksperimentalni izračuni pokazuju kako je toplina ΔQ u volumenu ΔV i vremenu t definirana jednadžbom (1).

$$\Delta Q = c\rho u \Delta V \qquad (0)$$

Pri tome c predstavlja specifičnu toplinu, ρ gustoću, u temperaturu, dok ΔV predstavlja mali volumen. Promotrimo štap, izrađen od homogenog materijala i savršeno izoliranog po svojoj dužini tako da toplina može teći samo kroz njegove krajeve (Slika 1). Položaj uz štap označen je oznakom x, a duljina štapa je označena oznakom L tako da vrijedi relacija (2).

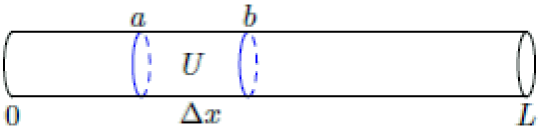
$$0 \le x \le L \qquad (0)$$

Slika 1. Shematski prikaz štapa duljine *L* i položaja *x*.

Prema tome, temperatura u jedina je veličina koji ovisi o položaju x i vremenu t, te izraz (1) prelazi u izraz (3).

$$\Delta Q = c\rho u(x,t)\Delta V \qquad (0)$$

Promotrimo, zatim mali dio štapa U definiran unutar intervala $x=a$ i $x=b$ (Slika 2). Pri tome je poprečni presjek označen sa S, dok Δx predstavlja širinu malog dijela. Iz toga slijedi jednadžba (4).



Slika 2. Shematski prikaz štapa s malim dijelom *U* definiranog unutar intervala *x=a i x=b*, poprečnog presjeka *S* i širine *Δx*.

$$\Delta V = S\Delta x \qquad (0)$$

Definicijom malog volumena omogućena je definicija količine topline unutar poprečnog presjeka – jednadžba (5).

$$\Delta Q = c\rho u(x,t)S\Delta x \qquad (0)$$

Kako bismo odredili količinu topline unutar malog dijela štapa U u vremenu t, potrebno je jednadžbu (5) integrirati po x – jednadžba (6).

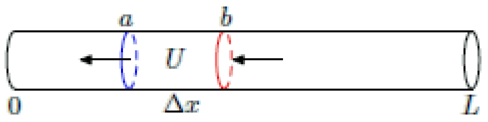
$$Q(t) = \int_a^b c\rho u(x,t)Sdx \qquad (0)$$

Kako je štap izrađen od materijala homogene čvrstoće, poprečni presjek S, specifična toplina c i gustoća ρ ne mijenjaju se u vremenu. Prema tome, potrebno je odrediti parcijalnu derivaciju temperature u kako bi odredili brzinu promjene topline u vremenu – jednadžba (7) .

$$\frac{dQ}{dt} = \int_a^b c\rho \frac{\delta u}{\delta t} Sdx \qquad (0)$$

2.2. Drugi korak

Druga metoda određivanja promjene topline u vremenu je također dobivena eksperimentalno, korištenjem štapa sličnog onom u prvoj metodi. Tok topline kroz mali dio U obrnuto je proporcionalna razmaku (Δx , a izravno proporcionalna površini poprečnog presjeka S , što proizlazi iz činjenice da što je dulja širina malog dijela više je vremena potrebno toplini da prođe kroz njega. Načelo je slično poprečnom presjeku; ukoliko imamo dva štapa od kojih jedan ima veći promjer od drugog, manje je vremena potrebno toplini da prođe kroz štap većeg promjera, nego štap manjeg promjera. Postavimo li dva objekta različitih temperatura jedan do drugog, toplina će teći s toplijeg objekta na hladniji. U skladu s time, ukoliko je temperatura pri položaju b veća od temperature pri položaju a, toplina će teći od položaja b prema položaju a (Slika 3).



Slika 3. Shematski prikaz štapa s malim dijelom *U* pri kojem toplina teče od položaja *b* prema položaju *a*.

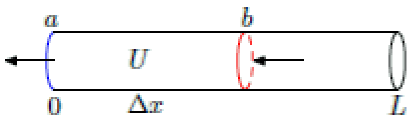
Uzevši u obzir oba svojstva dobiva se jednadžba (8).

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} \approx -C \frac{u(a+\Delta x,t)-u(a,t)}{\Delta x} S \tag{0}$$

Pri čemu konstanta proporcionalnosti C predstavlja koeficijent termalne provodnosti koji varira ovisno o vrsti materijala od kojeg je izrađen štap. Kako bi dokazali valjanost izraza (8) potrebno je odrediti tok topline kroz mali dio U, pri čemu su granice dijela definirane izrazima (9) i (10).

$$a = x = 0 \tag{0}$$

$$b = a + \Delta x \tag{0}$$



Slika 4. Shematski prikaz štapa pri kojem toplina teče od *b* prema *a*.

Ukoliko bi temperatura pri temperaturi $u(a+\Delta x,t)$ bila veća od temperature $u(a,t)$ tada bi toplina Q imala negativnu vrijednost zato jer je temperatura pri b veća nego temperatura pri a. U skladu s time, toplina bi tekla od b prema a, preciznije, toplina bi istjecala iz štapa. Ukoliko $\Delta x \to 0$ unutar jednadžbe (8), kvocijent razlike približava se $\frac{\delta u}{\delta x}$,tada je tok toplin kroz mali dio U pri $x=a$ određen članom (11).

$$-C\frac{\delta u}{\delta x}(a,t)S \tag{0}$$

Analogno tome možemo pokazati kako je tok topline kroz mali dio U pri x=b (toplina je u ovom slučaju pozitivna) definirana izrazom (12).

$$C\frac{\delta u}{\delta x}(b,t)S \tag{0}$$

Prema tome, količina topline koju mali dio U dobije u vremenu t određena je jednadžbom (13).

$$\frac{dQ}{dt}=C\left[\frac{\delta u}{\delta x}(b,t)-\frac{\delta u}{\delta x}(a,t)\right]S \tag{0}$$

Ukoliko primijenimo Newton – Leibnitzovu formuluna jednadžbu (13) dolazimo do jednadžbe (14).

$$\frac{dQ}{dt}=\int_a^b \frac{d}{dx}(C\frac{\delta u}{\delta x}S)dx \tag{0}$$

Budući da se radi o homogenim materijalima s konstantnim poprečnim presjekom, C i S su konstantni. Prema tome, jednadžba (14) prelazi u jednadžbu (15).

$$\frac{dQ}{dt}=C\int_a^b \frac{\delta^2 u}{\delta x^2}Sdx \tag{0}$$

2.3. Kombinacija dvaju koraka

Iz prethodnog podpoglavlja imamo dvije jednadžbe za tok topline u i van malog dijela *U*. Budući da obje predstavljaju modele toka toplina kroz štap, jednadžbe ćemo izjednačiti dobivši time jednadžbu (16).

$$c\rho\int_a^b \frac{\delta u}{\delta t} S dx = C\int_a^b \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} S dx \qquad (0)$$

Prebacivši lijevu stranu jednadžbe (16) na desnu i podijelivši cijelu jednadžbu sa *S*, jednadžba prelazi u jednadžbu (17).

$$c\rho\int_a^b \frac{\delta u}{\delta t} dx - C\int_a^b \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} dx = 0 \qquad (0)$$

Izlučivanjem dx jednadžba (17) prelazi u jednadžbu (18).

$$\left(c\rho\int_a^b \frac{\delta u}{\delta t} - C\int_a^b \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} \right) = 0 \qquad (0)$$

No, integral unutar jednadžbe (18) može biti jednak nula samo u slučaju kada je *integrand* jednak nuli pri čemu slijedi jednadžba .

$$c\rho \frac{\delta u}{\delta t} - C\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = 0 \qquad (0)$$

Dijeljenjem sa umnoškom $c\rho$ i supstitucijom $k = \frac{C}{c\rho}$ jednadžba (19) prelazi u jednadžbu (20).

$$\frac{\delta u}{\delta t} - k\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} = 0 \qquad (0)$$

Pri tome konstanta k predstavlja koeficijent difuzivnosti. Toplinska jednadžba (20) naziva se i difuzijska jednadžba i može se napisati i u svojem popularnijem obliku s indeksnom notacijom – jednadžba (21).

$$u_t = ku_{xx} \qquad (0)$$

3. Teoretski dio

3.1. Problemi početnih graničnih uvjeta (eng. *IBV – initial boundary value problems*)

Kako bi bili u mogućnosti riješiti diferencijalnu toplinsku jednadžbu za mnoštvo riješenja ili čak i samo jedno rješenje potrebno je problemu postaviti određene početne uvjete. U skladu s time, potrebno je definirati temperaturu svake točke niz štap u vremenu $t = 0$ i to funkcijom koja je određena sustavom (22).

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad \text{za} \qquad 0 \le x \le L \tag{0}$$

Navedena funkcija poznata je pod nazivom *inicijalna temperaturna distribucija*. Kako se toplina može uvesti ili odvesti iz štapa pri njegovim granicama potrebno je definirati granične uvjete štapa pri granicama štapa $(0, L)$ - sustavom (23).

$$u(0,t) = 0 \quad \text{i} \quad u(L,t) = T_L \quad \text{za sve} \quad t > 0 \tag{0}$$

Primjerice ukoliko jedan kraj štapa uronimo u tekućinu s konstantnom temperaturom od $0°C$, a drugi kraj u tekućinu s konstantnom temperaturom od $100°C$ tada izraz prelazi u sustav (24).

$$u(0,t) = 0 \quad \text{i} \quad u(L,t) = 100 \quad \text{za sve} \quad t > 0 \tag{0}$$

Uvjeti navedeni unutar izraza poznati su pod nazivom *Dirichletovi* uvjeti.

Sada smo u mogućnosti postaviti problem početnih graničnih uvjeta i to kombinacijom toplinske jednadžbe s početnim i graničnim uvjetima. Problem se sastoji od pronalaska $u(x,t)$ koji bi zadovoljavao sustav (25).

$$\begin{aligned} &u_t(x,t) = ku_{xx}(x,t) && \text{za} \quad 0 \le x \le L \quad \text{i} \quad t > 0 \\ &u(x,0) = u_0(x) && \text{za} \quad 0 \le x \le L \\ &u(0,t) = T_0 && \text{i} \quad u(L,t) = T_L \quad \text{za} \quad t > 0 \end{aligned} \tag{0}$$

Izraz (25) predstavlja općenitu formu toplinske jednadžbe u obliku *IBV* problema.

3.2. Rješavanje toplinske diferencijalne jednadžbe

Imamo štap izrađen od homogenih materijala duljine *L = 2* i *k = 0,05,* inicijalnu temperaturnu distribuciju od $u(x,0)=0$ i granične uvjete definirane sustavom . Pri tome dobivamo problem početnih graničnih uvjeta određen sustavo*m* (26).

$$\begin{aligned}
&u_t(x,t)=0,2u_{xx}(x,t) \quad \text{za} \quad 0\le x\le 2 \quad \text{i} \quad t>0\\
&u(x,0)=0 \quad \text{i} \quad 0\le x\le 2\\
&u(0,t)=0 \quad \text{i} \quad u(2,t)=100 \quad \text{za} \quad t>0
\end{aligned} \tag{0}$$

Pretpostavka je kako su operatori unutar toplinske jednadžbe linearni, preciznije članovi $\frac{\delta}{\delta x}$ i $\frac{\delta^2}{\delta x^2}$ linearni. Dakle, budući da je toplinska jednadžba linearna moguće je pronaći linearnu kombinaciju dvaju rješenja koja su jednaka nekom drugom rješenju. Prvo od tih rješenja je rješenje za stanje mirovanja $u_s(x)$ tako da vrijedi jednadžba , odnosno za konkretan slučaj definiran sustavom jednadžba (27) prelazi u jednadžbu (28).

$$u_s(x)=\left(\frac{T_L-T_0}{L}\right)x+T_0 \tag{0}$$

$$u_s(x)=\frac{100-0}{2}x+0=50x \tag{0}$$

Preostali dio jednadžbe $u=v+u_s$ jest *v*, pri kojem je $v=u-u_s$ tako da zadovoljava *IBV* problem definiran sustavom (29).

$$\begin{aligned}
&u(x,t)=ku_{xx}(x,t) \quad \text{za} \quad 0\le x\le L \quad \text{i} \quad t>0\\
&u(x,0)=u_0(x)-u_s(x) \quad \text{za} \quad 0\le x\le L\\
&u(0,t)=0=u(1,t) \quad \text{za} \quad t>0
\end{aligned} \tag{0}$$

Svrha ove transformacije je u tome što v ima homogene granične uvjete čime je pronalazak rješenja jednostavniji. Time se omogućuje separacija varijabli u svrhu pronalaska rješenja za *v* jer kako bi separacija varijabli bila moguća uvjet je da je problem homogen. U skladu s time, željeni produkt rješenja je u obliku određenom jednadžbom (30).

$$v(x,t)=X(x)T(t) \tag{0}$$

Korištenjem separacije varijabli dobivaju se dvije obične diferencijalne jednadžbe za T i za *X*. Uvrštavanjem jednadžbe u toplinsku jednadžbu dobivamo jednadžbu (31).

$$X(x)T'(k) = kX''(x)T(t) \qquad (0)$$

Podijelivši obje strane jednadžbe s $kT(t)$ i $X(x)$ dobija se jednadžba .

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \qquad (0)$$

Budući da su *x* i *t* nezavisne varijable jedini način kako bi dvije strane jednadžbe bile jednake jest ako su obje strane jednake nekoj konstanti. Prema konvenciji navedena konstanta je $-\lambda$. Prema tome iz jednadžbe proizlaze jednadžba (33) i jednadžba (34), odnosno jednadžba (35) i jednadžba (36).

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = -\lambda \qquad (0)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \qquad (0)$$

$$T' + \lambda kT = 0 \qquad (0)$$

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad (0)$$

Prva diferencijalna jednadžba ima općenito rješenje određeno jednadžbom (37).

$$T(t) = Ce^{-\lambda kt} \qquad (0)$$

Zatim je potrebno pronaći rješenja za drugu diferencijalnu jednadžbu uz početne uvjete: $X(0) = X(L) = 0$. Ovaj problem naziva se problem graničnih vrijednosti dvije točke, poznat i pod nazivom *Sturm – Liouville* problem. Potrebno je pronaći vrijednosti λ koje daju rješenja koja nemaju vrijednost nula. Prvi dio je za $\lambda < 0$. Korištenjem relacije $\lambda = -r^2$ dobiva se izraz (38).

$$X'' - r^2 X = 0, \quad X = e^{\lambda t} \qquad (0)$$

Prema tome, vrijede relacije (39), (40) i (41).

$$\lambda^2 e^{\lambda t} - r^2 e^{\lambda t} = 0 \qquad (0)$$

$$\lambda^2 - r^2 = 0 \tag{0}$$

$$\lambda = \pm r \tag{0}$$

Time dolazimo do općeg rješenja određenog izrazom (42), dok su granični uvjeti određeni izrazima (43) i (44).

$$X(t) = C_1 e^{rt} + C_2 e^{-rt} \tag{0}$$

$$0 = x(0) = C_1 + C_2 \tag{0}$$

$$0 = X(L) = C_1 e^{rt} + C_2 e^{-rt} \tag{0}$$

Iz jednadžbe vidljivo je kako je $C_2 = -C_1$, te ako taj izraz uvrstimo u jednadžbu dobivamo jednadžbu (45).

$$0 = C_1(e^{rL} - e^{-rL}) \tag{0}$$

Kako je $r \neq 0$ faktor unutar zagrade u jednadžbi nema vrijednost nula iz čega proizlazi da je $C_1 = 0$ i $C_2 = 0$, iz čega zatim proizlazi da je $X(x) = 0$. Navedeni slijed je logičan jer ako je $\lambda < 0$ tada bi produkt rješenja bio $v(x,t) = e^{-\lambda kt} X(x)$. Dakle, uz $\lambda < 0$ i odustnost izvora toplina ova jednadžba bi eksponencijalno rasla, što naravno nije slučaj kod objekata kod kojih nema izvora topline. Za $\lambda = 0$ diferencijalna jednadžba je $X'' = 0$ i ima opće rješenje određeno izrazom (46), te graničnim uvjetima određenim izrazom (47).

$$X(x) = ax + b \tag{0}$$

$$0 = x(0) = b \qquad \text{i} \qquad 0 = X(L) = aL + b \tag{0}$$

Iz toga proizlazi da je $a = b = 0$, te opet dolazimo do rješenja s vrijednosti nula. Preostaje $\lambda > 0$. Uvodimo supstituciju $\lambda = \omega^2$ i time dobivamo diferencijalnu jednadžbu (48).

$$X'' + \omega^2 X = 0 \tag{0}$$

Navedena jednadžba ima opće rješenje određeno izrazom (49) i granične uvjete određene izrazom (50).

$$X(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x \tag{0}$$

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 \quad \text{iz čega slijedi} \quad a = 0 \\ X(L) &= 0 \quad \text{iz čega slijedi} \quad b\sin\omega L = 0 \end{aligned} \tag{0}$$

Uzevši u obzir da je $a = 0$, član $a\cos\omega x$ postaje također nula, što znači da je potrebno riješiti jednadžbu . Rješavamo jednadžbu (51) na način da pronađemo kada je $\sin\omega L = 0$. Budući da je sinus jednak nuli za pozitivne cjelobrojne vrijednosti π do relacije $\sin\omega L = 0$ će jedino doći kod vrijednosti $\omega L = n\pi$. Iz toga proizlazi jednadžba (52).

$$b\sin\omega L = 0 \tag{0}$$

$$\lambda = \omega^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \tag{0}$$

Zatim uvrštavanjem izraza (52) u izraz (49) dobivamo izraz (53).

$$X(x) = b\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{0}$$

Budući da je potrebno pronaći rješenja koja nemaju vrijednost nula, postavljena je vrijednost $b = 1$, što ujedno i pojednostavljuje izračun. Dakle, potrebno je pronaći jednadžbu (54), te jednadžbu (55).

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \tag{0}$$

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{0}$$

Pri tome λ_n predstavlja svojstvenu vrijednost *Sturm – Liouviellovog* problema, a $X_n(x)$ svojstvenu funkciju. Potpuno rješenje *Sturm – Liouviellovog* problema je grupa svojstvenih vrijednosti i svojstvenih funkcija za $n = 1$ do $n = \infty$. Za toplinsku jednadžbu imamo potpuno rješenje određeno jednadžbom (56) koje zadovoljava granične uvjete, no još je potrebno zadovoljiti početne uvjete. Ponovno uzimamo u ozbir načelo da je bilo koja linearna kombinacija dvaju rješenja, rješenje. U skladu s time, dobivamo jednadžbu (57).

$$v_n(x,t) = e^{\frac{-n^2\pi^2 kt}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{0}$$

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{\frac{-n^2\pi^2 kt}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{0}$$

Rješenje zadovoljava sve uvjete osim početnih uvjeta. Stoga je potrebno pronaći koeficijente b_n koji zadovoljavaju početne uvjete. Primjenom početnih uvjeta dobiva se jednadžba (58), odnosno za konkretan slučaj primjera jednadžba (59).

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L} x \tag{0}$$

$$-50x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \tag{0}$$

Ovaj postupak je posebna vrsta Fourierovog reda, a naziva se *razvoj sinus reda unutar polu-raspona*, pri čemu se b_n računa jednadžbom (60).

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L v_o(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \tag{0}$$

Razvojem jednadžba prelazi u izraz (61).

$$\begin{aligned} b_n &= 2\int_0^1 (-50x) \sin n\pi x dx \\ &= -100\int_0^1 x \sin n\pi x dx \\ &= (-1)^n \frac{100}{n\pi} \end{aligned} \tag{0}$$

Uvrštavanjem izraza (61) u jednadžbu (57) dobiva se potpuno rješenje IBV problema $v(x,t)$ - jednadžba (62).

$$v(x,t) = \frac{100}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-0,05 n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x \tag{0}$$

4. Pregledni dio

Temperatura unutar štapa određena je jednadžbom (63), odnosno jednadžbom (64).

$$u(x,t) = u_s(x) + v(x,t) \tag{0}$$

$$u(x,t) = 50x + \frac{100}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-0,05n^2\pi^2 t}\sin n\pi x \tag{0}$$

Za grafički prikaz rješenja korišten je integrirani *solver* parcijalnih diferencijalnih jednadžbi programskog paketa Matlab R2012a – *pdepe*.

4.1. Korištenje Matlabove funkcije za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi – *pdepe*

Pdepe je funkcija unutar Matlab programskog paketa, a služi za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Za demonstraciju *pdepe* funkcije korišten je prethodno navedeni primjer. U početku objasniti ćemo sintaksu *pdepe* funkcije, a to je:

sol = pdepe(m,@pdex,@pdexic,@pdexbc,x,t).

4.1.1. Simetrija

Prva varijabla funkcije *pdepe* označena je sa slovom *m* i naziva se *simetrija problema*, a pojavljuje se u jednadžbi . Varijabla *m* može poprimiti triju vrijednosti, 0 – plošna, 1 – cilindrična, 2 – sferična. Unutar primjera obrađenog u ovom seminarskom radu koristi se jedno – dimenzijska toplinska jednadžba, te je u skladu s time, varijabla *m* jednaka nuli.

$$c\left(x,t,u,\frac{\delta u}{\delta x}\right)\frac{\delta u}{\delta t} = x^{-m}\frac{\delta}{\delta x}\left(x^m f\left(x,t,u,\frac{\delta u}{\delta x}\right)\right) + s\left(x,t,u,\frac{\delta u}{\delta x}\right) \tag{0}$$

4.1.2. Podfunkcije

Sljedeće u nizu varijabli *pdepe* funkcije su podfunkcije *@pdex*, *@pdexic*, *@pdexbc*. Prva podfunkcija, *@pdex*, je funkcija kojom se izračunavaju komponente parcijalne diferencijalne jednadžbe. Kako bi funkcija bila u mogućnosti interpretirati parcijalnu diferencijalnu jednadžbu, jednadžba mora biti u obliku izraza . Pri tome *c* predstavlja dijagonalnu matricu, *f* se naziva termin fluksa, a *s* izvorni termin. Potrebno je, dakle, toplinsku diferencijalnu jednadžbu (66) prevesti u oblik definiran jednadžbom . Time se dobiva izraz (67), pri čemu su članovi *c*, *s* i *f* određeni jednadžbama (68), (69) i (70).

$$u_t(x,t) = 0,05u_{xx}(x,t) \tag{0}$$

$$1\left(\frac{\delta u}{\delta t}\right) = \left(0,05\frac{\delta u}{\delta x}\right)\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right) + 0 \tag{0}$$

$$c\left(x,t,u,\frac{\delta u}{\delta x}\right) = 1 \tag{0}$$

$$f\left(x,t,u,\frac{\delta u}{\delta x}\right) = 0,05\frac{\delta u}{\delta x} \tag{0}$$

$$s\left(x,t,u,\frac{\delta u}{\delta x}\right) = 0 \tag{0}$$

Zatim, izradimo *.m* datoteku za funkciju sa sljedećom sintaksom:

```
function [c,f,s] = pdex(x,t,u,DuDx)
c = 1/0.05;
f = DuDx;
s = 0;
```

Podfunkcija *pdex* koristi se za izračunavanje članova *c*, *f* i *s* kao stupčanih vektora. Sljedeća podfunkcija je funkcija *pdexic* koja evaluira početne uvjete diferencijalne jednadžbe. Budući da je inicijalna temperaturna distribucija ovog primjera $u_0(x) = 0$ funkcija ima sljedeći oblik:

```
function u0 = pdexic(x)

u0 = 0;
```

Podfunkcija *@pdexbc* je funkcija koja evaluira granične uvjete. Kao i kod prethodne podfunkcije granični uvjeti moraju se prevesti u oblik koji funkcija *pdepe* razumije. Stoga, općeniti oblik graničnih uvjeta određen je izrazom (71).

$$p(x,t,u)+q(x,t)f\left(x,t,u\frac{\delta u}{\delta x}\right) \quad (0)$$

Kako su granični uvjeti navedenog primjera određeni su izrazom (72), potrebno je pronaći vrijednosti pl i ql. Pri tome su pl i ql funkcije u općem obliku za *pdepe* funkciju za lijeve granične uvjete.

$$u(0,t)=0 \quad \text{i} \quad u(2,t)=100 \quad (0)$$

Jednadžba (73) daje $pl=ul$ pri čemu je ul temperaturna funkcija pri lijevoj graničnoj točci, a $ql=0$. Zatim je potrebno pronaći *pdepe* formu za pr i qr koje su vrijednosti pri desnim graničnim uvjetima. Jednadžba (74) daje $pr=ur-100$ i $qr=0$.

$$u(0,t)+0\frac{\delta u}{\delta x}(0,t)=0 \quad (0)$$

$$u(2,t)+0\frac{\delta u}{\delta x}(2,t)=100 \quad (0)$$

Funkcija *pdexbc* unutar *.m* datoteke upisuje se na sljedeći način:

function [p1,q1,pr,qr] = pdexbc(x1,u1,xr,ur,t)

p1 = u1;

q1 = 0;

pr= ur-100;qr = 0;

4.1.3. Varijable *x* i *t*

Varijabla *x* predstavlja vektor koji odgovara duljini štapa tako da su vrijednosti *x* u intervalu $0 \leq x \leq L$. Sadrži točke uz duljinu štapa koje se evaluiraju. Potrebno je ≥ 3 elementa unutar vektora *x* kako bi ga funkcija *pdepe* mogla evaluirati. Vremenski vektor *t*, vektor je koji sadrži točke u vremenu pri kojima se evaluira temperatura štapa. Kao i vektor *x* također mora sadržavati ≥ 3 elementa.

4.1.4. Upravljačka funkcija

Nakon opisivanja svih komponenti potrebnih za rad *pdepe* funkcije potrebno je napisati tzv. upravljačku funkciju programa (Prilog 1) koja povezuje sve prethodno opisane podfunkcije. Navedena upravljačka funkcija izvršava *pdepe* funkciju i iscrtava grafičke prikaze rješenja *IBV* problema. Započinjemo s imenom funkcije, koju ćemo nazvati *pdexfunc*:

function pdexfunc

close all

Deklaraciju funkcije slijedi naredba *close all* za zatvaranje svih ostalih aktivnih *prozora* s grafičkim prikazima unutar Matlab programskog paketa. Zatim, definiramo simetriju parcijalne diferencijalne jednadžbe, za ovaj primjer $m = 0$:

m=0;

Zatim, definiramo *x* i *t* vektore:

x = linspace(0,20,40); %ova naredba kreira 40 jednakih točaka uz duljinu štapa

t = linspace(0,15,20); %ova naredba kreira 20 jednakih vremenskih točaka.

Zatim, pozivamo *pdepe* funkciju i to na sljedeći način:

sol = pdepe(m,@pdex,@pdexic,@pdexbc,x,t);

Izlazni argument *sol* je trodimenzionalno polje, poput:

- *sol(:,:,k)* aproksimira komponentu *k* rješenja *u ;*
- *sol(i,:,k)* aproksimira komponentu *k* rješenja u vremenu *tspan(i)* pri točkama isprepletanja *xmesh(:) ;*
- *sol(i,j,k)* aproksimira komponentu *k* rješenja u vremenu *tspan(i)* i točki isprepletanja *xmesh(j) .*

Zatim je potrebno izdvojiti prvu komponentu rješenja i to na sljedeći način:

u=sol(:,:,1);

Kako bi se dobio grafički prikaz mreže rješenja koristimo naredbu *surf* i to na sljedeći način:

surf(x,t,u)

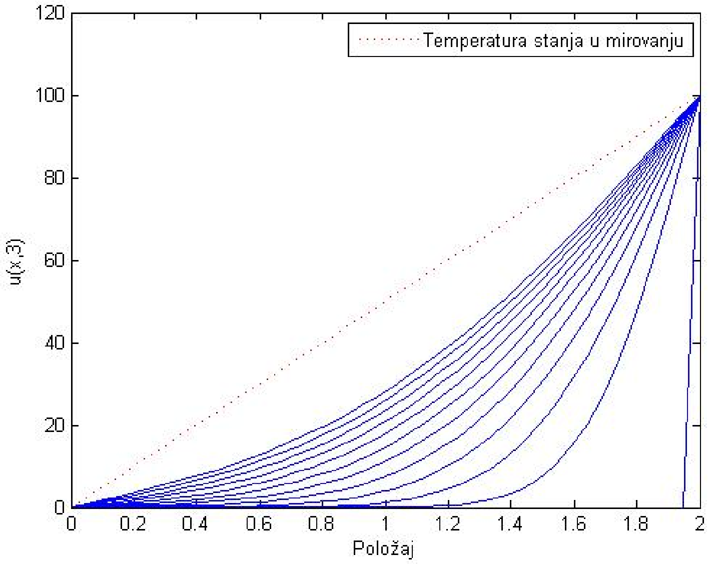
Navedena naredba za izlaz imati će mrežu rješenja koja će se sastojati od odabranih vrijednosti x i t u ovisnosti o temperaturi u. Zatim otvaramo novi *prozor* dvodimenzionalni grafički prikaz kako bi mogli pokazati konvergenciju rješenja prema temperaturi stanja mirovanja. Grafički prikaz je dobiva se korištenjem uzastopnih naredbi *plot* i to na sljedeći način:

plot(x,u(t,:))

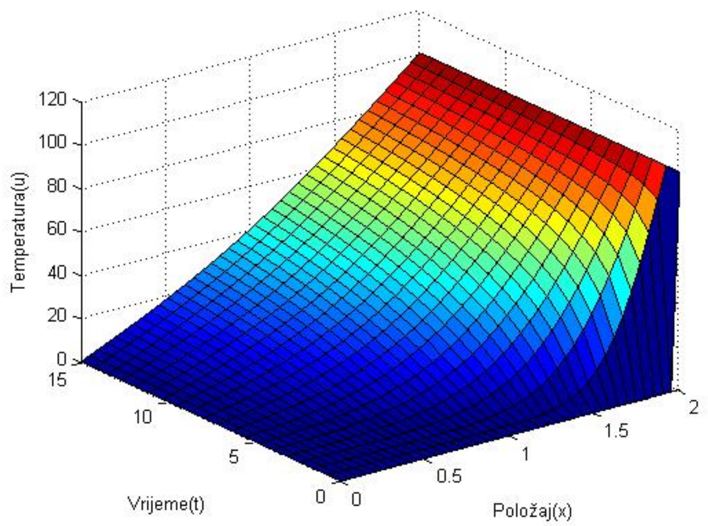
Zamjenivši t s vrijednostima koje čine grafički prikaz prezentabilnijim, pri čemu je t *unutar sljedećeg intervala* $0 \le t \le \#$ elemenata unutar vektora t. Sljedeći navedeni kod uz funkcije definirane prethodno, u mogućnosti smo riješiti *IBV* problem prezentiran u ovom seminarskom radu.

5. Rezultati

Na grafičkom prikazu skupa rješenja primjera (Slika 6) vidljivo je kako skup rješenja konvergira prema stanju mirovanja od $u_s(x) = 100x$ s povećanjem vremena. Na grafičkom prikazu mreže rješenja vidljivo je kako temperatura ostaje nepromijenjena na krajnjim točkama za *Dirichletove* uvjete.



Slika 5. Grafički prikaz skupa rješenja primjera.



Slika 6. Grafički prikaz mreže rješenja primjera.

6. Zaključak

Jednodimenzijska toplinska jednadžba, diferencijalna je jednadžba čija rješenja opisuju prijenos toplinu niz jednodimenzijskog tijela u vremenu (u slučaju opisanom u ovom seminarskom radu to je štap). Pronalazi mnoštvo primjena, od motora do strukturalne mehanike, a posjeduje i veliku primjenu unutar polja biologije, unutar kojega je poznata i kao difuzijska jednadžba.

Jedna od najznačajnijih primjena toplinske jednadžbe je proučavanje prijenosa topline kroz metalni štap u ovisnosti o vremenu, položaju, kao i svojstvima materijala štapa. Upravo taj slučaj opisan je unutar ovog seminarskog rada.

7. Literatura

1. Kreyszig, E., Advanced Engineering Mathematics, 2th Edition, John Wiley and Sons, Inc., 1962, 501-505 str.
2. A. Abrahamsen, D. Richards, *The One Dimensional Heat Equation*, 22. svibanj, 2002.

8. Prilozi

8.1. Prilog 1

```
function pde

close all

m = 0;
x = linspace(0,2,40);
t = linspace(0,15,20);
sol = pdepe(m,@pdex,@pdexic,@pdexbc,x,t);
u = sol(:,:,1);
surf(x,t,u)
xlabel('Položaj(x)')
ylabel('Vrijeme(t)')
zlabel('Temperatura(u)')
figure
y=50*x;
plot(x,y,'r:')
hold on
plot(x,u(1,:))
plot(x,u(2,:))
plot(x,u(3,:))
plot(x,u(4,:))
plot(x,u(5,:))
plot(x,u(6,:))
plot(x,u(7,:))
plot(x,u(8,:))
plot(x,u(9,:))
plot(x,u(10,:))
```

```
plot(x,u(11,:))

plot(x,u(12,:))

xlabel('Položaj')

ylabel('u(x,3)')

legend('Temperatura stanja u mirovanju')


function [c,f,s] = pdex (x,t,u,DuDx);


c = 1/0.05;

f = DuDx;

s = 0;


function u0 = pdexic(x);


u0 = 0;


function  [p1,q1,pr,qr]=pdexbc(x1,u1,xr,ur,t);


p1 = u1;

q1 = 0;

pr = ur-100;

qr = 0;
```