Sveučilište u Zagrebu

Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije

Zavod za matematiku

Kolegij: Uvod u matematičke metode u inženjerstvu

DISKRETNI LOGISTIČKI MODEL

Studenti: Vanja Šute

Jelena Purić

Irena Kozina

Srpanj, 2012.

SADRŽAJ

1. UVOD

Svijet je sustav akcija i reakcija, povratnih veza, međusobnih utjecaja i poticaja. Kako bi se objasnile različite prirodne pojave, interakcije i promjene, koriste se diferencijalne i diferencijske jednadžbe koje su se pokazale iznimno učinkovitim u rješavanju dinamičkih problema kako u teoriji, tako i u praksi. Dinamički sustavi opisuju međusobnu zavisnost sustava varijabli i njihovu promjenu u vremenu. Opisani su diferencijalnim i diferencijskim jednadžbama, a da bi se uopće moglo predvidjeti ponašanje dinamičkog sustava za neki duži vremenski period potrebno je integrirati te jednadžbe. Integriranje se vrši pomoću analitičkih metoda ili iteracijom (najčešće na računalu). U daljnjem tekstu je vidljivo da su iteracije neophodne kod opisivanja diskretnih dinamičkih sustava.[1]

Dinamički sustavi mogu biti kontinuirani, diskontinuirani te hibridni koji su kombinacija prethodno navedenih. Kontinuiran (*fluidan*, neisprekidan) je onaj sustav koji pokazuje da u proizvoljno malenom vremenskom periodu dolazi do promjene varijabli osim kada sustav miruje. Svi takvi sustavi su opisani diferencijalnim jednadžbama, i intuitivno su najbliži stvarnim uvjetima u prirodi. Diskontinuirani (diskretan, isprekidan, skokovit) je onaj sustav kod kojih se promjene ne događaju stalno, nego u diskretnim vremenskim intervalima.

Ponašanje dinamičkih sustava moguće je predočiti orbitama tj. trajektorijama, koje se, nakon dovoljno vremena, mogu razviti u skup koji nazivamo atraktorima. Atraktori čine dio faznog prostora promatranog sustava, odnosno njih smatramo geometrijskim podskupom faznog prostora. Orbita dinamičkog sustava unutar atraktora može biti periodna ili kaotična. Geometrijska predodžba dinamičnih sustava olakšava nam razumijevanje promatranog sustava.

Pojave u prirodi i svijetu koji nas okružuje mogu se opisati korištenjem navedenih jednadžbi, s tim da realniji prikaz daju diskretni dinamički sustavi. Nerijetko, dinamički sustavi pokazuju kaotično ponašanje o čemu će biti govora u daljnjem tekstu. U meteorologiji, u kojoj je i sam E.Lorenz naišao na kaotično ponašanje, zatim u medicini, posebice kardiologiji, u biologiji kod praćenja populacija bioloških jedinki, u kemiji, gdje se prati kinetika reakcija, potrebno je korištenje ovih jednadžbi, a uvelike pomaže i poznavanje teorije kaosa.[2]

2. DISKRETNI DINAMIČKI SUSTAV

Promatramo realnu funkciju $f : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$

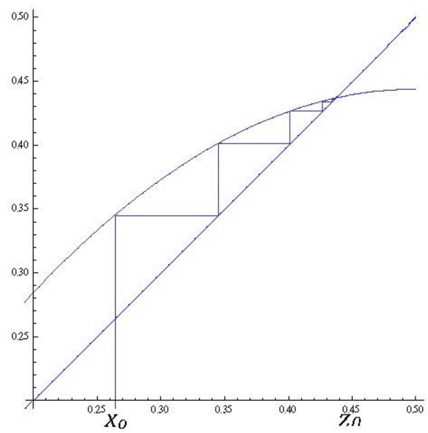
Uz neku fiksiranu vrijednost $x_0 \in \mathfrak{R}$ slijedi niz koji čini orbitu (trajektorija, putanja) x_0 s obzirom na f: $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f\big(f(x_0)\big) = f^2(x_0), \dots, x_n = f^n(x_0)$. Točka x_0 naziva se sjeme orbite. S f^n se označava n-ta iteracija od *f*, odnosno f^n je kompozicija od *n* članova same *f* funkcije. Općenito se može napisati: $x_n = f^n(x_0)$.

Kažemo da je x_0 fiksna točka za f ako je $f(x_0) = x_0$ jer je tada orbita konstantan niz x_0, $x_1 = x_0$, $x_2 = x_0 \dots$ i može se reći da je to fiksna orbita. Analogno ravnotežnim rješenjima sustava diferencijalnih jednadžbi, fiksne točke imaju važnu ulogu u diskretnim dinamičkim sustavima. Isto tako, periodne točke perioda *n*, analogne su zatvorenim orbitama diferencijalnih jednadžbi. x_0 je periodan za f ako je $f^n(x_0) = x_0$ za neki n >0. Kao i zatvorena orbita, periodna orbita se ponavlja: $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0$. Orbite perioda n nazivaju se n- ciklusom. Periodna točka x_0 ima neki minimalni period n ako je n najmanji prirodni broj za koji vrijedi $f^n(x_0) = x_0$.[1]

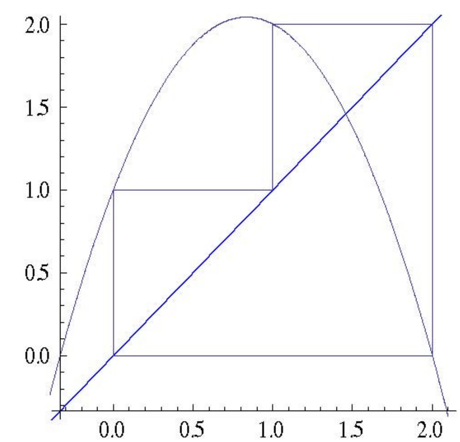
2.1. GRAFIČKA ITERACIJA

Grafičkom iteracijom moguće je vizualizirati orbite jednodimenzionalnog diskretnog sustava. Na taj način možemo dobiti neke informacije o ponašanju sustava kojeg promatramo.

U koordinatnom sustavu nacrtamo krivulju $y = f(x)$ i pravac $y = x$ na istom grafu. Orbitu nekog sjemena x_0 ucrtavamo na graf tako da povlačimo vertikalnu liniju od pravca u početnoj točki (x_0, x_0) do krivulje u točki $(x_0, f(x_0)) = (x_0, x_1)$. Postupak se nastavlja povlačenjem horizontalne linije od točke (x_0, x_1) do pravca u (x_1, x_1). Na taj način se od sjemena x_0 dolazi do slijedeće točke na trajektoriji, te se gore navedeni postupak ponavlja od točke (x_1, x_1) povlačenjem druge vertikalne linije do točke (x_1, x_2) na krivulji. Zatim se opet povlači horizontalna linja od (x_1, x_2) do pravca u (x_2, x_2).[1] Ovime se dobije niz parova linija koje završavaju na pravcu u nekoj točki (x_n, x_n), što se može vidjeti na slikama ispod.



Slika 1. Grafička iteracija gdje orbita sjemena x_0 teži prema fiksnoj točki z_0

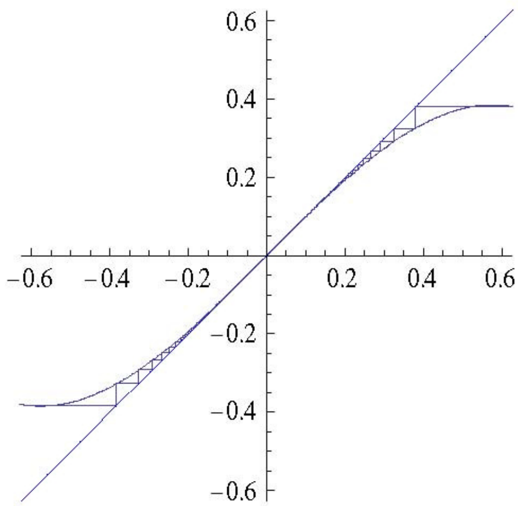


Slika 2. Grafička iteracija gdje je orbita periodna s 3 ciklusa

2.2. FIKSNE TOČKE

Postoji nekoliko tipova fiksnih točaka, tako da mogu biti privlačne, odbijajuće i neutralne.

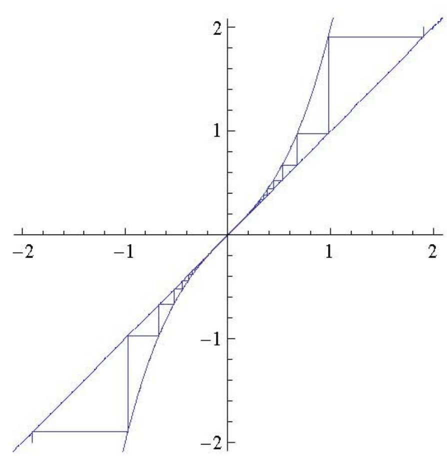
i. $|f'(x_0)| < 1$ tada je x_0 ponor.



Slika 3. Grafički prikaz za $|f'(x_0)| < 1$

Na slici 3 grafički je prikazan ponor, x_0 je ishodište (0,0) i svaka iteracija u okolini te točke vodi u nju.

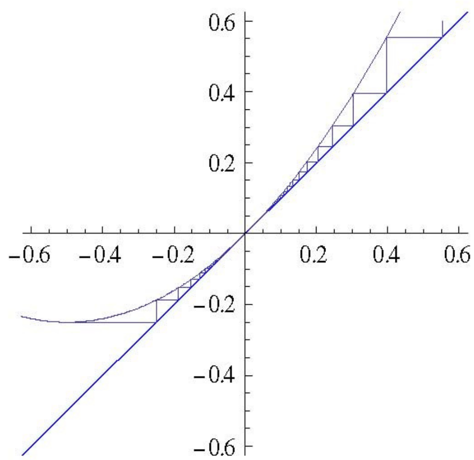
ii. $|f'(x_0)| > 1$ tada je x_0 izvor.



Slika 4. Grafički prikaz kada je $|f'(x_0)| > 1$.

Na slici 4 vidimo grafičku iteraciju s fiksnom točkom koja je izvor. Točka x_0 ima koordinate (0,0) i ona je odbijajuća fiksna točka, što znači da točke u okolini izvora bježe iz nje.

iii. $|f'(x_0)| \pm 1$ sve može biti, gdje je (0,0) privlačna točka s jedne strane,a odbijajuća s druge strane.



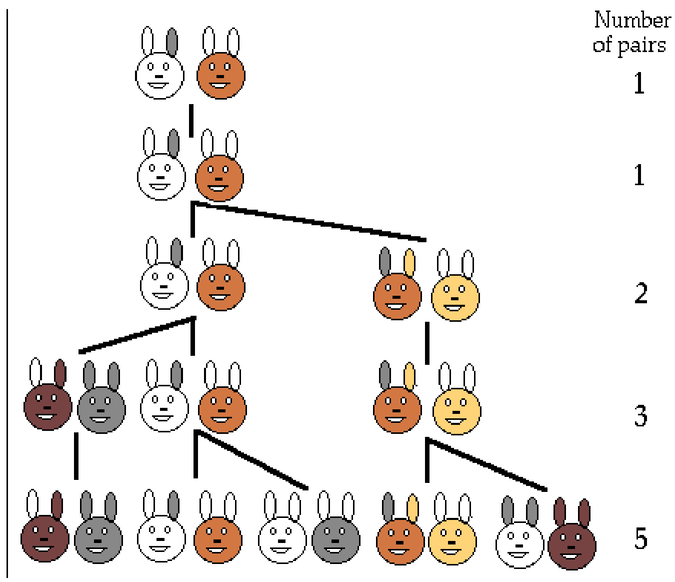
Slika 5. Grafički prikaz kada je $|f'(x_0)| \pm 1$.

Na slici 5 prikazana je grafička iteracija za slučaj kada x_0 može biti s jedne strane izvor, a s druge ponor, tj. može istovremeno biti privlačna i odbijajuća točka.

Dakle, možemo zaključiti da za neku funkciju *f*, periodna točka x_0 perioda *n* je fiksna točka od f^n , te ju možemo klasificirati kao ponor ili izvor ovisno o tome imamo li $|(f^n)'(x_0)| < 1$ ili $|(f^n)'(x_0)| > 1$.

3. DISKRETNI LOGISTIČKI MODEL

Populacija je skupina jedinki iste vrste koje žive na određenom prostoru u određenom vremenu te aktivno izmjenjuju genetski materijal dajući plodno potomstvo. To može biti skupina ljudi, životinja, biljaka ili nekih drugih organizama. Ljudi odavno nastoje modelirati rast populacije. Tako je npr. Leonardo iz Pise, poznat kao Fibonacci, u svom radu *Liber abaci* iz 1202. g. postavio tzv. problem razmnožavanja zečeva.[2]



Slika 6. Fibonaccijev niz.

Svi matematički modeli rasta populacije mogu se podijeliti u diskretne i kontinuirane.

Kontinuiran (*fluidan*, neisprekidan) je onaj sustav koji pokazuju kontinuirane promjene kroz vrijeme, tj. u proizvoljno malenom vremenskom periodu dolazi do promjene varijabli osim u slučaju kada sustav miruje. Diskontinuirani (diskretan, isprekidan, skokovit) je onaj sustav kod kojeg nema kontinuirane promjene varijabli, jer se te promjene ne događaju stalno, nego u diskretnim vremenskim intervalima. Ovakvi sustavi su češći u prirodi nego što bi se to moglo pomisliti, posebice u biološkom svijetu, a opisuju se iteracijskim jednadžbama.[1]

Rast neke populacije može se opisati jednom od jednostavnijih nelinearnih diferencijalnih jednadžbi 1. reda – logističkim modelom, koji predstavlja kontinuirani logistički model:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x(1 - \frac{x}{L})$$

gdje je t vrijeme, λ koeficijent rasta populacije, a L označava nosivi kapacitet, odnosno maksimalnu veličinu koju populacija može dosegnuti. Brzinu rasta populacije, *dx/dt*, možemo kraće zapisati kao x'. Navedena nelinearna jednadžba ima dvije vrijednosti x za koje je brzina $x'=0$, to su fiksne ili stacionarne točke $x= 0$ *i* $x= L$. Separacijom varijabli dobije se sljedeći izraz:

$$\frac{dx}{x(L - x)} = \frac{\lambda}{L} dt$$

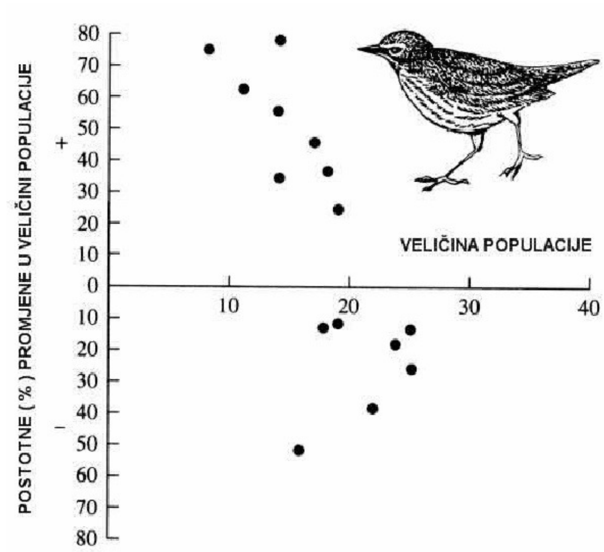
Integriranjem dobivamo sljedeću jednadžbu:

$$x(t) = \frac{LCe^{kt}}{1 + Ce^{kt}}$$

gdje je C konstanta koju predstavlja izraz:

$$C = \frac{x(0)}{L - x(0)}$$

Ovaj model često se naziva i populacijski model upravo zato jer se koristi za izračunavanje kretanja ili rasta neke populacije, bilo životinja, biljaka, ljudi i sl. Rast neke populacije promatra se u zatvorenoj sredini s ograničenjem L koje predstavlja maksimalnu veličinu koju populacija može dostići. Populacija krenuvši od neke male vrijednosti ubrzano raste, a onda u nekom trenutku približavajući se nosivom kapacitetu prelazi u usporeni rast. Može se dogoditi da populacija kreće iznad nosivog kapaciteta pa u tom slučaju broj jedinki ubrzano pada do neke vrijednosti.[3]



Slika 7. Primjer populacijskog modela.

Uzorak prikupljen iz prirodne populacije nije kontinuirana funkcija vremena. Stoga se za opis rasta populacije koristi diskretni logistički model. Promotrimo populaciju čiji se sudionici zbrajaju svake godine ili u nekom drugom definiranom vremenu. Gustoća populacije na kraju godine n označena je s x_n (dok je x_0 početna vrijednost populacije). Ako pretpostavimo da ne može doći do prenapučenosti populacije, rast takve populacije možemo opisati modelom eksponencijalnog rasta:

$$x_{n+1} = \lambda x_n$$

To zapravo znači da je populacija u sljedećoj godini direktno proporcionalna populaciji u promatranoj godini. Prema tome imamo:

$$x_1 = \lambda x_0$$

$$x_2 = \lambda x_1 = \lambda^2 x_0$$

$$x_3 = \lambda x_2 = \lambda^3 x_0$$

Očito je da je $x_n = \lambda^n x_0$ Ovo je primjer diferencijske jednadžbe 1. reda u kojoj se vrijednost x_n određuje iz vrijednosti x_{n-1}. Iz eksponencijalnog modela rasta koji je bez ograničenja vidimo da do neograničenog rasta, eksplozije populacije, dolazi kada je stopa rasta $\lambda > 1$, odnosno do neograničenog pada populacije, populacija izumire, za $0 \leq \lambda < 1$ dok za vrijednost $\lambda = 1$ populacija ostaje nepromijenjena.[3] No, u realnim uvjetima zbog prirodnih ograničenja, npr. ako se promatra populacija nekih životinjskih jedinki, ograničenja bi predstavljala ili nestanak hrane ili napad grabežljivaca ili neki drugi prirodni faktori populacija raste dok ne dođe do neke kritične točke nakon koje pada i tako u krug, što zapravo predstavlja uobičajeni životni ciklus. Upravo zbog približavanja realnim sustavima koristi se diskretni logistički model, koji je vrlo sličan kontinuiranom, s razlikom da se u diskretnom uvijek promatra samo jedna generacija u vremenu.[4]

1845. godine belgijski matematičar P. F. Verhulst našao je kompromis između realističnosti i jednostavnosti, osmislivši funkciju koja utjelovljuje i razdoblja obilja, prekomjernost populacije i izumiranje. Populacijski model može se predočiti diskretnim logističkim modelom oblika:

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n)$$

Član x_n je gustoća populacije, $(1-x_n)$ je ograničavajući faktor, koji sprečava nezgodne posljedice koje ima primitivniji oblik te funkcije: kada je x_n malen, $(1-x_n)$ je velik, i obratno, pa njihov umnožak nikada ne ide u krajnosti. Biološki gledano, to znači da je gustoća populacije jedne godine proporcionalna gustoći populacije prošle godine (x_n), raspoloživoj hrani, životnom prostoru i ostalim životnim uvjetima $(1-x_n)$. Posljedica toga je da se x_n u bilo kojoj iteraciji uvijek zadržava u intervalu, I, [0,1]. Kontrolni parametar λ se odabire u intervalu [0,4]. Kretanje početne populacije, x_0, može se predvidjeti jednostavnim iteriranjem kvadratne funkcije $f(x) = \lambda x (1 - x)$, odnosno logističkim preslikavanjem.[4]

Tada dobivamo slijedeće:

$$x_0$$

$$x_1 = \lambda x_0(1 - x_0) = f_\lambda(x_0)$$

$$x_2 = \lambda x_1(1 - x_1) = f_\lambda(x_1) = f_\lambda^2(x_0)$$

Logističko preslikavanje ima dvije fiksne točke. Fiksna točka nekog preslikavanja je točka koja se preslikava sama u sebe, tj. vrijedi

$$f_\lambda(x_f) = x_f$$

Uvjet da bi jednadžba imala fiksnu točku je:

$$\lambda\, x_f\left(1 - x_f\right) = x_f$$

iz čega proizlazi

$$x_1 = 0 \text{ te je stabilan za} 0 < \lambda \leq 1$$

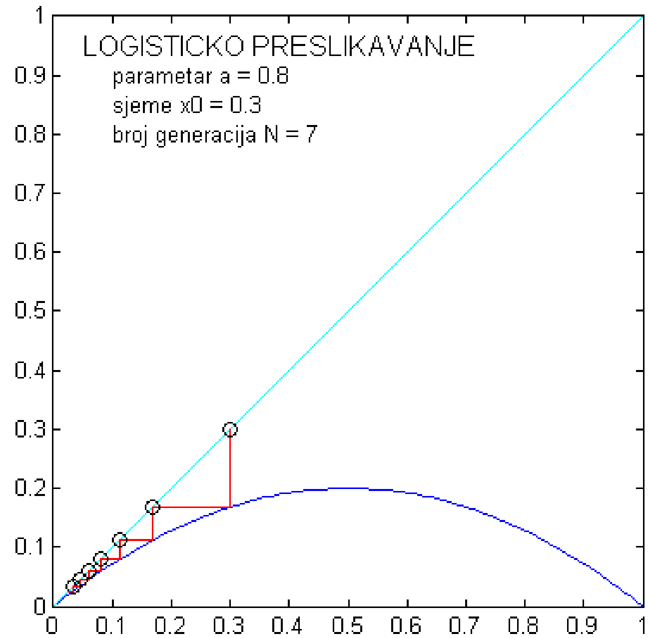
$$x_2 = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \text{ stabilan za } 1 < \lambda < 3$$

U slučaju $\lambda \leq 1$ ograničavajući član $(1\text{-}x_n)$ ne može spasiti populaciju od izumiranja, jer sve vrijednosti varijable x u tom rasponu teže nuli. Ali za malo veće kontrolne parametre događa se nešto vrlo slično onome što se događa i u pravim populacijama – ako je početna populacija malena (u omjeru prema maksimalnoj), tada se broj jedinki naglo poveća, populacija se razmnoži, potom zbog nedostatka hrane ponovno opada, pa slijedeće godine opet naraste i tako sve dok se ne stabilizira na određenoj vrijednosti *x*, nakon koje se brojnost populacije više ne mijenja.[3]

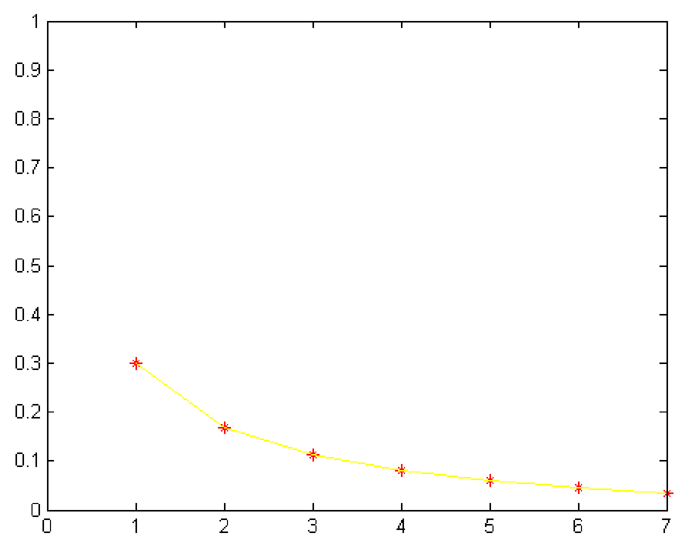
Druga fiksna točka postoji samo ako je $\lambda > 1$ jer u protivnom fiksna točka postaje negativan broj koji nije dio domene logističkog preslikavanja (striktno govoreći jest, ali se ne uzima jer nema fizikalnog značenja – populacija ne može biti negativna). Kao i kod svih dinamičkih sustava, zanimljivo je dugoročno predviđanje ponašanja konkretnog sustava za različite početne uvjete. Provedeni su različiti izračuni s odabranim parametrima rasta populacije, biotički potencijal, te odabirom početnih uvjeta promatrano je ponašanje sustava u diskretnim vremenskim razmacima. Za navedene primjere izračuna uzet je početni uvjet koji iznosi x_0= *0,3*, mijenjajući parametar λ, promatrana je funkcija unutar zadanog intervala I = [0,1].

Promjenom parametra λ dolazi do slijedećih pojava:

1. Za $0 < \lambda \leq 1$ populacija izumire neovisno o x_0. Ovdje postoji jedna fiksna točka a to je 0, jer je $f_\lambda(0) = 0$.

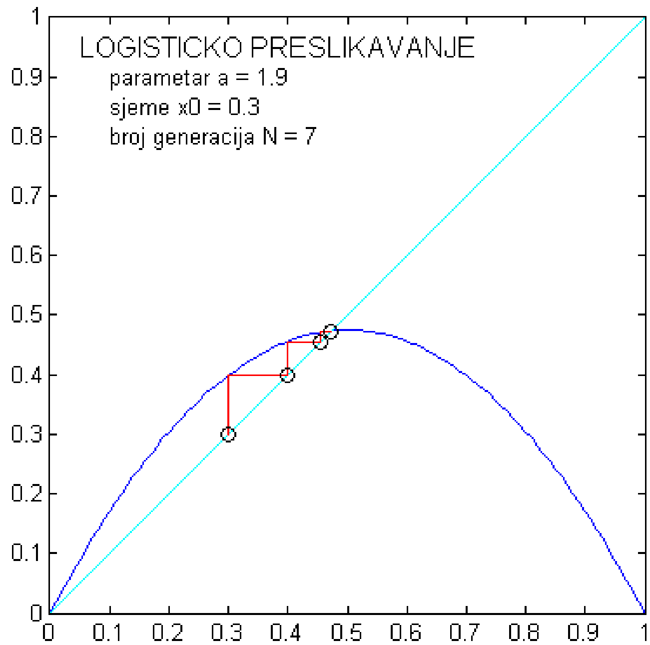


Slika 8. Ponašanje sustava za $\lambda = 0{,}8$. Privlačna fiksna točka je u 0.

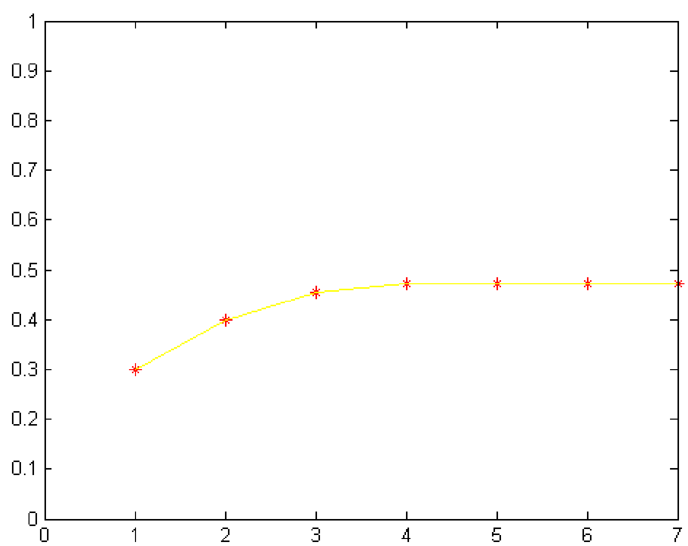


Slika 9. Prikaz vrijednosti sustava za λ = 0,8.Vrijednosti se smanjuju do *0*.

2. Za $1 < \lambda \leq 2$ sustav se stabilizira na $\frac{\lambda-1}{\lambda}$, neovisno o x_0.

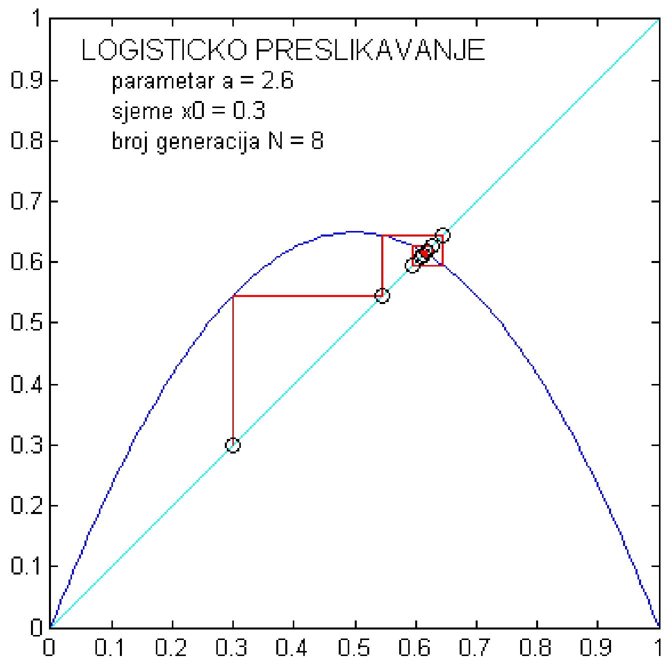


Slika 10. Ponašanje sustava za $\lambda = 1{,}9$. Privlačna točka sustava je $\frac{\lambda-1}{\lambda}$.

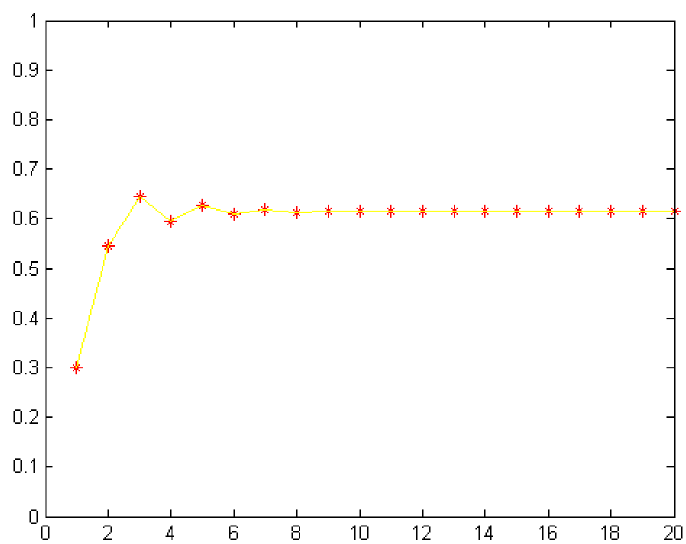


Slika 11. Prikaz vrijednosti sustava za $\lambda = 1{,}9$. Vrijednosti rastu do $\frac{\lambda-1}{\lambda}$, a zatim se ne mijenjaju.

3. Za $2 < \lambda \leq 3$ sustav oscilira a zatim se stabilizira na $\frac{\lambda-1}{\lambda}$. Ovdje postoji fiksna točka u $x_\lambda = \frac{\lambda-1}{\lambda}$ u I za $\lambda > 1$ i ona je privlačna za $1 < \lambda \leq 3$, a odbijajuća za $\lambda > 3$.



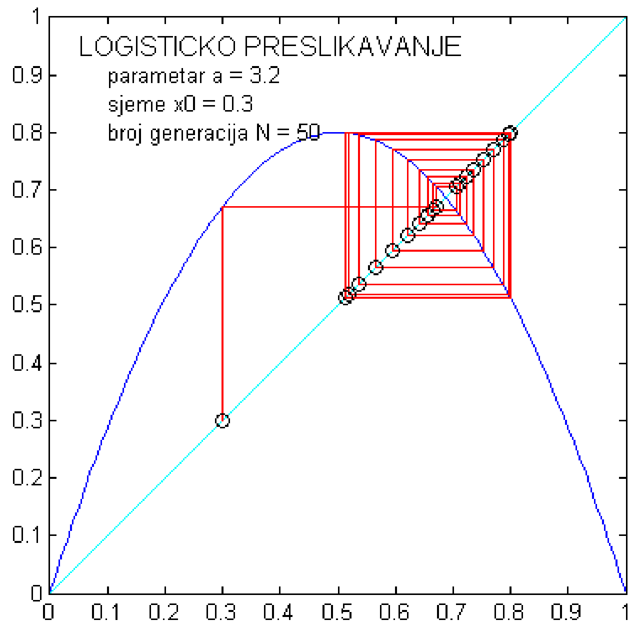
Slika 12. Ponašanje sustava za $\lambda = 2{,}6$. Sustav se stabilizira u vrijednosti $\frac{\lambda-1}{\lambda}$.



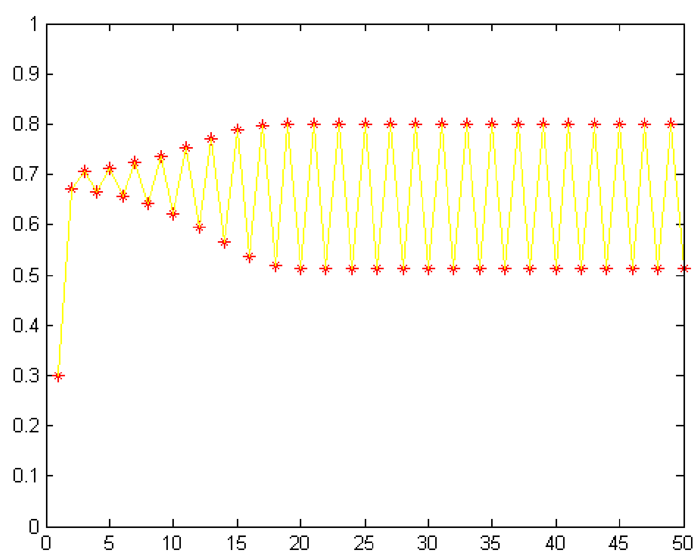
Slika 13. Prikaz vrijednosti sustava za $\lambda = 2{,}6$. Vrijednosti u početku osciliraju, a zatim se stabiliziraju na $\frac{\lambda-1}{\lambda}$.

Povećanjem biotičkog potencijala tj. λ iznad 3 dolazi do izbacivanja sustava iz ravnoteže i tada sustav traži novi ravnotežni položaj. Nakon nekog vremena sustav ulazi u stabilnu oscilaciju između dva broja odnosno sustav oscilira s periodom dva.

4. Za $3 < \lambda \leq 1 + \sqrt{6}$ *(3,45)*, nakon stabilizacije sustav oscilira između dvije vrijednosti.

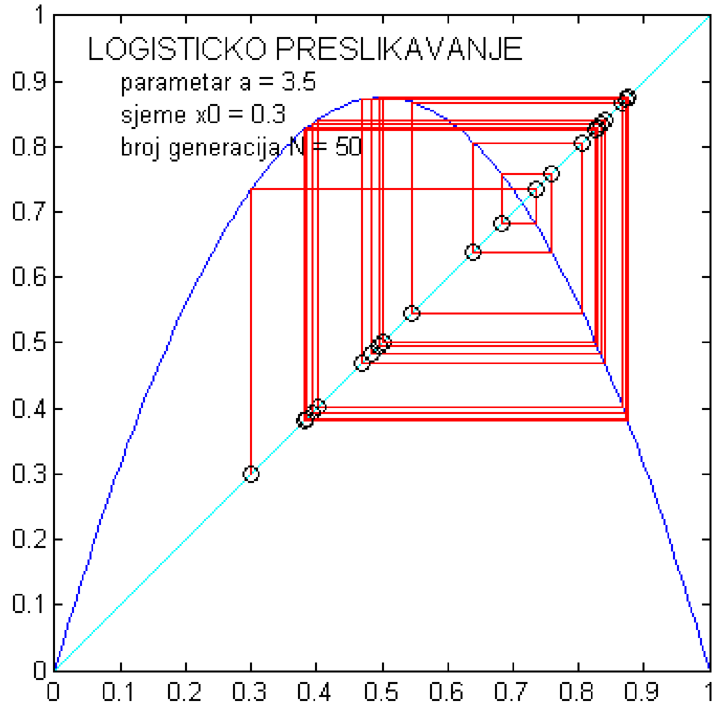


Slika 14. Ponašanje sustava za λ = *3,2*. Sustav oscilira između 2 vrijednosti.

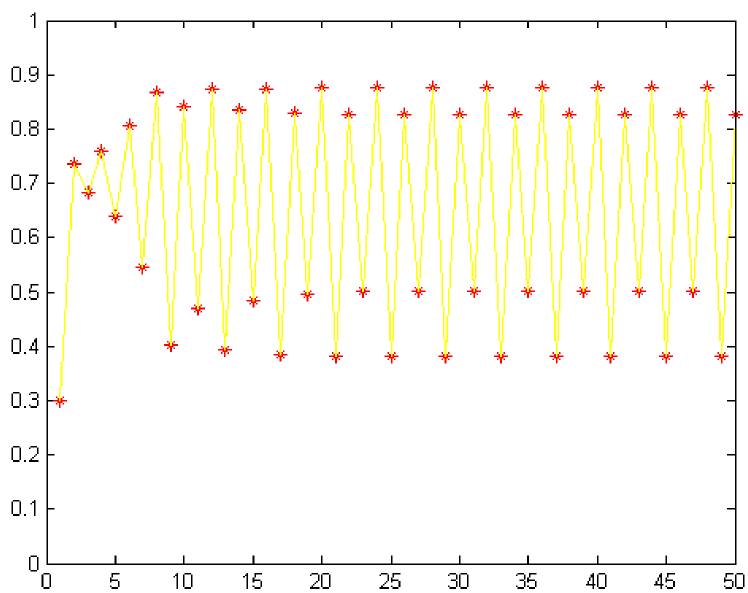


Slika 15. Prikaz vrijednosti sustava za λ = *2,6*. Nakon stabilizacije, vrijednosti osciliraju u 2 točke.

5. Za $3{,}45 < \lambda \leq 3{,}54$ sustav oscilira između 4 vrijednosti.

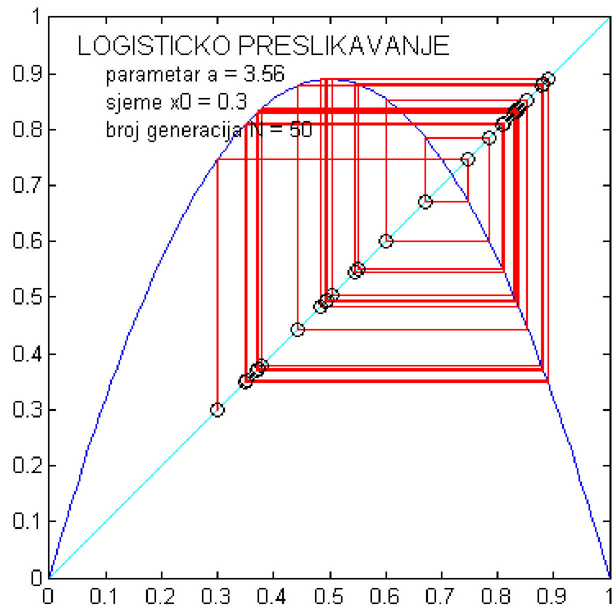


Slika 16. Ponašanje sustava za $\lambda = 3{,}5$. Sustav oscilira između 4 vrijednosti.

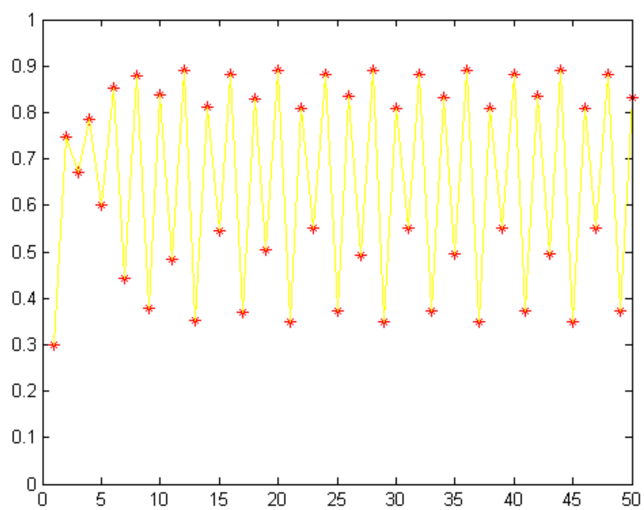


Slika 17. Prikaz vrijednosti sustava za $\lambda = 3{,}5$. Nakon stabilizacije vrijednosti osciliraju u 4 točke.

6. Za 3,54 < λ ≤ 3,57 sustav oscilira između 8, 16, 32, itd. vrijednosti.



Slika 18. Ponašanje sustava za $\lambda = 3{,}56$. Sustav oscilira između 8 vrijednosti.



Slika 19. Prikaz vrijednosti sustava za $\lambda = 3{,}56$. Vrijednosti osciliraju u 8 točaka.

Povećanjem λ populacija oscilira između četiri vrijednost, odnosno s periodom četiri. Period se udvostruči, a atraktor ima četiri fiksne točke. Nastavimo li i dalje povećavati biotički potencijal, period titranja se nastavlja udvostručavati. Pojavljuju se atraktori perioda 8, 16, 32, … Međutim, u jednom trenutku nastaje kaos koji je posljedica nepredvidljivih vremenskih nizova i preosjetljivosti na početne uvjete.[5]

4. KAOTIČNI SUSTAVI

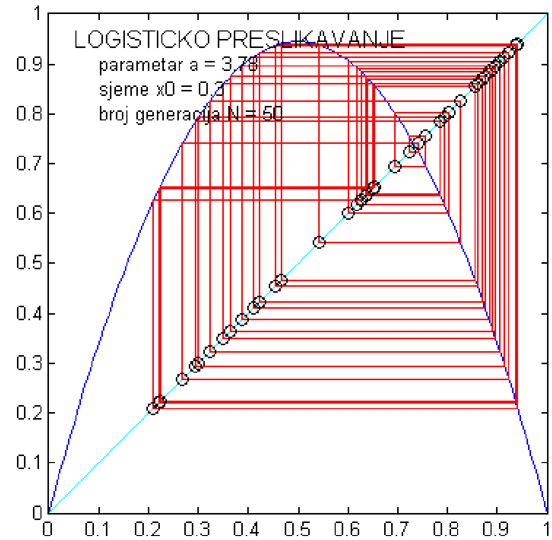
Po općeprihvaćenoj definiciji, teorija determinističkog kaosa je kvalitativno proučavanje nestabilnog neperiodnog ponašanja u determinističkim nelinearnim dinamičkim sustavima.

Nestabilno ponašanje je ono kod kojeg je za prijelaz između periodnog i neperiodnog, pa čak i između vrsta neperiodnog ponašanja, potrebna vrlo mala promjena u sustavu, to također uključuje vrlo značajnu osjetljivu ovisnost o početnim uvjetima.

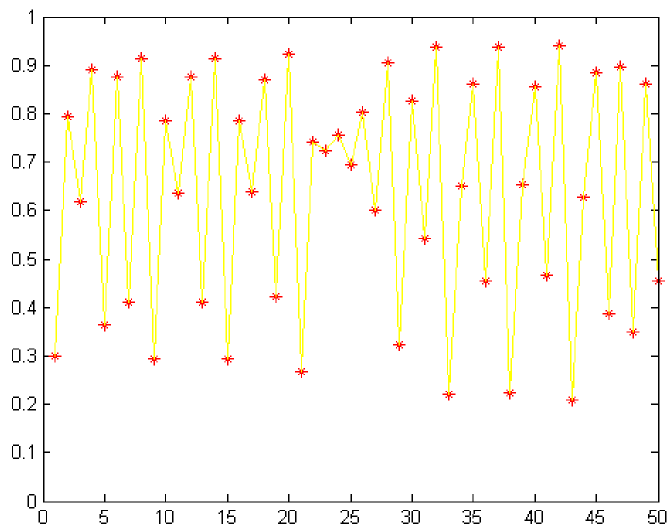
Neperiodno ponašanje označava da nijedna varijabla sustava ne prolazi kroz periodne promjene vlastitih vrijednosti, tj. da se niti jedno stanje sustava ne ponavlja u potpunosti. Ovdje je potrebno spomenuti da kaotični sustavi nisu u svim mogućim stanjima kaotični, već da, osim pravilnosti u kaosu, postoje i potpuno pravilna, periodna stanja, u kojima ne vlada kaos. Dakle, definicija ne kaže da teorija kaosa proučava samo kaotična stanja dinamičkih sustava, nego sva stanja sustava koji mogu u određenim uvjetima biti kaotični. Npr. kapajuća slavina je uglavnom periodni sustav, ali kako i takav sustav može biti kaotičan (konkretno, pri većem toku vode), onda je i ona iz perspektive determinističkog kaosa zanimljiva.[1]

Mogli smo opaziti da, bez obzira na početne uvjete, sustav uvijek završi u jednom od dva stabilna stanja: populacija ili preživi ili izumre. Ako dopustimo da biotički potencijal naraste iznad 3,57 stvari se uvelike mijenjaju jer nastupa kaos.[4]

1. U λ = *3,57* je početak kaotičnog ponašanja sustava. Za vrlo male promjene početne populacije dolazi do značajnih promjena s vremenom. Daljnjim povećanjem perioda sustav postaje sve kaotičniji.[5]

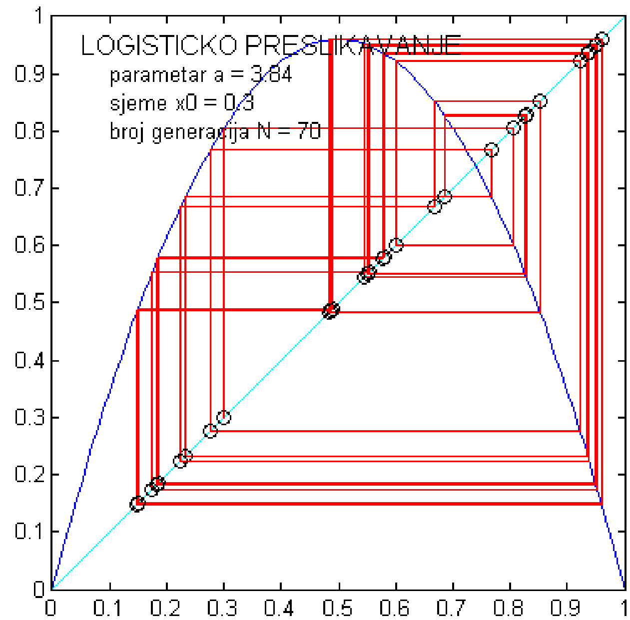


Slika 20. Ponašanje sustava za λ = *3,78* se ne može predvidjeti, sustav se ponaša kaotično.

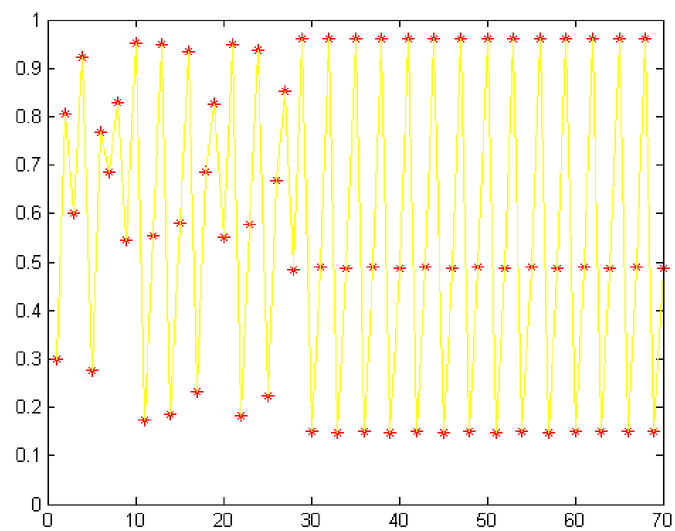


Slika 21. Prikaz vrijednosti sustava za λ = *3,78.* Vrijednosti su nasumične i kaotične.

2. U području $\lambda > 3{,}57$ ponašanje sustava je kaotično, ali postoje neka područja stabilnosti. Jedno takvo područje počinje u $\lambda = 1 + \sqrt{8}$ (oko 3,83). U tom području funkcija oscilira između 3, 6, 12, itd. vrijednosti.[5]

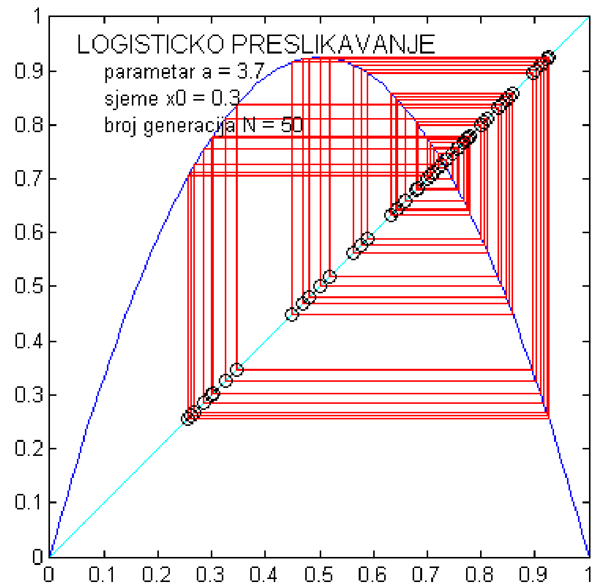


Slika 22. Ponašanje sustava za λ = *3,84*. Sustav oscilira između 3 vrijednosti

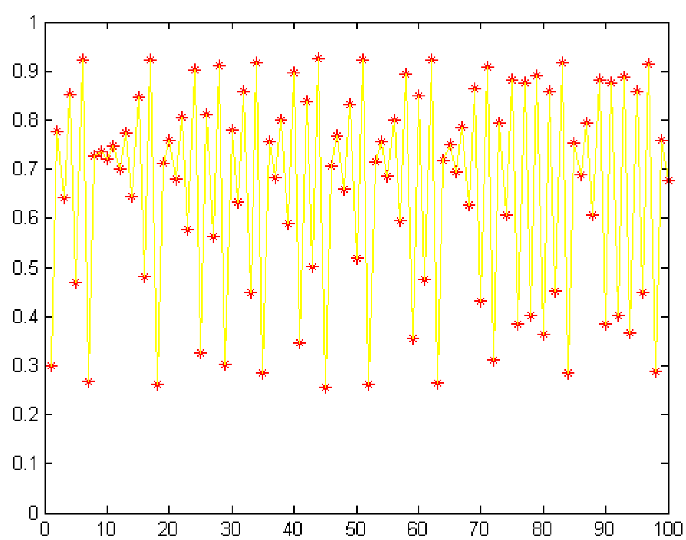


Slika 23. Prikaz vrijednosti sustava za λ = *3,84*. Nakon stabilizacije vrijednosti osciliraju u 3 točke.

3. Za vrijednosti λ u rasponu $3{,}5699 < \lambda \leq 3{,}8284$ funkcija se ponaša prema tzv. Pomeau–Manneville scenariju. Njega karakterizira periodna faza isprekidana nasumičnom pojavom kaotičnih vrijednosti. Taj scenarij se primjenjuje kod uređaja s poluvodičima.

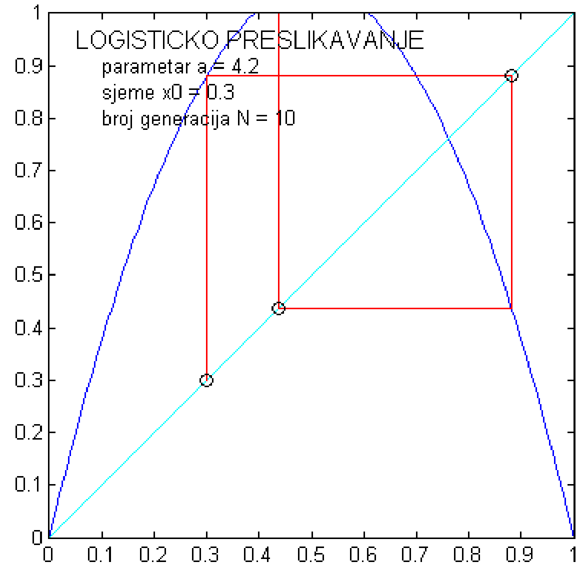


Slika 24. Ponašanje sustava za $\lambda = 3{,}7$.

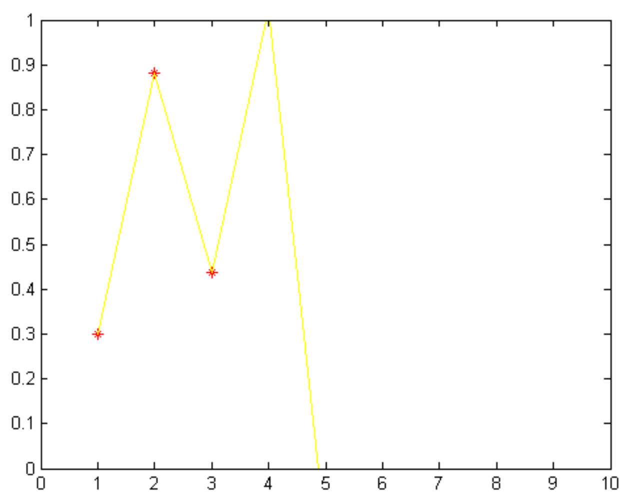


Slika 25. Prikaz vrijednosti sustava za $\lambda = 3{,}7$. Vrijednosti se ponavljaju periodno, ali su isprekidane nasumičnom pojavom kaotičnih vrijednosti.[4]

4. Za $\lambda > 4$ vrijednosti funkcije za sve početne x_0 ne nalaze se u intervalu [0,1].



Slika 26. Ponašanje sustava za $\lambda = 4{,}2$. Vrijednosti funkcije izlaze iz intervala [0,1] te se ne mogu vidjeti na grafu.



Slika 27. Prikaz vrijednosti sustava za $\lambda = 4{,}2$. Vrijednosti nisu u intervalu [0,1] te se ne vide.

Moguće je provjeriti dinamiku sustava za sve vrijednosti λ, uz bilo koju odabranu početnu vrijednost, kao i proizvoljan broj iteracija. Dakle sustav opisan dinamičkim logističkim modelom prolazi kroz sve faze koje dinamički sustav može manifestirati. Počinje sa stabilnim fiksnim točkama, završava u kaosu, kojeg obilježavaju velika osjetljivost na početne uvjete i nemogućnost predviđanja vremenskih nizova.[6]

5. ZAKLJUČAK

Ono što je nekada zadavalo glavobolje fizičarima, oblaci, vrtlozi i turbulencije, i što ih je tjeralo da se od toga ograde, ulazeći u neki fiktivni svijet kuglica, vakuuma, glatkih površina, jednostavnih mehaničkih zakona kojima je moguće predvidjeti sve, teorijom kaosa ušlo je u modernu znanost i uvuklo se u gotovo sva njena područja. Kao što je Benoît Mandelbrot, teoretičar kaosa rekao: *Oblaci nisu sfere, planine nisu stošci, obale nisu krugovi, kora nije glatka, niti munja ne putuje ravnom linijom.* Danas je nemoguće promatrati znanosti kao što je fizika, biologija, astronomija, geografija, geologija, kemija, a da se ne susretne s Lorenzovim efektom leptira , logističkim jednadžbama, bifurkacijama, redu u kaosu i kaosu u redu.

Tvrtka Goldstar Co., 1993. pokušala je teorijom kaosa privući kupce proizvevši perilicu rublja koja je za bubanj imala pričvršćen oscilator za potresanje. Zbog slabog marketinga, a i jake konkurencije, stroj nikada nije postao popularan, iako je navodno, njime oprano rublje bilo čišće i manje zgužvano.

U donešto širim razmjerima teorija determinističkog kaosa promijenila je filozofiju znanstvenika, ali i mnogih laika. Zajedno s kvantnom mehanikom omogućila je onaj mentalni pomak koji je bio potreban da ljudi shvate u kojoj mjeri je priroda deterministički stroj, podoban za eksploataciju, a u kojoj mjeri je svojeglava i nepredvidiva. Čovjekova svijest, um i duša, slobodna volja, u klasičnoj znanosti toliko daleki od prirode, sada u teoriji kaosa nalaze ne samo zbližavanje s prirodom, nego i potvrdu svojeg postojanja kao njezinog dijela, ni po čem posebno različitim od okoline. Svi procesi u čovjeku, od onih najprimitivnijih, do najsloženijih misaonih procesa, pod utjecajem su kaosa.[1]

6. LITERATURA

1. http://www.inet.hr/~ivnakic/kaos/2-1-Uvod_u_kaoticne_sustave.htm
2. http://elgrunon.wordpress.com/
3. http://e.math.hr/old/logisticko/index.html
4. http://hr.wikipedia.org/wiki/Teorija_kaosa
5. http://www.fsb.hr/matematika/download/ZS/razno/eksponencijalni_i_logisticki_rast
6. http://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map