FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE

SVEUČILIŠTA U ZAGREBU

ZAVOD ZA MATEMATIKU

KOLEGIJ: UVOD U MATEMATIČKE METODE U INŽENJERSTVU

SEMINARSKI RAD

LOGISTIČKI MODEL

Studenti: Mario Lovrić i Nino Barčanac

Zagreb, srpanj 2011.

1. Uvod
2. Modeliranje u programu Mathematica

Uvod:

U svim granama znanosti često susrećemo pojavu ovisnosti neke veličine o vremenu. Takve se veličine obično opisuju diferencijalnim jednadžbama. Na primjer brzina promjene veličine p u vremenu, može se prikazati izrazom $p'(t)$ ili $\frac{dp}{dt}$.

Jedan jednostavni jednodimenzionalni problem u idealnim uvjetima možemo definirati sljedećom jednadžbom:

$$\frac{dp}{dt} = rp$$

gdje je t vrijeme, p veličina koja pada ili raste u ovisnosti o vremenu, a r nekakva konstanta koja definira prirodu i vrstu pojave.

Za promjenu vremena od t do t+Δt promjena veličine p će se aproksimirati pomoću izraza:

$$\Delta p(t) \approx r\, p(t)\, \Delta t.$$

Općenito vrijedi: $p' = f(p,t)$

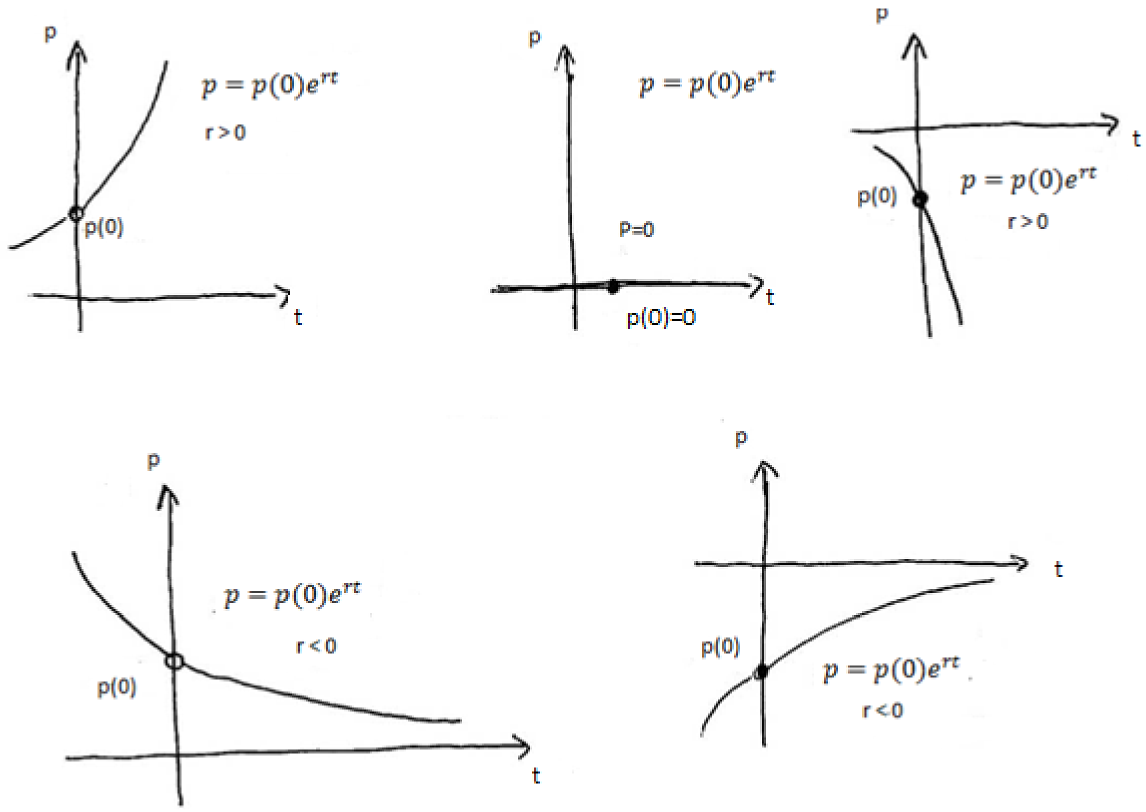
Diferencijalnu jednadžbu $\frac{dp}{dt} = r$ rješavamo integriranjem čime dobijemo lnp = lnC + rt. U eksponencijalnom zapisu to rješenje izgleda ovako:

$$p = Ce^{rt}.$$

I stoga ovaj model nazivamo eksponencijalni. S obzirom da u trenutku t = 0, vrijedi p = p(0), možemo C zapisati kao p(0), a prethodnu jednakost kao

$$p = p(0)e^{rt}$$

Kako bismo bolje razumjeli promjene p o t pogledajmo grafove.



Slika 1. Primjeri eksponencijalnih modela

Vidimo da smjer i brzina promjene rasta veličine p ovise o parametrima p(0) i konstanti r.
Međutim, modeli su idealni, u eksperimentu nećemo tako često naići na ovakva očekivana kretanja. U takvim situacijama ćemo metodom najmanjih kvadrata odrediti odstupanja i na temelju tih vrijednosti optimizirati parametre i bolje aproksimirati rješenje.

Kao što vidimo iz grafova, eksponencijalni model nema granica i stalno ubrzano raste, što nije baš čest slučaj u prirodi nego uglavnom imamo nekakva ograničenja. Stoga u diferencijalnim jednadžbama kojima opisujemo prirodne pojave prilagođavamo parametre uvodeći granicu K preko koje veličina p ne može prijeći. To je realno rješenje u jednadžbama koje opisuju rast populacije ili raspad materije.

Od brzine rasta veličine p očekujemo da će ubrzano rasti kad su početne vrijednosti niže,a da će brzina promjene opadati kako se približavamo limitu. Zato desnu stranu diferencijalne jednadžbe moramo množiti s takvim faktorom koji će davati vrijednost takvu da brzina postaje sve manja kako p raste.

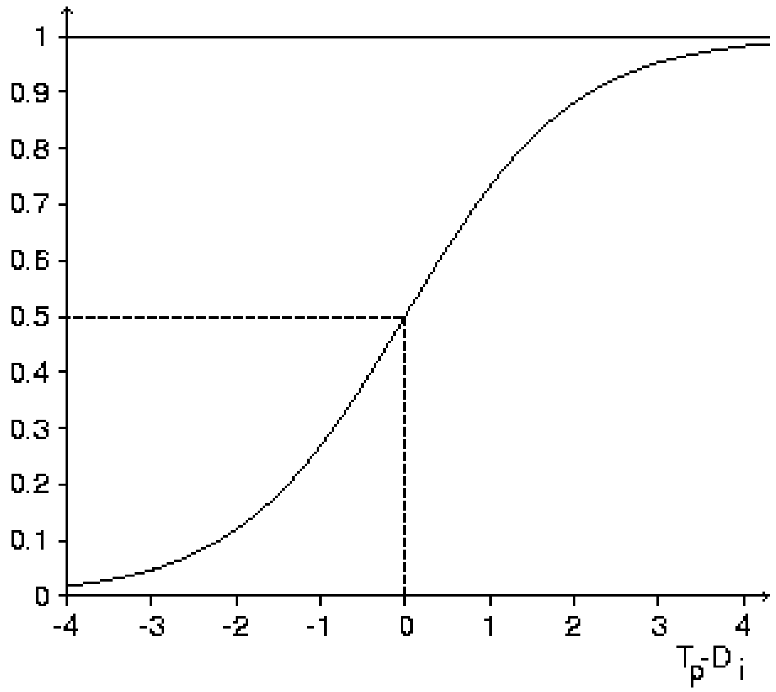
Možemo odmah pretpostaviti da je to vrijednost manja od 1, jer množenjem s manjom vrijednosti „štetimo“ brzini promjene p više ako je vrijednost p veća. To rješenje zadovoljava očekivanje u slučaju p = K, kad je vrijednost dosegla limit, rast će postati jednak nuli, tj nema više rasta.
Granicu K uvodimo funkcijom:

$$r(1-\frac{p}{K})$$

, te je uvrštavamo u diferencijalnu jednadžbu. Dobivena optimirana jednadžba za opis rasta populacije je tzv. l**ogistička jednadžba.**

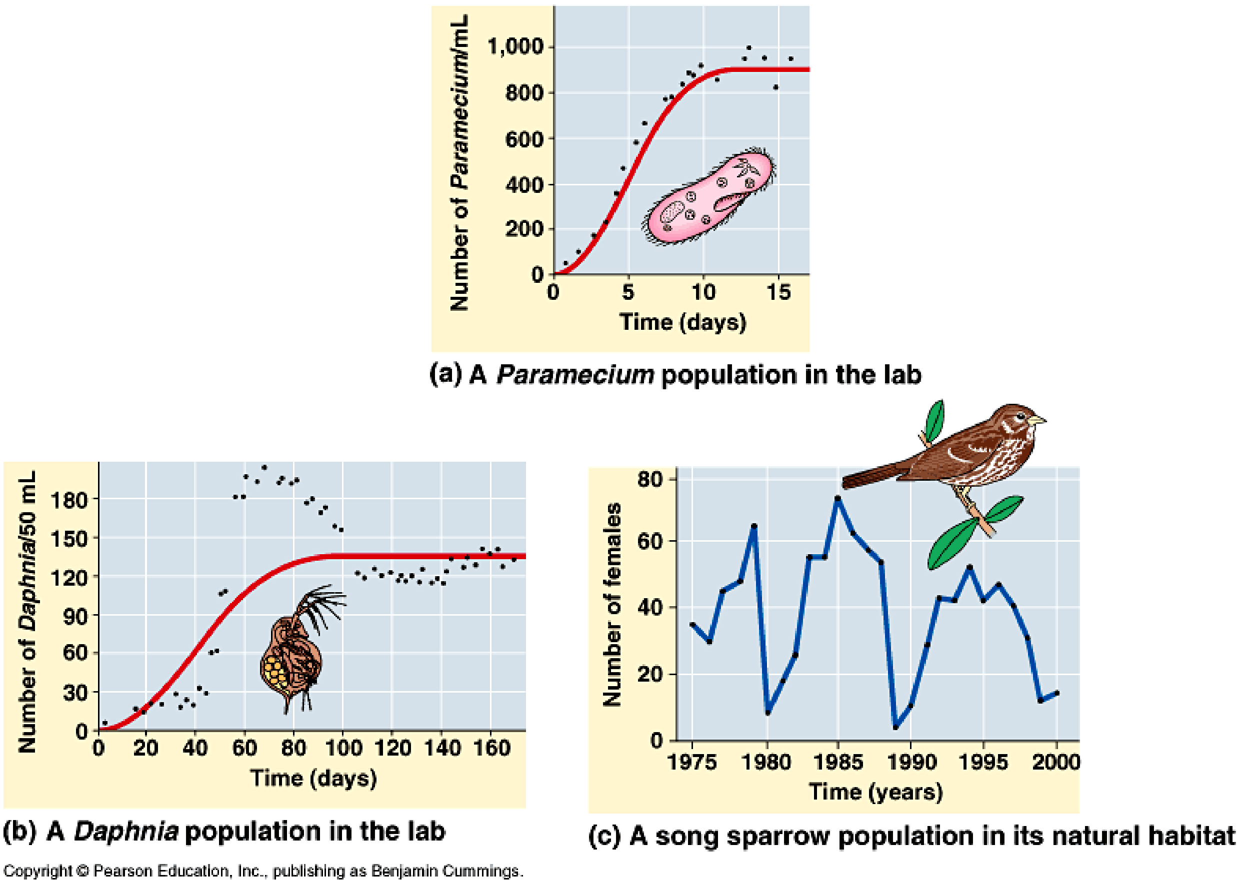
$$p' = r\,p\,(1-\frac{p}{K})$$

Za razliku od eksponencijalnog modela ovdje imamo dvije fiksne točke a to su p=0 i p=K.
Ako pogledamo graf jedne jednostavne logističke funkcije očekivano se pojavljuje točka infleksije, jer u ubrzani rast veličine p mora prijeći u usporeni.



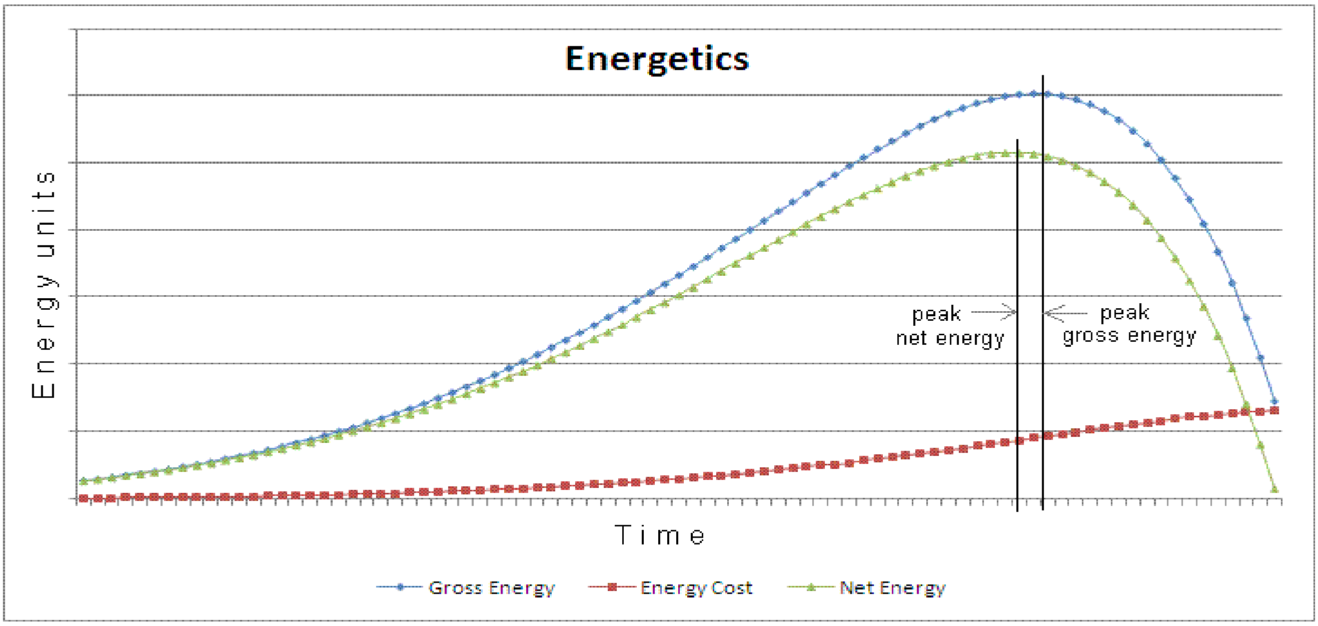
Slika 2. Grafički prikaz jednostavnog logističkog modela, crtkanim linijama jasno se vidi točka infleksije

Logistički model se može dalje optimizirati i možemo uvoditi dodatne parametre.
Na slici 3 se vidi nekoliko primjera kretanja populacije živih organizama. Kod brzine rasta populacije paracemiuma (jednostaničnog organizma) je očit logistički model, dok to nije slučaj kod npr. Vrapca.



Slika 3. Nekoliko primjera kretanja populacije u živom svijetu. (sadržaj preuzet sa webstranice http://kentsimmons.uwinnipeg.ca/16cm05/1116/16popbio.htm)

Još jedan primjer je proizvodnja energije gdje nam se granica očituje u dostupnosti resursa. Na slici 4 se vidi da se opet radi o logističkom modelu. Naime u proizvodnji energije ljudi prema svojoj prirodi odabiru najdostupnija i jeftinija rješenja. Kako nam energije nestaje, rastu ulaganja i troškovi (crvena krivulja na grafu), te na kraju kad resursa više nema, nema ni ulaganja. To je granica ili limit u našem slučaju.



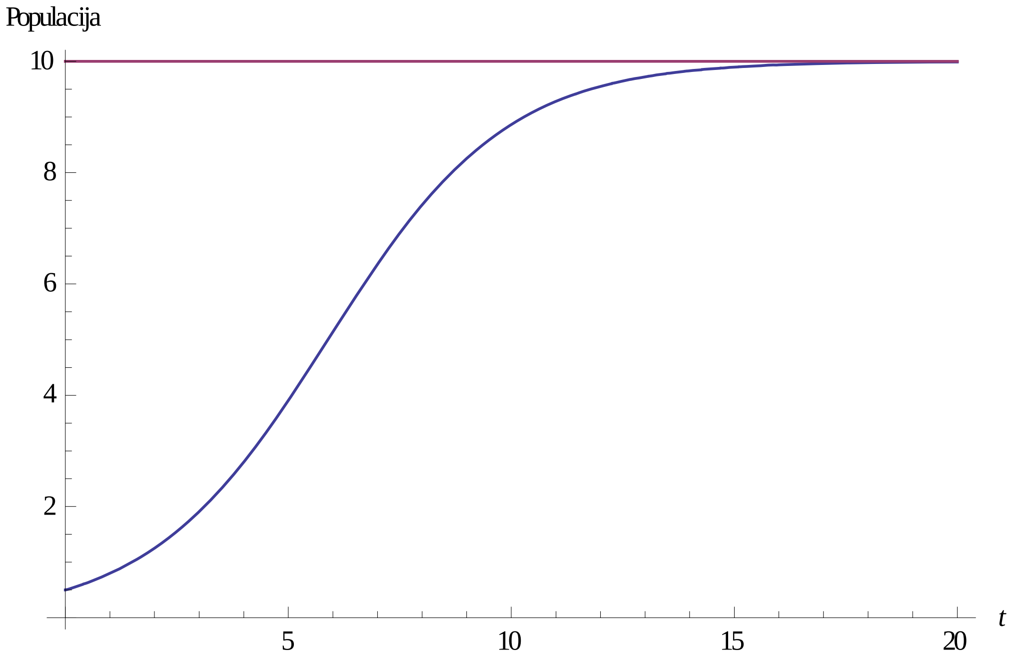
Slika 4. Grafički prikaz proizvodnje energije u vremenu t (sadržaj preuzet sa webstranice http://questioneverything.typepad.com/question_everything/2009/12/economic-dynamics-and-the-real-danger.html)

1. Modeliranje u programskom paketu *Mathematica*

   Najjednostavniji primjer računanja sa logističkom jednadžbom je onaj koji pretpostavlja određenu stopu rasta (koja je u ovom slučaju 0,5), početnu količinu populacije (0,5 u ovom slučaju) te nosivi kapacitet (koji iznosi 10). Znači diferencijalna jednadžba glasi:

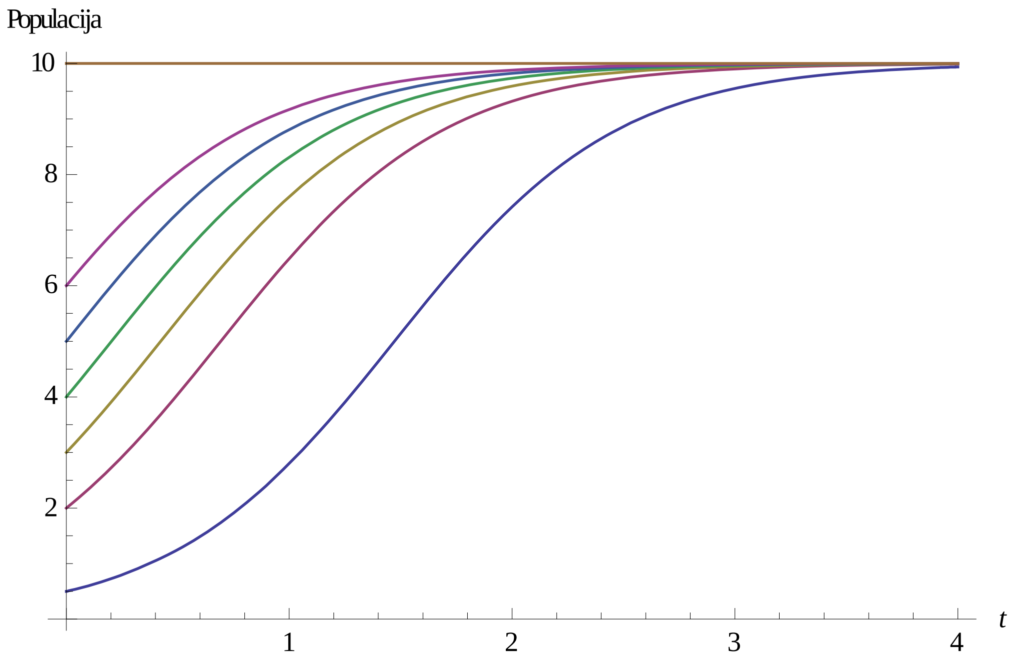
$$p'(t) = 0{,}5 \cdot p \cdot (1 - \frac{p}{10}), \text{ gdje je } p(0)=0{,}5$$

```
r:=0.5
K:=10
p0:=0.5
rez:=Evaluate[p[t]/.DSolve[{p'[t]==r*p[t]*(1-
(p[t]/K)),p[0]==p0},p[t],t]]
rez
Plot[{rez,K},{t,0,20},AxesLabel→{t,Populacija}]
```



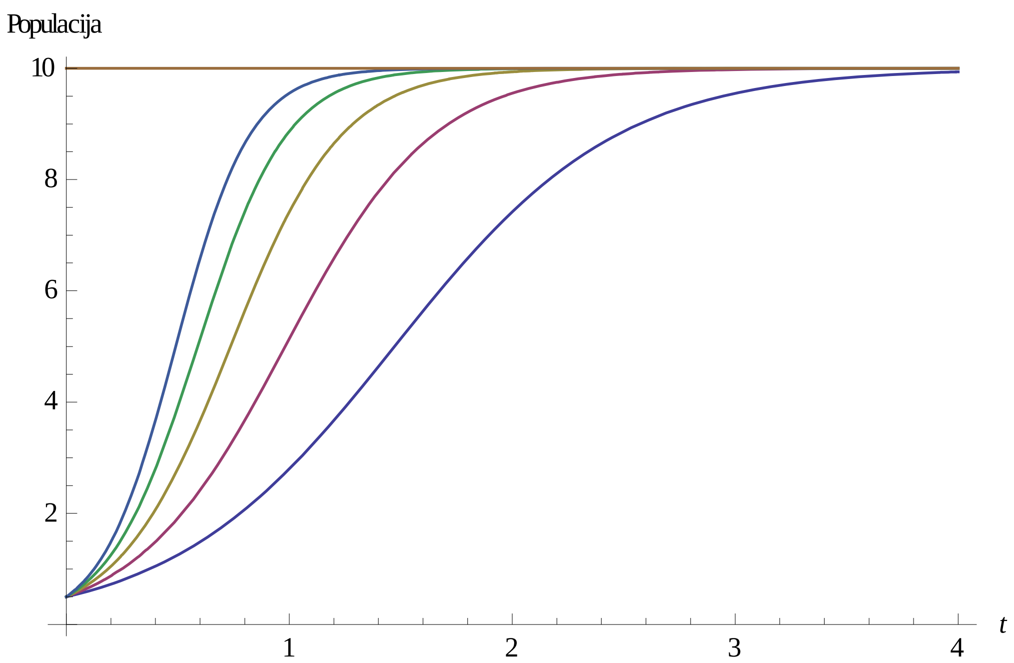
Slika 1. Odnos broja jedinki (populacije) o vremenu

Iz slike 1, vidljivo je da populacija eksponencijalno raste otprilike do pola vrijednost nosivog kapaciteta K, a onda se rast usporava dok ne dostigne K.



Slika 2. Ovisnost izgleda krivulje o promjeni broja početne veličine populacije

Ako mijenjamo početnu veličinu populacije vidimo (iz slike 2) da se kod krivulja sa većom početnom populacijom vremenski brže događa opadanje brzine rasta u promatranom vremenu nego kod populacije sa manjom početnom populacijom.

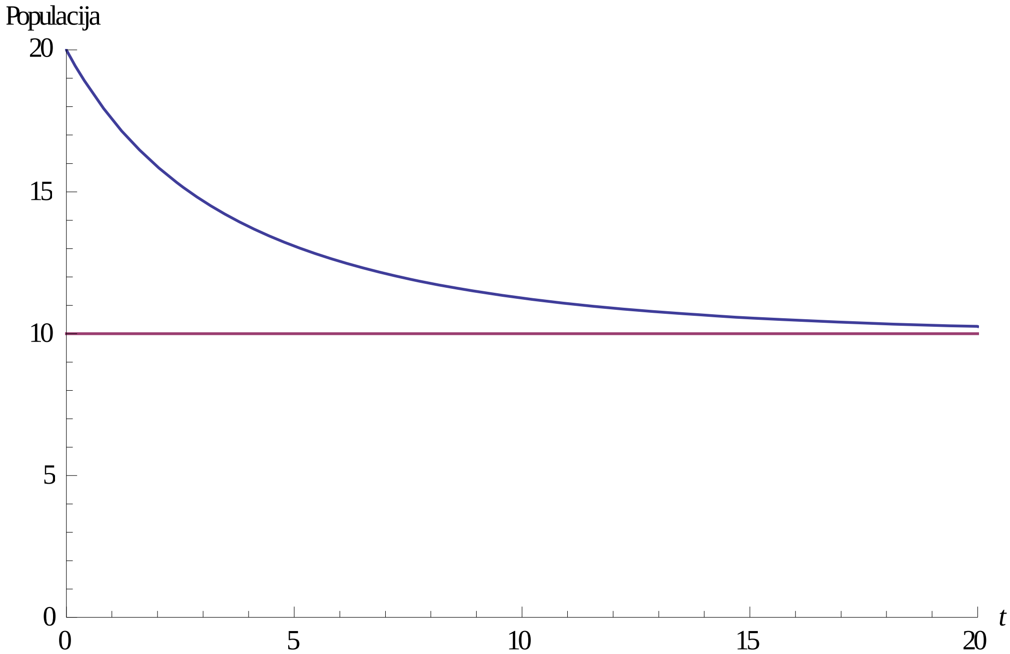


Slika 3. Ovisnost izgleda krivulje o promjeni stope rasta

Slika 3, prikazuje izgled krivulja ako mijenjamo stopu rasta. U ovom slučaju vidljivo je da sa većom stopom rasta populacija u kraćem vremenskom periodu poprimi maksimalnu vrijednost, što je i logično. Programi u *Mathematici* su identični samo se mijenjaju različite veličine.

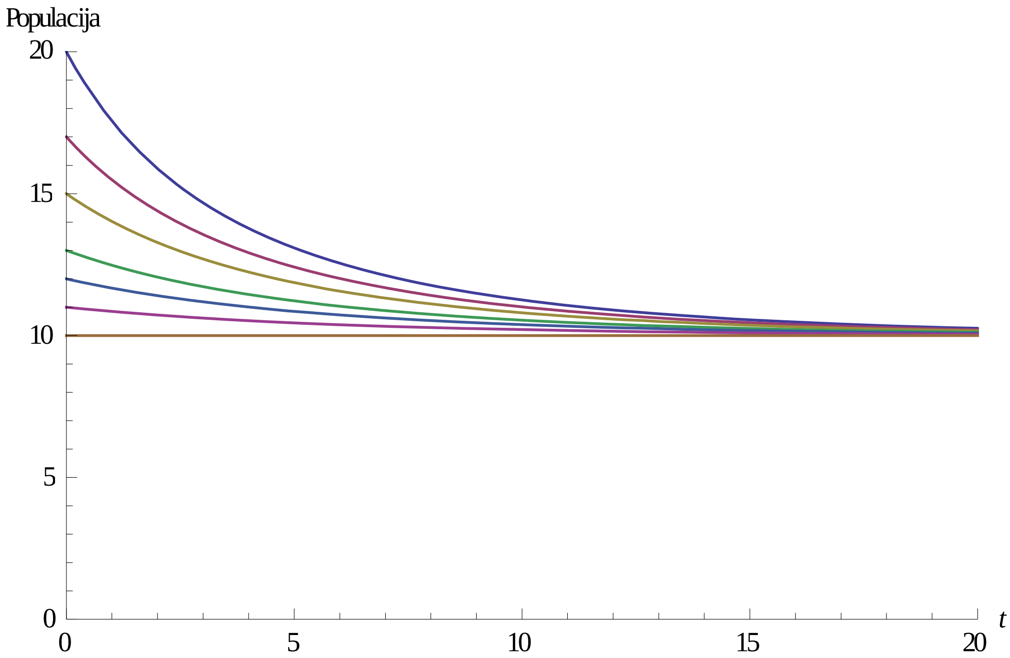
U slučaju kada je početna veličina populacije veća od nosivog kapaciteta, dešava se smanjenje broja populacije (slika 4):

```
r:=0.15
K:=10
p0:=20
rez:=Evaluate[p[t]/.DSolve[{p'[t]==r*p[t]*(1-
(p[t]/K)),p[0]==p0},p[t],t]]
Plot[{rez,K},{t,0,20},AxesLabel→{t,Populacija},AxesOrigin→{0,0
},PlotRange→{{0,20}, {0,20}}]
```

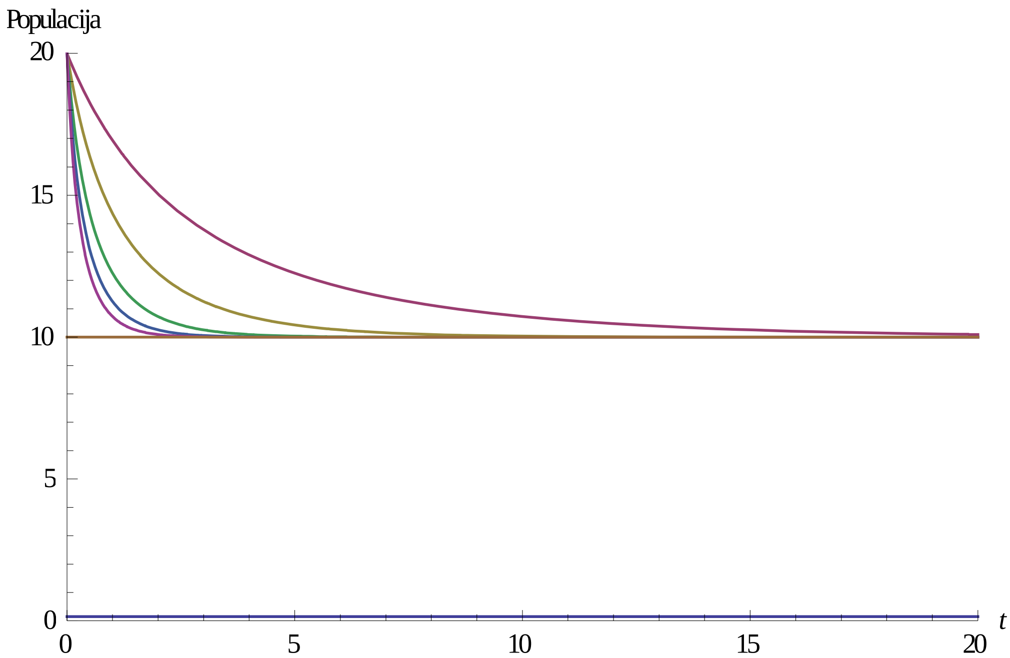


Slika 4. Prikaz smanjenja populacije zbog manjeg nosivog kapaciteta od početne populacije

Ako mijenjamo početnu populaciju a stopu pada ostavljamo istom dobijemo grafički prikaz prikazan na slici 5.



Slika 5. Oblici krivulja kada se početna populacija smanjuje



Slika 6. Oblici krivulja kada se mijenja stopa pada populacije

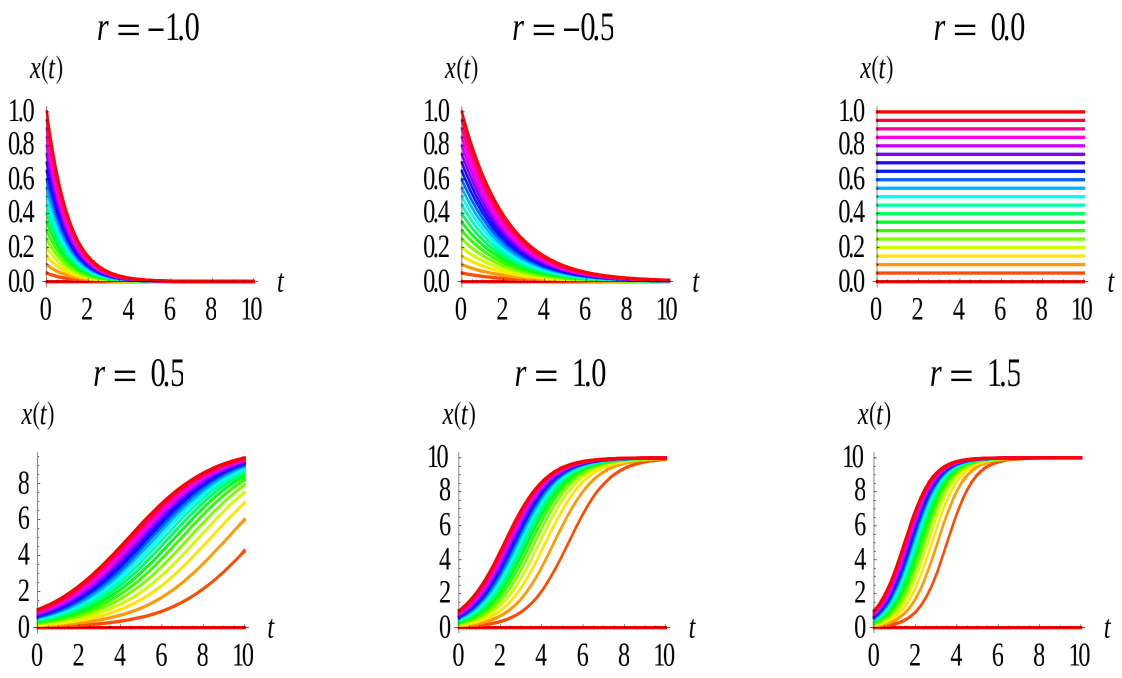
Iz slike 6 vidljivo je da populacija s najvećom stopom pada najbrže pada na veličinu nosivog kapaciteta dok za populaciju s najmanjom stopom pada vrijedi obrat.

Sumarno možemo usporediti izglede krivulja za vrijednosti stope rasta ili pada, gdje vrijedi sve prethodno spomenuto za izglede krivulja:

```
Show[GraphicsArray[Partition[Table[
    Plot[Evaluate[Table[( 10*ⅇr t* x0)/(10-x0+(ⅇr
t)*x0),{x0,0,1,.05}]],{t,0,10},
     DisplayFunction→Identity,

PlotLabel→TraditionalForm[HoldForm[r]⩵PaddedForm[r,{2,1}]
],

AxesLabel→TraditionalForm/@{t,x[t]},PlotStyle→Hue/@Range[
0,1,.05],PlotRange→All],
    {r,-1,1.5,.5}],3]
  ],ImageSize→500,GraphicsSpacing→{-.07,.1}]
```



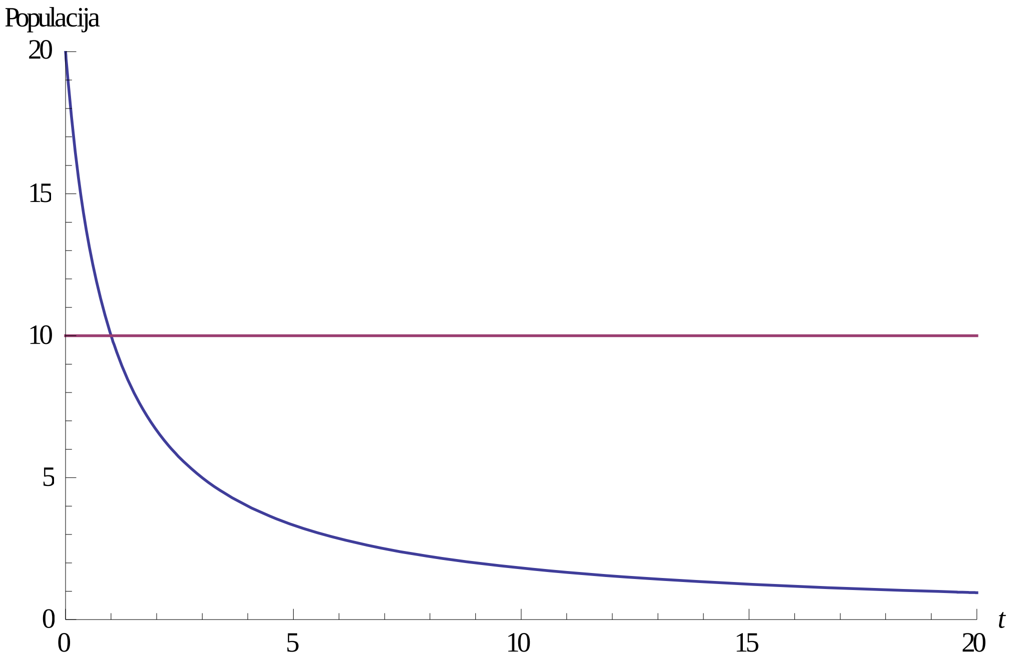
Slika 7. Izgledi krivulja s obzirom na vrijednosti stope rasta odnosno pada, r

Ako upotrijebimo logistički model s useljavanjem i iseljavanjem jednadžba izgleda ovako:

$$p'(t) = r \cdot p \cdot \left(1 - \frac{p}{K}\right) - a$$

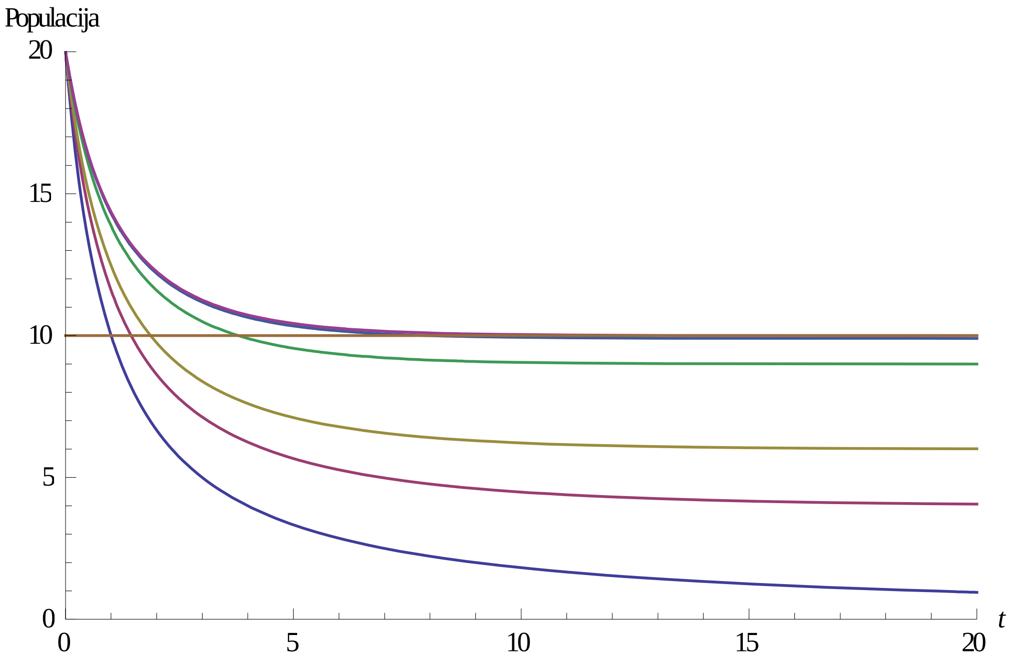
Ako je a>0, radi se o iseljavanju, dok je a<0 useljavanje. Kada se uzme u obzir iseljavanje (a>0) izgled krivulje je slijedeći:

```
r:=0.5
K:=10
p0:=20
a:=1
rez:=Evaluate[p[t]/.DSolve[{p'[t]==r*p[t]*(1-p[t]/K-
a),p[0]==p0},p[t],t]]
rez
Plot[{rez,K},{t,0,20},AxesLabel→{t,Populacija},AxesOrigin→{0,0},Plot
Range→{{0,20}, {0,20}}]
```



Slika 8. Izgled krivulje uzimajući u obzir faktor iseljavanja

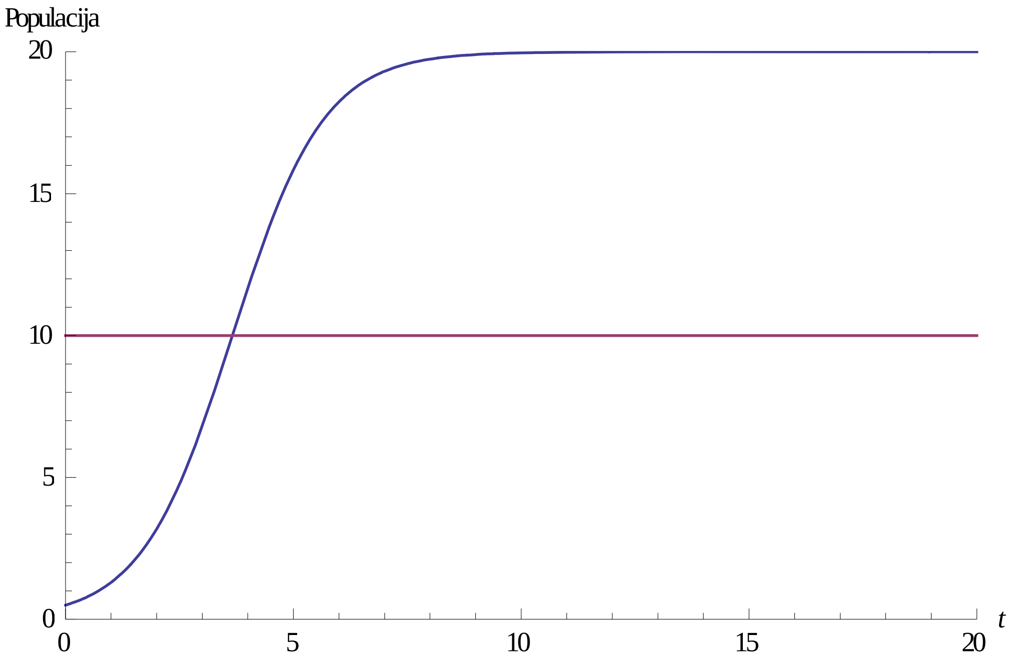
Iz slike 8 vidljivo je smanjenje populacije ispod nosivog kapaciteta, upravo zbog uračunavanja faktora iseljavanja *a*. Slika 9 prikazuje izglede krivulja za različite vrijednost *a*=1, 0,9, 0,6, 0,4, 0,1, 0,01. Iz tako prikazanih krivulja vidljivo je da se krivulja približava graničnoj vrijednosti smanjivanjem parametra *a*.



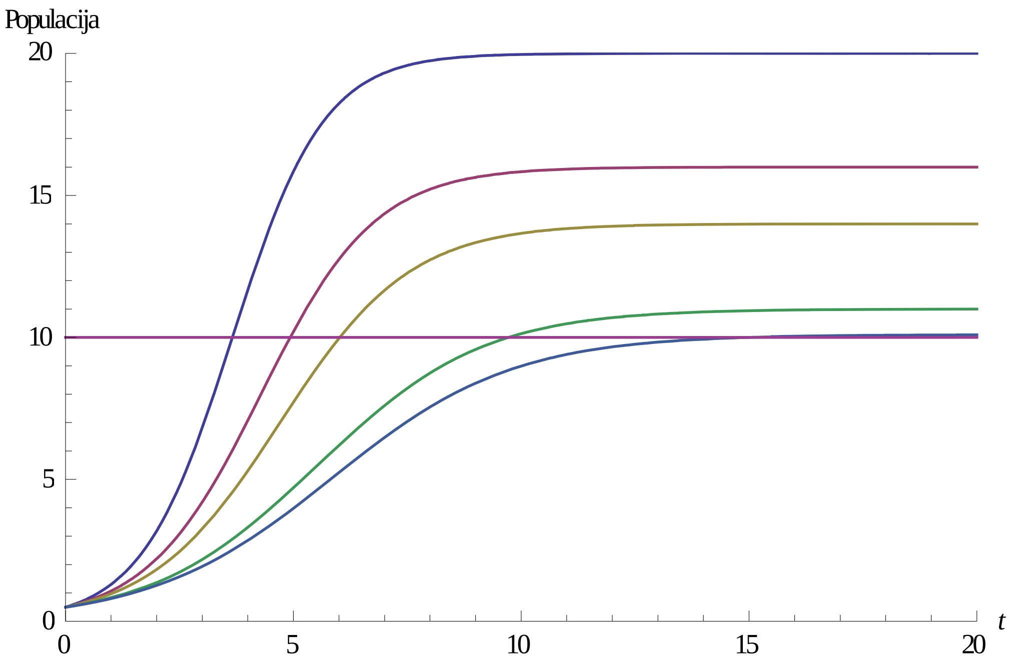
Slika 9. Izgled krivulja iseljavanja za određenu populaciju

Kod useljavanja imam obrnutu situaciju parametar a<0:

```
r:=0.5
K:=10
p0:=0.5
a:=-1
rez:=Evaluate[p[t]/.DSolve[{p'[t]==r*p[t]*(1-p[t]/K-
a),p[0]==p0},p[t],t]]
rez
Plot[{rez,K},{t,0,20},AxesLabel→{t,Populacija},AxesOrigin→{0,0},Plot
Range→{{0,20}, {0,20}}]
```



Slika 10. Izgled krivulje koja odgovara *a*<0 kod slučaja useljavanja



Slika 11. Izgled krivulja za različite vrijednosti parametra *a*

Iz slika 10 i 11 (krivulje s različitim vrijednostima parametra *a*), vidljivo je povećanje populacije preko nosivog kapaciteta i to za veće vrijednosti parametra *a* populacija u kraćem vremenu doseže veće vrijednosti.