SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TENOLOGIJE

ZAVOD ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI STUDIJ EKOINŽENJERSTVO

SEMINARSKI RAD:

MODEL SUŽIVOTA GDJE JEDNA VELIČINA OMETA DRUGU

Voditelj rada: Studenti:

dr.sc.Ivica Gusić, red.prof. Nikolina Martinec

dr.sc. Miroslav Jerković, viši asistent Matea Šutalo

Ivana Tomašković

Lipanj, 2012

Sadržaj

1. UVOD

Nijedan organizam nije sam na ovome svijetu, niti jedan čovjek nije otok, barem dio svog života provodi u nekakvoj zajednici. Svaki organizam rođenjem pripada zajednici i populaciji određene vrste koja na istom staništu koegzistira s populacijama istih ili drugih vrsta.

Organizmi djeluju jedni na druge, kako unutar populacije, tako i među populacijama. Međuodnosi se mogu kretati od simbiotskog načina suživota do borbe za opstanak. Jednostavnija međudjelovanja mogu se modelirati pa tako i odnos među populacijama gdje jedna populacija na drugu utječe samo redukcijom broja njenih jedinki, dok ta druga populacija na prvu ne utječe uopće.

Model suživota gdje jedna vrsta ometa drugu jednostavan je matematički model koji se može koristiti u svrhu promatranja i shvaćanja kako će se razvijati i ponašati dvije skupine jedinki dviju različitih vrsta, a da su pritom na neki način izolirane od ostalih vrsta, pri čemu jedna vrsta na drugu utječe samo tako da joj smanjuje kapacitet.

2. DINAMIČKI SUSTAVI

Dinamika općenito govori o promjeni, stoga se može reći da dinamički sustav opisuje međusobnu zavisnost sustava varijabli i njihovu promjenu u vremenu. Dinamički sustavi opisani su diferencijalnim i diferencijskim jednadžbama. Dinamički sustavi mogu biti kontinuirani, diskontinuirani ili kombinacija navedenih (hibridni).

Kontinuiran (“fluidan”, neprekidan) je onaj sustav koji pokazuje da u proizvoljno malenom vremenskom periodu dolazi do promjene vrijednosti varijabli (dok su parametri sustava stalni). Takvi su sustavi opisani diferencijalnim jednadžbama, i intuitivno su najbliži stvarnim uvjetima u prirodi.

Diskontinuirani (diskretan, isprekidan, skokovit) je onaj sustav kod kojeg se promjene ne događaju stalno, nego u diskretnim vremenskim intervalima.

Ponašanje dinamičkih sustava moguće je predočiti orbitama (trajektorijama), koje se, nakon dovoljno vremena, mogu razviti u skup koji nazivamo atraktorima. Atraktori čine dio faznog prostora promatranog sustava, odnosno njih smatramo geometrijskim podskupom faznog prostora. Orbita dinamičkog sustava unutar atraktora može biti periodna ili kaotična.

Geometrijska predodžba dinamičkih sustava olakšava nam razumijevanje promatranog sustava.Da bi se moglo predvidjeti ponašanje dinamičkog sustava za neko određeno vremensko razdoblje ili da bi se mogla proučavati povijest dinamičkog sustava, potrebno je riješiti njegovu jednadžbu. Problem je što se mnogi sustavi ne mogu zapisati pomoću jedne jednadžbe, a čak i da se mogu, ta jednadžba (ili sustav jednadžbi) najčešće nije eksplicitno rješiva. Cilj nije pronaći točna rješenja jednadžbi, cilj je odgovoriti na pitanja poput „Hoće li se sustav umiriti do stacionarnog stanja, a ako hoće, koja su moguća stacionarna stanja?“ ili „Ovisi li ponašanje sustava kroz duže razdoblje vremena o početnim uvjetima?“. Znači, cilj je kvalitativno opisati sustav. Važno je također opisati fiksne točke ili stacionarna stanja danog dinamičkog sustava jer su to vrijednosti varijabli koje se neće promijeniti s vremenom.

Jednako tako su zanimljive i periodne točke jer su to stanja sustava koja se ponavljaju nakon određenog perioda vremena. Pri proučavanju dinamičkih sustava važnu ulogu imaju trajektorije.

Trajektorija je putanja ili orbita točke $(x_{0,}y_0)$kroz sva vremena, odnosno to je skup svih stanja (život) dinamičkog sustava (koji ima gornje početne uvjete – naime, tek sve trajektorije opisuju sva stanja).

Dinamički sustavi mogu biti linearni (jako rijetko) ili nelinearni. Nelinearni dinamički sustav je onaj sustav čiji je model opisan nelinearnim jednadžbama.

Rast neke populacije može se opisati jednom od jednostavnijih nelinearnih diferencijalnih jednadžbi 1. reda – logističkim modelom, koji predstavlja kontinuirani logistički model:

$$x' = (dx/dt) = kx \times (1 - x/M)(1)$$

gdje je t vrijeme, $k$koeficijent rasta populacije, a M označava nosivi kapacitet, odnosno maksimalnu veličinu koju populacija može dosegnuti.(dx/dt) predstavlja brzinu rasta populacije i možemo to kraće zapisati kaox'. Ovaj model često se naziva populacijskim modelom upravo zato jer se koristi za modeliranje kretanja neke populacije, bilo neke biljne ili životinjske vrste, uključujući i ljudsku.

3. MODEL SUŽIVOTA GDJE JEDNA VELIČINA OMETA DRUGU

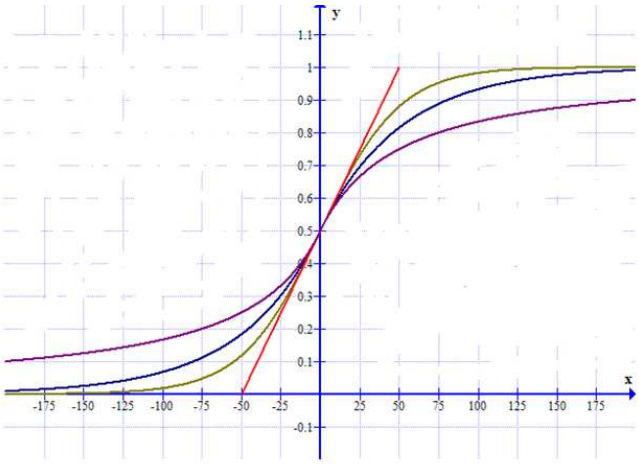
Model predstavlja situaciju gdje jedna veličina (vrsta) ometa drugu pri čemu ta druga ne ometa prvu, znači jedna nesimetrična situacija. Ovaj model nije jedini kojim se ova situacija može modelirati, ali je svakako jedan od najjednostavnijih nelinearnih modela. Od varijabli imamo x, y i t. Ako govorimo u biološkim terminima, varijable x i y predstavljaju pojedine organizme, odnosno vrste, a $t$predstavlja vrijeme. Imamo situaciju u zatvorenom sustavu gdje varijabla y ne utječe na varijablu x. U tom sustavu, varijabla x se normalno razvija i jednako ponaša bez obzira postoji li varijabla y u sustavu ili ne postoji. Ako varijabla y postoji, onda varijabli x nije bitno koliko je varijable y u okolini, jednostavno varijabla y uopće ne utječe na varijablu x. Međutim, varijabla x ometa varijablu y i u biti, što je varijabla x veća po iznosu, varijabli y je teže i manje je ima. U sustavu postoji neki određeni maksimum do kojeg može ići varijabla x i do kojeg može ići varijabla y. Taj maksimum predstavlja nosivi kapacitet do kojeg se svaka pojedina varijabla može razvijati. Svugdje gore, a i dalje, bolje je veličina nego varijabla. Logistička jednadžba za razvoj varijable x postavlja se na sljedeći način :

$$x' = dx/dt = ax \times (1 - x/K) \quad (2)$$

Prema izrazu (2) imamo jednu veličinu (x) koja se razvija u vremenu (t). Brzina razvoja te veličine ovisi o trenutnoj količini veličine te njenom nosivom kapacitetu (K) vrlo bitan je i koeficijent a. Kada nosivi kapacitet teži beskonačnosti ili ako je količina veličine jako malena, izraz (x/K)teži nuli. Tada se izraz u zagradi približava vrijednosti 1 što znači da je brzina razvoja veličine u tom slučaju praktički proporcionalna veličini. Zato je rast veličine eksponencijalan za male vrijednosti veličine. Pri velikim vrijednostima veličine izraz(x/K) teži vrijednosti 1, što znači da izraz u zagradi teži nuli, pa se rast veličine eksponencijalno usporava i teži nekoj konstantnoj vrijednosti, a to je iznos nosivog kapaciteta. Drugim riječima, krivulja razvijanja opisana ovakvom jednadžbom ima sigmoidalan oblik i stupanj rasta ovisi o trenutnoj količini te veličine (Slika1.). Radi drugog pristupa tumačenju jednadžbe (2), ona se može prikazati i na sljedeći način:

$$x' = dx/dt = ax - ax \times (x/K)(3)$$

Vidimo da imamo x^2. Ako je $0 < x < 1, x_2$ je još manji po iznosu te se drugi član za male vrijednosti veličine x praktički gubi. Koeficijent $a$predstavlja koeficijent razvoja veličine x pri malim količinama. S obzirom da se radi o razvijanju, tj. rastu veličine,$a > 0$.



Slika 1. Na slici su prikazane logistička sigmoidalna funkcija (zlatna linija), prilagođena eksponencijalna funkcija (plava linija), linearna funkcija (crvena) i još jedna sigmiodalna funkcija (ljubičasta linija). Funkcije su podešene tako da nagib u nuli iznosi 0.01 (za pomak na x osi za jednu jedinicu, funkcija raste ili pada za 0.01 jedinicu na y osi).

Bitno je naglasiti da se radi o malim količinama jer postoji ograničenje, a to je$K$– nosivi kapacitet za$x$. Kad se približavamo nosivom kapacitetu, kao što je objašnjeno maloprije, rast veličine x se usporava. Logistička jednadžba za razvoj varijable $y$bez prisutnosti varijable x postavlja se slično kao i za razvoj varijable x:

$$y' = dx/dt = by \times (1 - y/L) \qquad (4)$$

Analogno logističkoj jednadžbi (3) za razvoj veličine$x$, koeficijent b je koeficijent razvoja veličine y pri malim količinama, aL je nosivi kapacitet za veličinu y kada ne bi bilo varijable x. Međutim, ima je, i što je više ima, to više ometa razvoj veličine y pa se i kapacitet veličine y smanjuje.

Najjednostavniji model je da zamislimo da veličina x nema drugog utjecaja na veličinu y osim što joj smanjuje kapacitet. Znači, veličina y se nastavlja jednako ponašati, a veličina x ne utječe na nju nikako drukčije osim tako što veličine y ne može biti onoliko koliko bi je bilo kad ne bi bilo veličine x. Prema tome, korekcije u gornjim jednadžbama (4) uvodimo samo kod nosivog kapaciteta i to tako da se on umanjuje za neku funkciju od x, $f(x)$.

$$y' = dy/dt = by \times \{1 - [y/L - f(x)]\} (5)$$

Najjednostavniji model bio bi uz pretpostavku da se kapacitet veličine y linearno smanjuje s povećanjem veličine x i to u slučaju kad je $f(x)$= x. Međutim, to implicira da povećanje veličine x za 1 znači smanjenje nosivog kapaciteta za 1, a to nije skroz realno pa je bolje napisati $f(x) = cx$pri čemu c označava neku konstantu što u prijevodu znači da neka jedinka x može ometati dvije, tri ili više jedinki y. Kad se ove korekcije uzmu u obzir,jednadžba (5) poprima oblik:

$$y' = dy/dt = by \times [1 - y/(L - cx)] \ (6)$$

Sustav logističkih jednadžbi (2) i (6) za razvoj pojedinih varijabli

$$x' = dx/dt = ax \times (1 - x/K)$$

$$y' = dy/dt = by \times [1 - y/(L - cx)]$$

nelinearan je što znači da egzaktno rješavanje nije izgledno. U biti, iz prve logističke jednadžbe x, možemo odrediti kao funkciju od t, ali uvrštavanjem dobivenog rješenja u logističku jednadžbu za razvoj veličine y u prisutnosti veličine x, dobiva se komplicirana diferencijalna jednadžba koja se može riješiti numerički, što nije praktično. Zato se pristupa kvalitativnom opisu rješenja.

4. PRIMJERI MODELA SUŽIVOTA GDJE JEDNA VELIČINA OMETA DRUGU U MATLABU

U ovom poglavlju prikazani su primjeri u Matlabu koji se sastoje od grafova i komentara dobivenih rezultata. Proučavali smo utjecaj početnih uvjeta i parametara na sudbinu dviju vrsta. U daljnjem tekstu populacija jedne vrste (x) nazvana je „napadači“ ("agresori"), a druge (y) "žrtve".

Što se tiče parametara, prvo imamo koeficijente aibkao brzinu ili intenzitet razvoja ili razmnožavanja napadača, odnosno žrtve. Koeficijent$c$ govori o nasrtljivosti napadača, tj. na koliko jedinki žrtava ima utjecaj jedna jedinka napadača. Zatim imamo kapacitete K i L koji nam govore kolika je maksimalna teoretska količina pojedine populacije do koje se ona može razmnožiti. Početni uvjetix_0 i $y_0$označavaju početnu količinu napadača, odnosno žrtve.

Napadači mogu dostići svoj maksimalan broj K jer žrtva nema nikakav utjecaj na njih, dok žrtva nikad neće ostvariti puni brojčani potencijal.

4.1. Početno stanje sustava – ravnoteža

$x' = dx/dt = ax \times (1 - x/K)$

$y' = dy/dt = by \times [1 - y/(L - cx)]$

Sustav je u ravnoteži ako je:

$dx/dt = 0$

$dy/dt = 0$

Postoje 4 slučaja:

1. **slučaj**

$ax = 0$

$by = 0$

uz pretpostavku da ja $a > 0$ i $b > 0$ slijedi

$x = 0$

$y = 0$

Prvi slučaj govori da populacije nikada nije bilo niti da će je ikad biti.

2. **slučaj**

$ax = 0$

$1 - y/(L - cx) = 0$

Iz čega slijedi

$x = 0$

$y = L$

Drugi slučaj govori da će se broj žrtava fiksirati pri svom nosivom kapacitetu ako nema agresora.

3. **slučaj**

$1 - x/K = 0$

$by = 0$

iz čega slijedi

$x = K$

$y = 0$

Treći slučaj govori da će broj agresora biti fiksiran pri svom nosivom kapacitetu ako nema žrtava.

4. Slučaj

$1 - ({}^{x}/_{K}) = 0$

$1 - (y\ /\ (L - cx)\ ) = 0,$

iz toga slijedi da je

$x = K$

$y = L - cx$

Ako uzmemo da je

$K = 10$

$L = 11$

c=0,1

Sustav je u ravnoteži ako je $x = 10$ i $y = 10.$

U kasnijim primjerima koristili smo ovaj slučaj sustava u ravnoteži.

Početno stanje sustava – ravnoteža

Primjer 1.

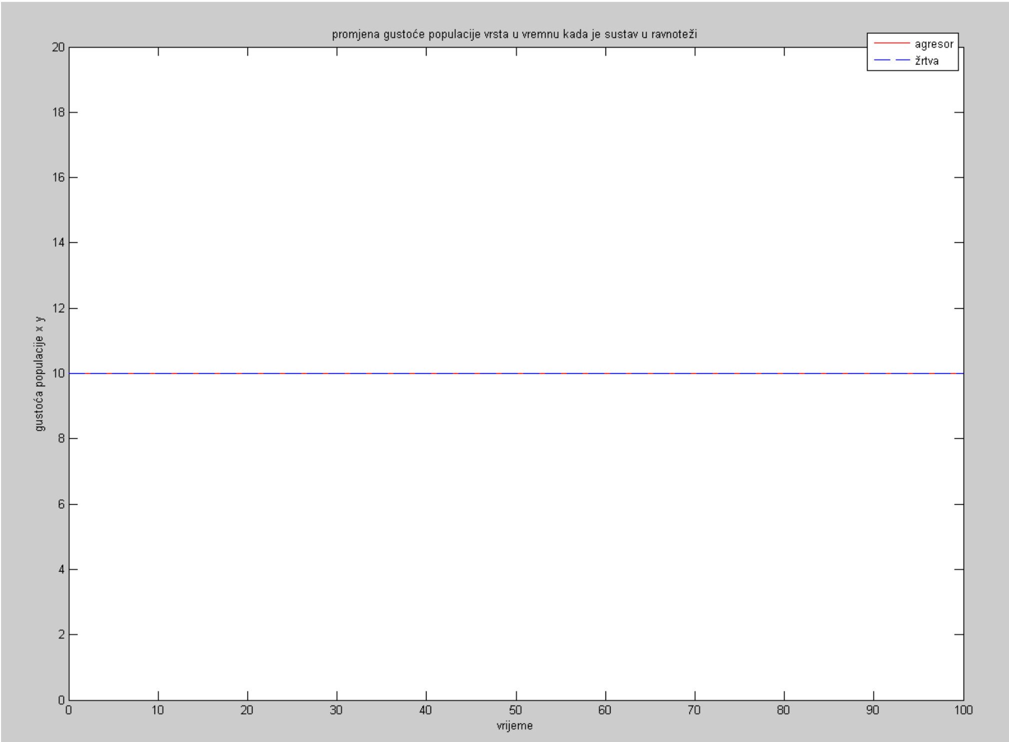
```
function dy = agrzrt(t,y);
dy = zeros(2,1);
global a b c K L
dy(1) = a*y(1) * (1-(y(1)/K));
dy(2) = b*y(2)*(1-((y(2)/(L-c*y(1)))));

clear, clear global
global a b c K L
a=0.1;
b=0.1;
c=0.1;
K=10;
L=11;
t0=0;
tmax=100;
y(1) = 10;
y(1) = 10;
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-7 1e-7]);
[t,Y] = ode45(@agrzrt,[t0 tmax],[y(1) y(1)], options);
clf reset
figure(1)
plot(t, Y(:,1),'r')
hold on
plot(t, Y(:,2), '--b')
axis([0 100 0 Y(2)])
legend('agresor','žrtva')
```

U Primjeru 1. $x0 = 10$ i $y0 = 10$ što znači da je početan broj agresora, odnosno žrtve 10. K,broj do kojeg se agresor može razviti, je također 10, a pošto žrtve ne utječu na napadače.Ravnotežni kapacitet napadača je uvijek jednak kojom god se brzinom razmnožavali. c je 0,1 što znači da je potrebno 10 napadača da bi se broj žrtava smanjio za 1.

Da bi i ravnotežni kapacitet žrtava bio kroz cijelo vrijeme jednak potrebno je maksimalan broj žrtava povećati za 1 od početnog broja, tj. $L = 11$.

Iz grafa 1. možemo vidjeti da su kapaciteti žrtava i napadača (agresora) u ravnoteži uvijek jednaki. Kako vrijeme prolazi, broj obiju populacija se ne mijenja.



Graf 1. Promjena gustoće populacije vrsta u vremenu kada je sustav u ravnoteži

4.2. Utjecaj koeficijenta *c*, odnosno utjecaj napasnosti napadača

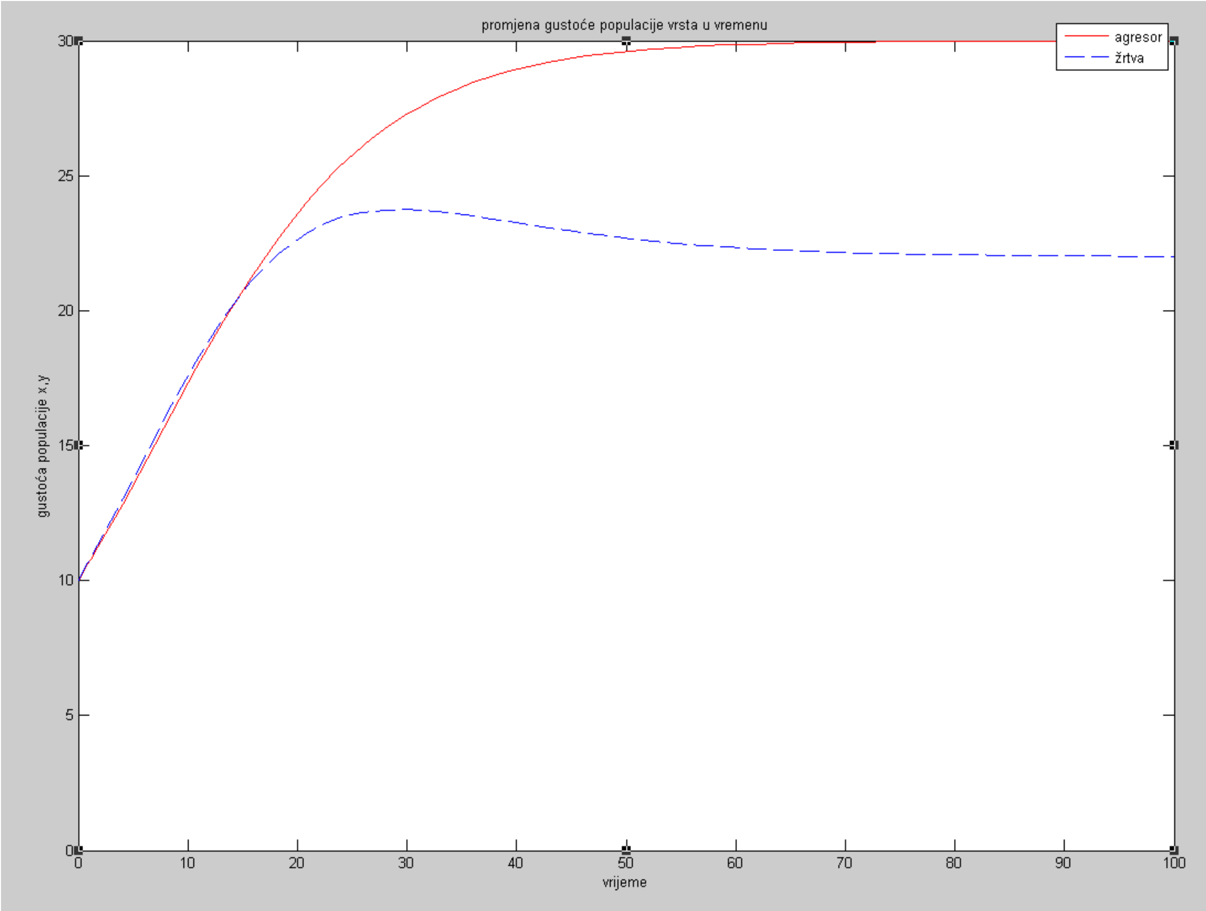
Utjecaj promjene koeficijenata, parametara i početnih uvjeta proučavat ćemo na Primjeru2. U Primjeru 2 broj do kojega se napadač može razviti je 30, a broj do kojeg se žrtva može

razviti je 40. Početne vrijednosti napadača i žrtve su 10 kao u Primjeru 1.

Primjer 2.

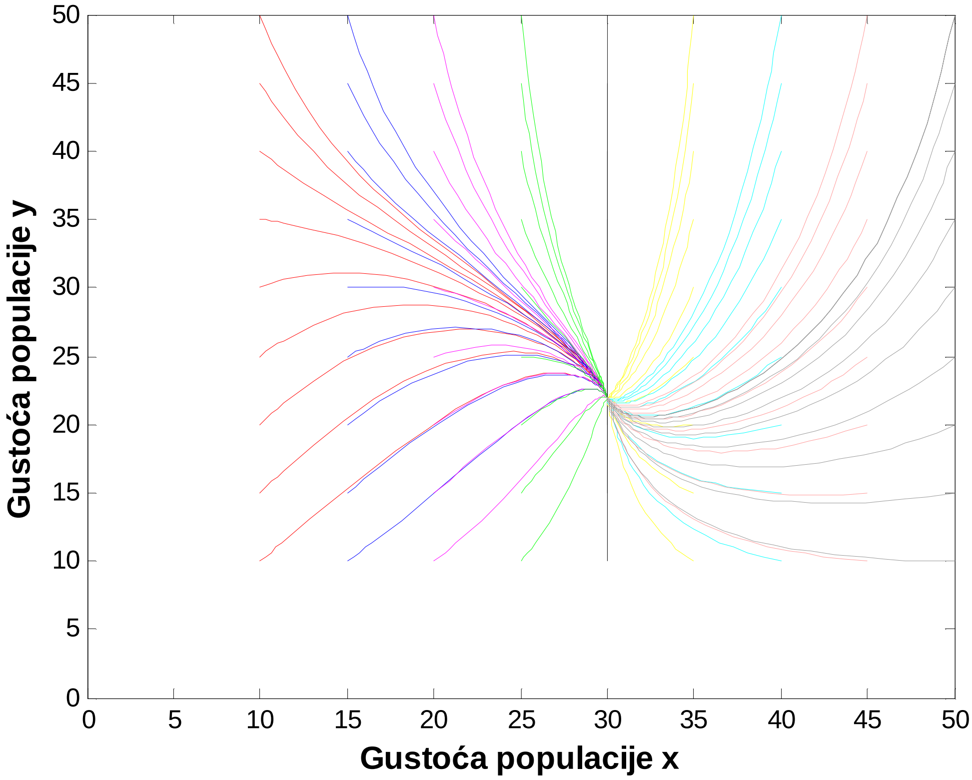
```
function dy = agrzrt(t,y);
dy = zeros(2,1);
global a b c K L
dy(1) = a*y(1) * (1-(y(1)/K));
dy(2) = b*y(2)*(1-((y(2)/(L-c*y(1)))));

clear, clear global
global a b c K L
a=0.1;
b=0.1;
c=0.6;
K=30;
L=40;
t0=0;
tmax=100;
y(1) = 10;
y(1) = 10;
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-7 1e-7]);
[t,Y] = ode45(@agrzrt,[t0 tmax],[y(1) y(1)], options);
clf reset
figure(1)
plot(t, Y(:,1),'r')
hold on
plot(t, Y(:,2), '--b')
axis([0 100 0 Y(2)])
legend('agresor','žrtva')
```



Graf 2. Promjena gustoće populacije vrsta u vremenu - Primjer 2

Iz grafa 2. jasno možemo vidjeti kako su se obje vrste s poboljšanjem uvjeta za život počele razmnožavati. Također možemo vidjeti u kojem je vremenu broj napadača prešao određenu količinu te se kapacitet žrtava počeo smanjivati.



Graf 3. Ovisnost promjene gustoće vrste 1 o promjeni gustoće vrste 2 - Primjer 2

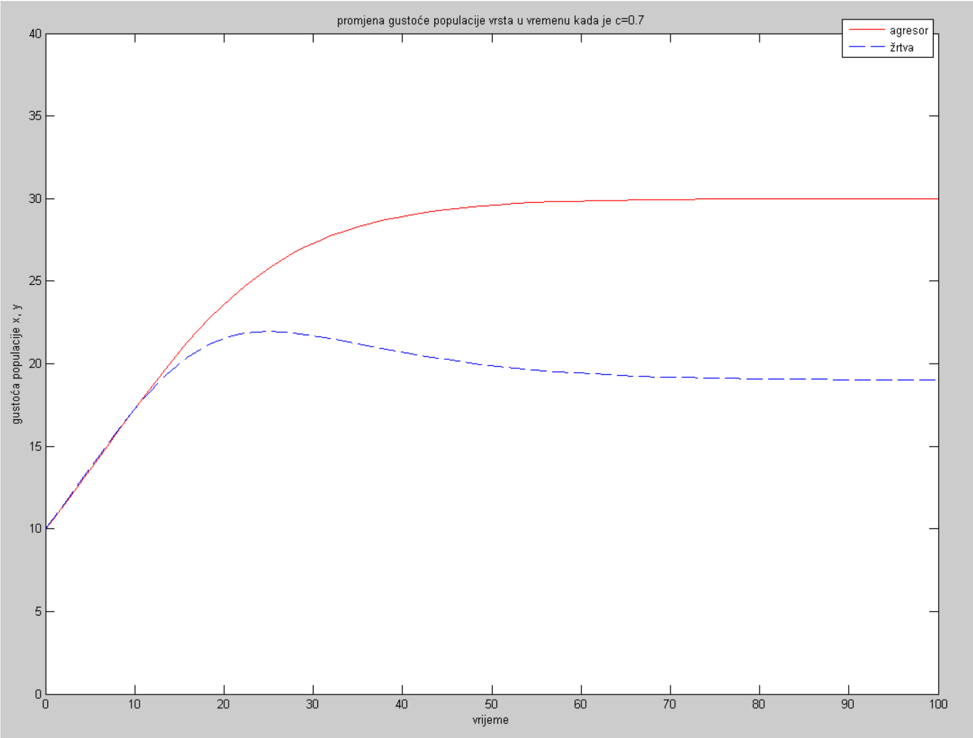
Na grafu 3. prikazan je skup trajektorija koje opisuju životne cikluse dviju vrsta. Ovdje lijepo možemo vidjeti kako povećanje gustoće napadača(x) utječe na žrtvu (y). Kada gustoća napadača dostigne određenu vrijednost gustoća žrtava počinje padati.

Trajektorije su definirane za različite početne uvjete $x0$ i $y0$ koji se kreću od vrijednosti 10 do 50 sa korakom 5. Određenom bojom označene su različite početne vrijednosti $y$za istu početnu vrijednost x.

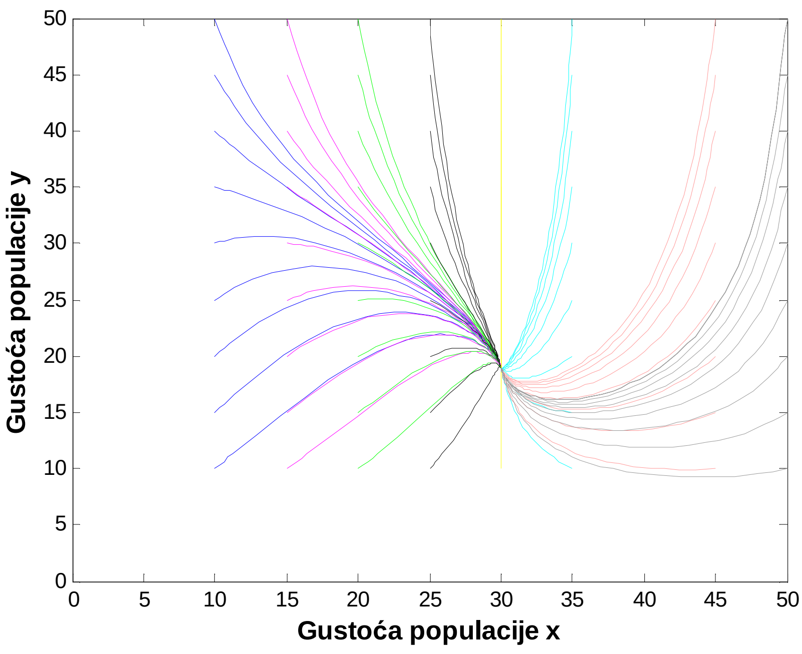
Zbog toga na ovom grafu možemo promatrati utjecaj početnih uvjeta. Ako je$y0$ konstantan i ako povećavamo $x0$, utjecaj napadača se povećava. Što je $x0$ većiy će doseći sve manji maksimalan broj. Ako pak imamo konstantan $x0$ i povećavamo $y0$, y će doseći sve veći maksimalan broj.

Kod početne vrijednosti $x0 = 30$ možemo primijetiti pravac. To je zbog toga što je K, odnosno maksimalan kapacitet napadača 30 što znači da se broj napadača (agresora) ne mijenja. Na tom pravcu nalazi se i točka ponora trajektorija, (30,22).

To je točka koja predočuje stanje sustava za t = 0 (početak trajektorije), a točke $(x(t);\ y(t))$ stanje u vremenu t. Dakle, trajektorija predočava život sustava. Ako povećamo utjecaj nasrtljivost napadača s 0,6 na 0,7 možemo vidjeti da će pri manjem broju napadača (graf 4. i 5.) broj žrtava početi padati.



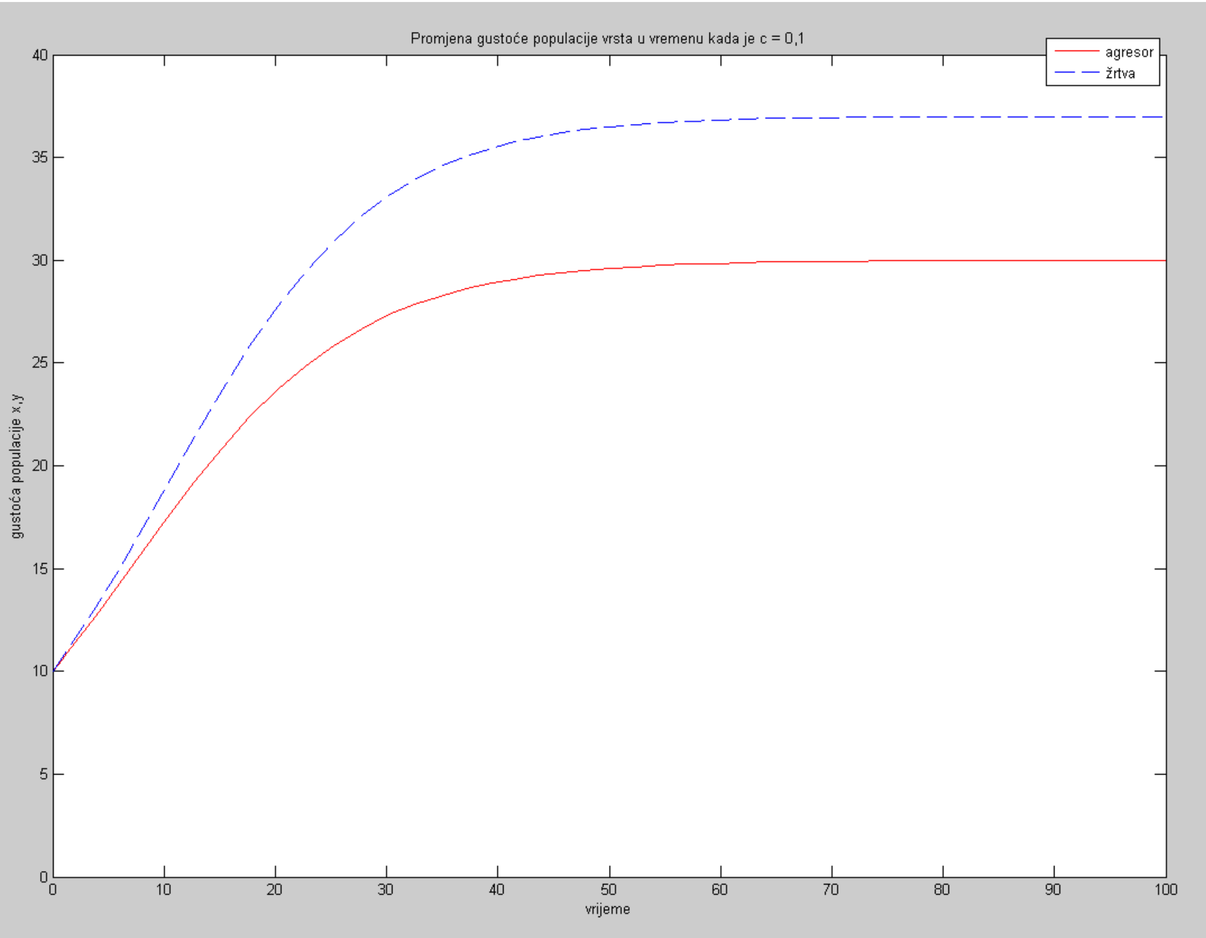
Graf 4. Promjena gustoće populacije vrsta u vremenu kada je $c = 0,7$



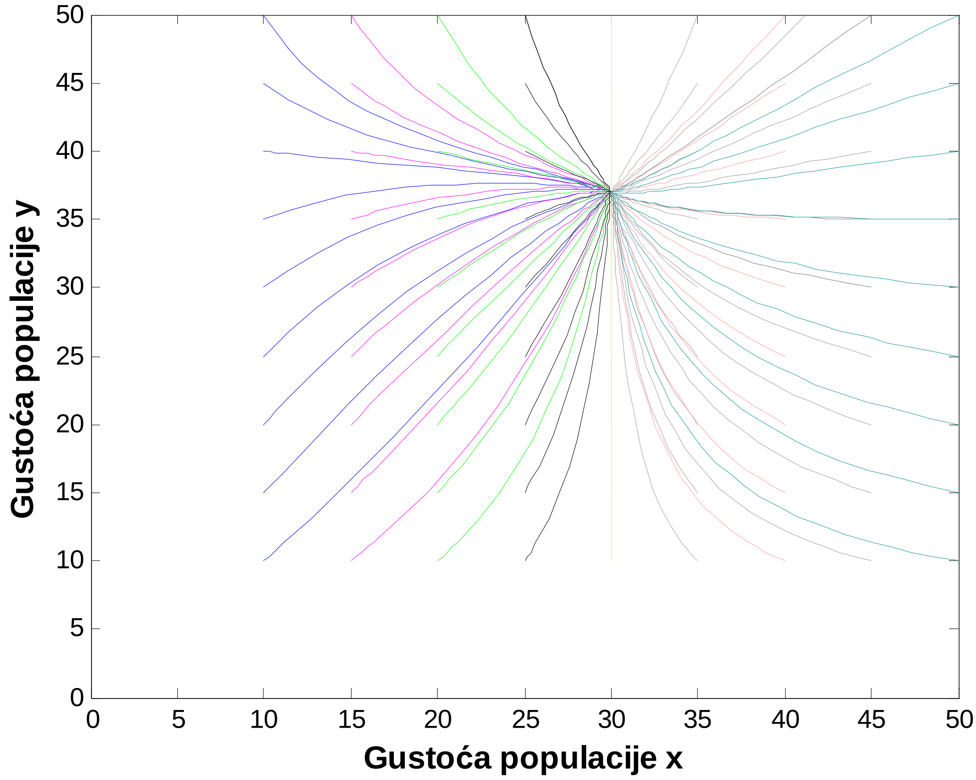
Graf 5. Ovisnost promjene gustoće vrste 1 o promjeni gustoće vrste 2 kada je $c = 0,7$

Ako smanjimo utjecaj nasrtljivosti napadača na $c = 0{,}1$, vidimo da je broj žrtava veći od broja napadača jer je njihov kapacitet veći od kapaciteta napadača. Kako napadači(agresori) utječu na žrtve i usporavaju rast broja žrtava te žrtve nikad neće dostići svoj maksimalni kapacitet $(L = 40)$.

Iz grafa 7. pak možemo primijetiti da se točka ponora trajektorija podigla na višu vrijednost y u odnosu na vrijednost $y$kada je $c = 0{,}6$. To je zbog toga što je utjecaj agresora manji pa se samim time i relativni kapacitet žrtava povećao.



Graf 6. Promjena gustoće populacije vrsta u vremenu kada je $c = 0,1$



Graf 7. Ovisnost promjene gustoće vrste 1 o promjeni gustoće vrste 2 kada je $c = 0,1$

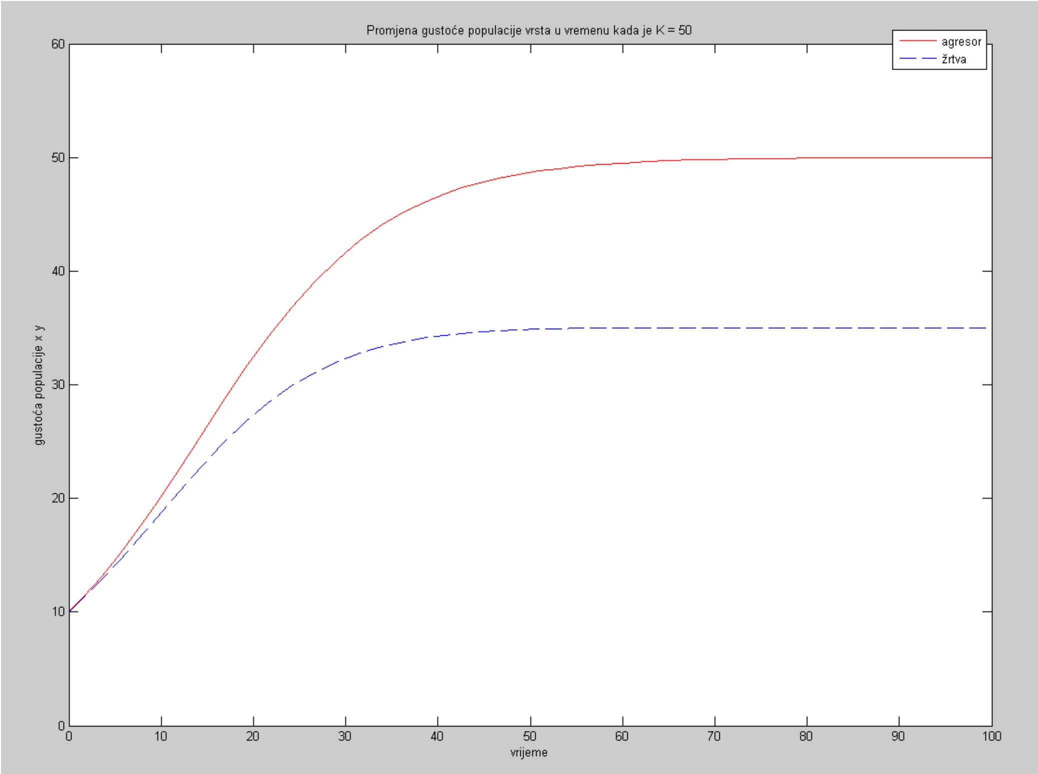
4.3. Utjecaj parametra K, odnosno utjecaj kapaciteta napadača

Svi parametri su identični početnom stanju sustava prikazanog u Primjeru 2.

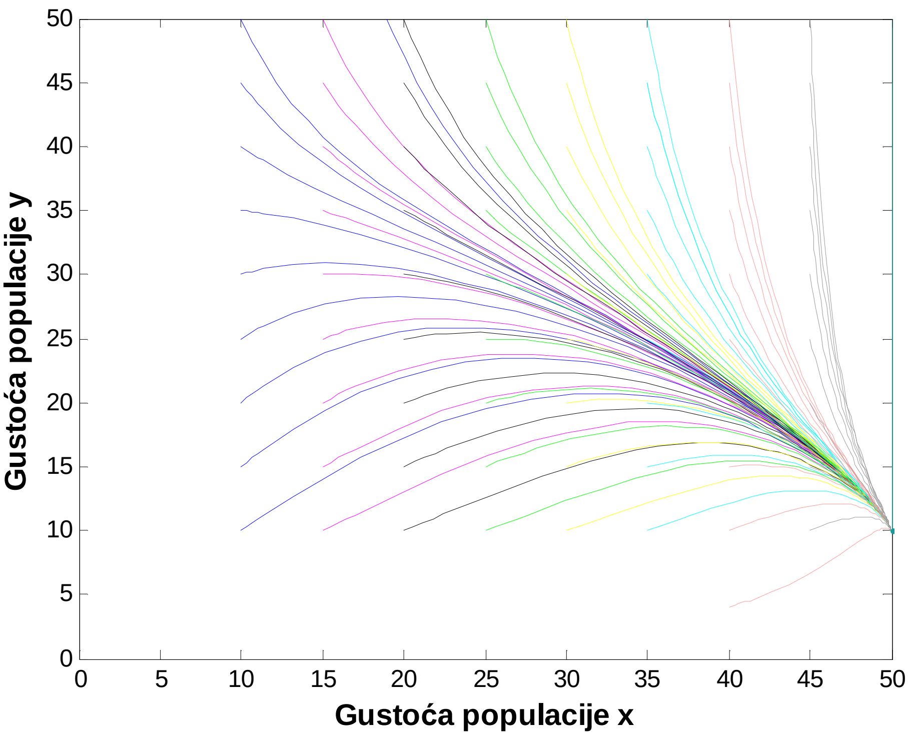
Povećanje kapaciteta napadača K$= 50$ direktno znači i njihovo brojčano povećanje. Dakle, veći broj napadača utječe na smanjenje kapaciteta žrtava.

Iz prikazanih grafova je vidljivo da porastom kapaciteta napadača($K = 50$) tijekom vremena, se smanjuje kapacitet žrtve, odnosno veći broj napadača znači manji kapacitet žrtava.

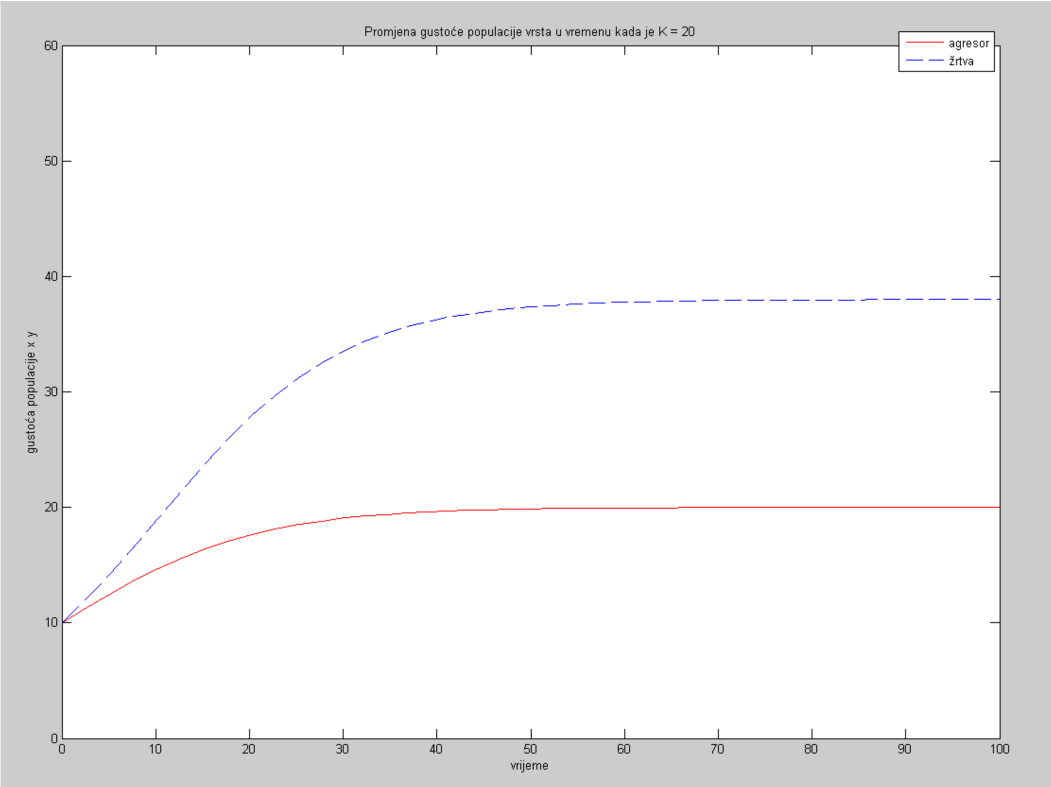
Smanjenjem kapaciteta napadača $K = 20$ direktno znači i njihovo brojčano smanjenje. U skladu s tim vidljivo je smanjenje utjecaja napadača na žrtve. Iz grafa 11. vidljivo je kako se zbog smanjenja parametra K utjecaj gustoće napadača na gustoću žrtava smanjio.



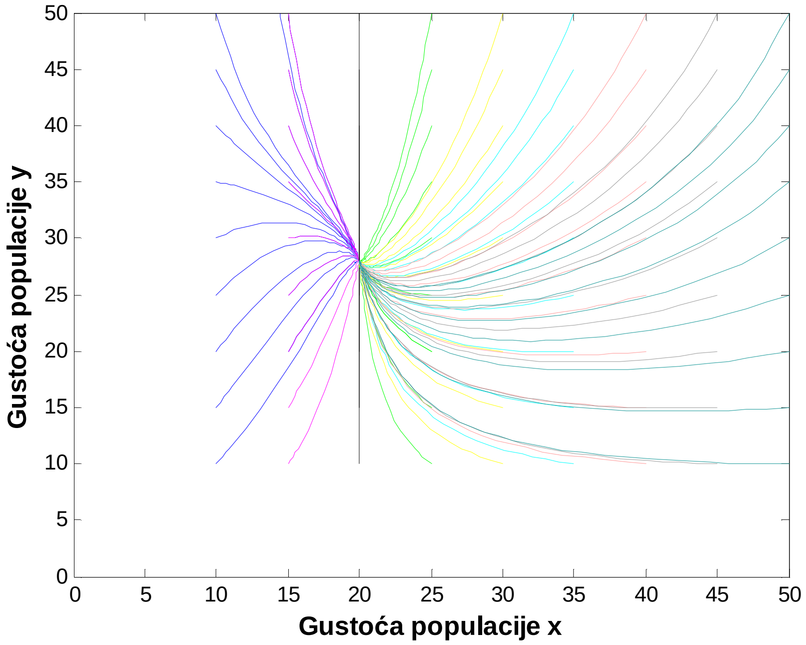
Graf 8. Promjena gustoće populacije vrsta u vremenu kada je $K = 50$



Graf 9. Ovisnost promjene gustoće vrste 1 o promjeni gustoće vrste 2 kada je $K = 50$



Graf 10. Promjena gustoće populacije vrsta u vremenu kada je $K = 20$

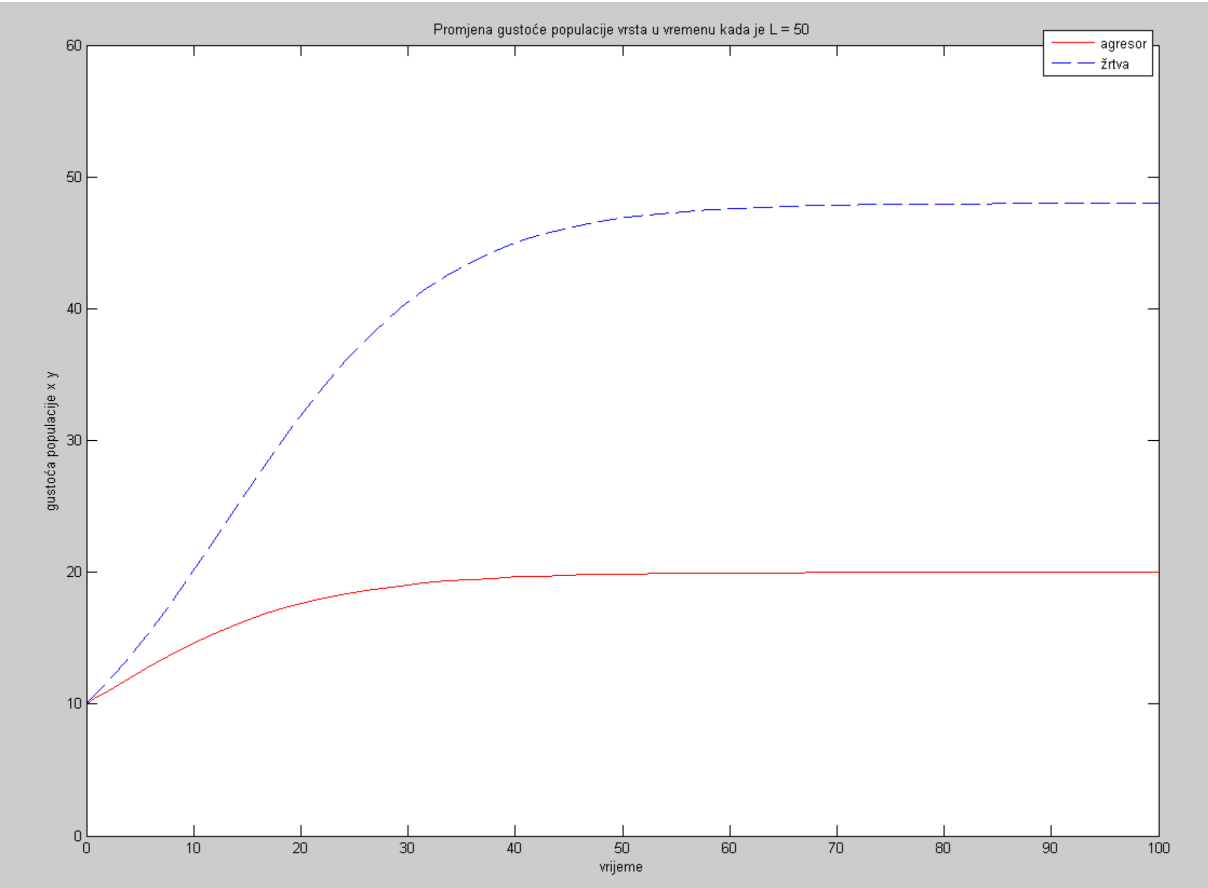


Graf 11. Ovisnost promjene gustoće vrste 1 o promjeni gustoće vrste 2 kada je $K = 20$

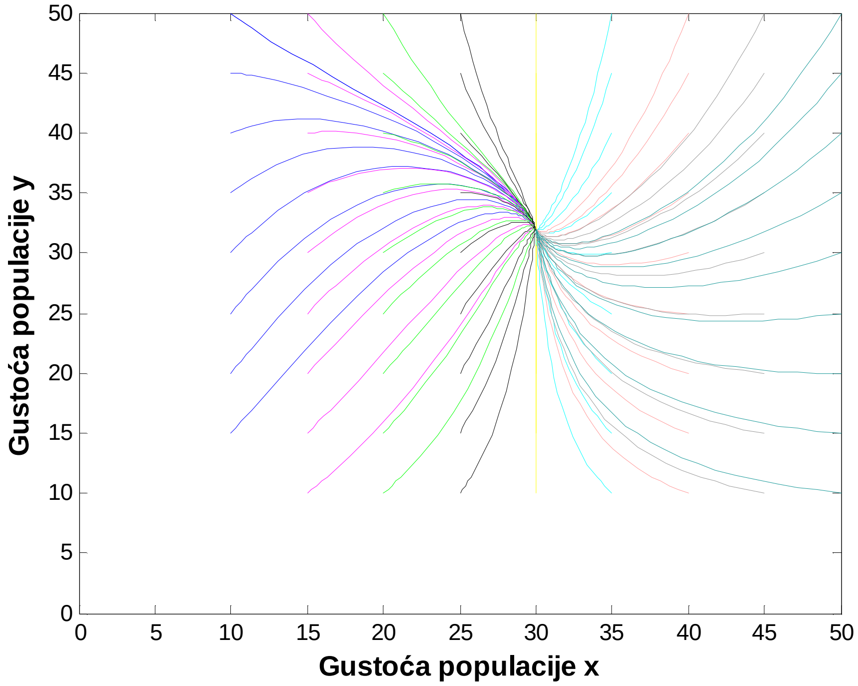
4.4. Utjecaj parametra L, odnosno utjecaj kapaciteta žrtve

Povećanjem parametra L dolazi do povećanja broja žrtava, ali s obzirom da je napadača još dovoljno da taj rast zaustave na određenom nivou, žrtve se ne mogu razviti do punog potencijala ($do L = 50$).

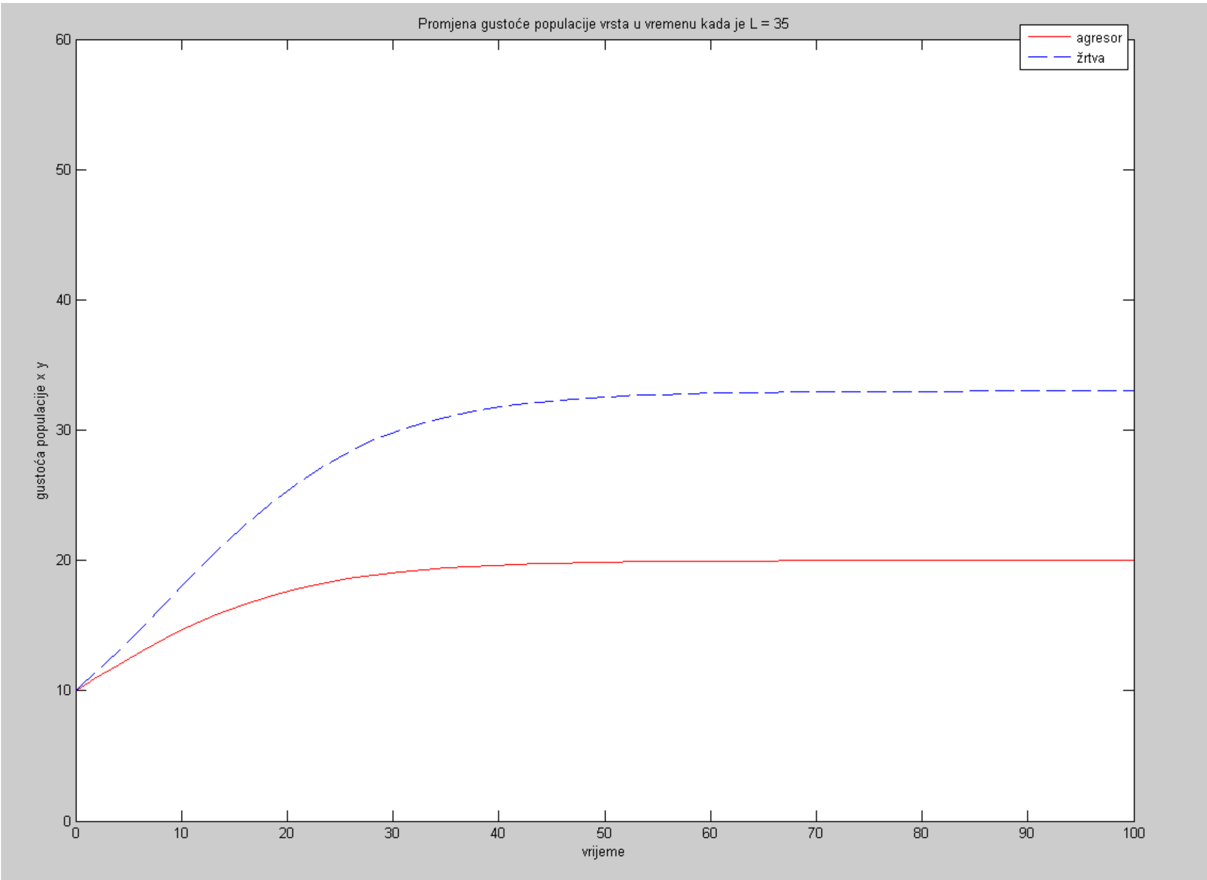
Smanjenjem parametra L na 35 smanjuje se kapacitet žrtve. Budući da smo smanjili kapacitet žrtava, ranije će doći do pada njihove gustoće. Porastom broja napadača broj žrtava brže pada tj. veći je utjecaj napadača na žrtve.



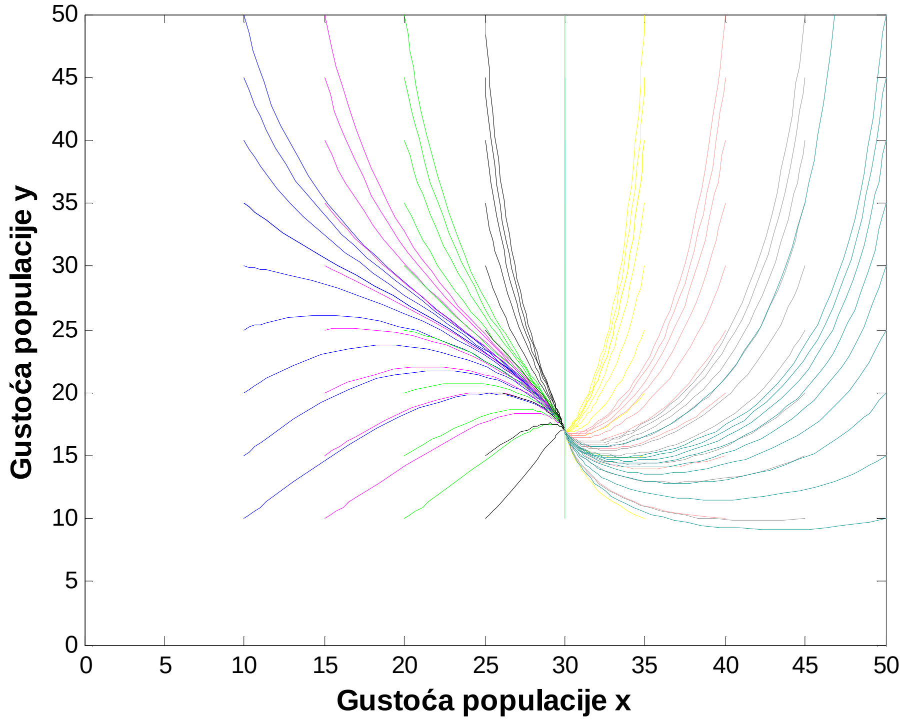
Graf 12. Promjena gustoće populacije vrsta u vremenu kada je $L = 50$



Graf 13. Ovisnost promjene gustoće vrste 1 o promjeni gustoće vrste 2 kada je $L = 50$



Graf 14. Promjena gustoće populacije vrsta u vremenu kada je $L = 35$

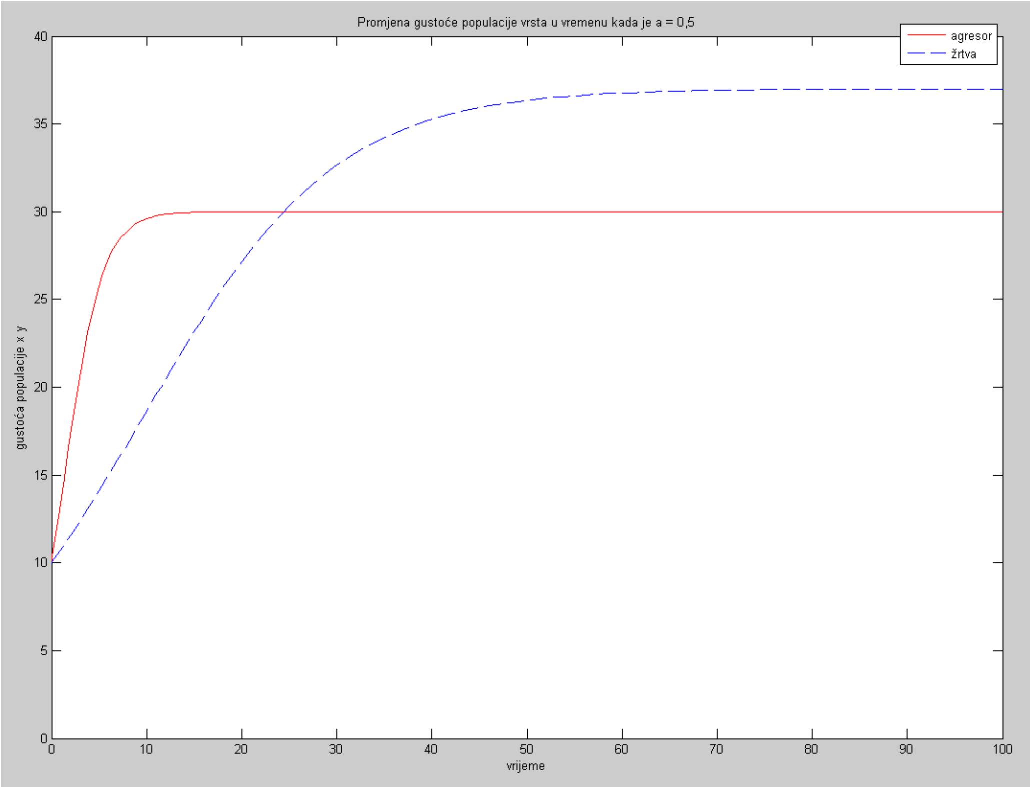


Graf 15. Ovisnost promjene gustoće vrste 1 o promjeni gustoće vrste 2 kada je $L = 35$

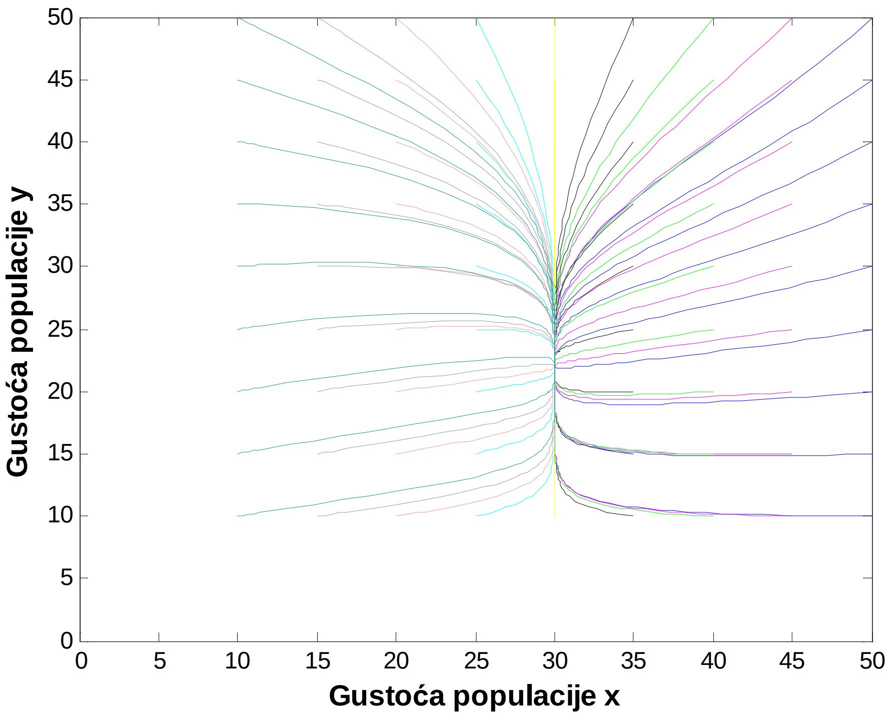
4.5. Utjecaji koeficijenata a i b, odnosno intenziteta razmnožavanja pojedinih vrsta

Promjenom parametra a broj napadača puno brže dosegne svoj maksimum (intenzitet njihovog razvoja je puno veći), pa samim time i broj žrtvi brze padne.

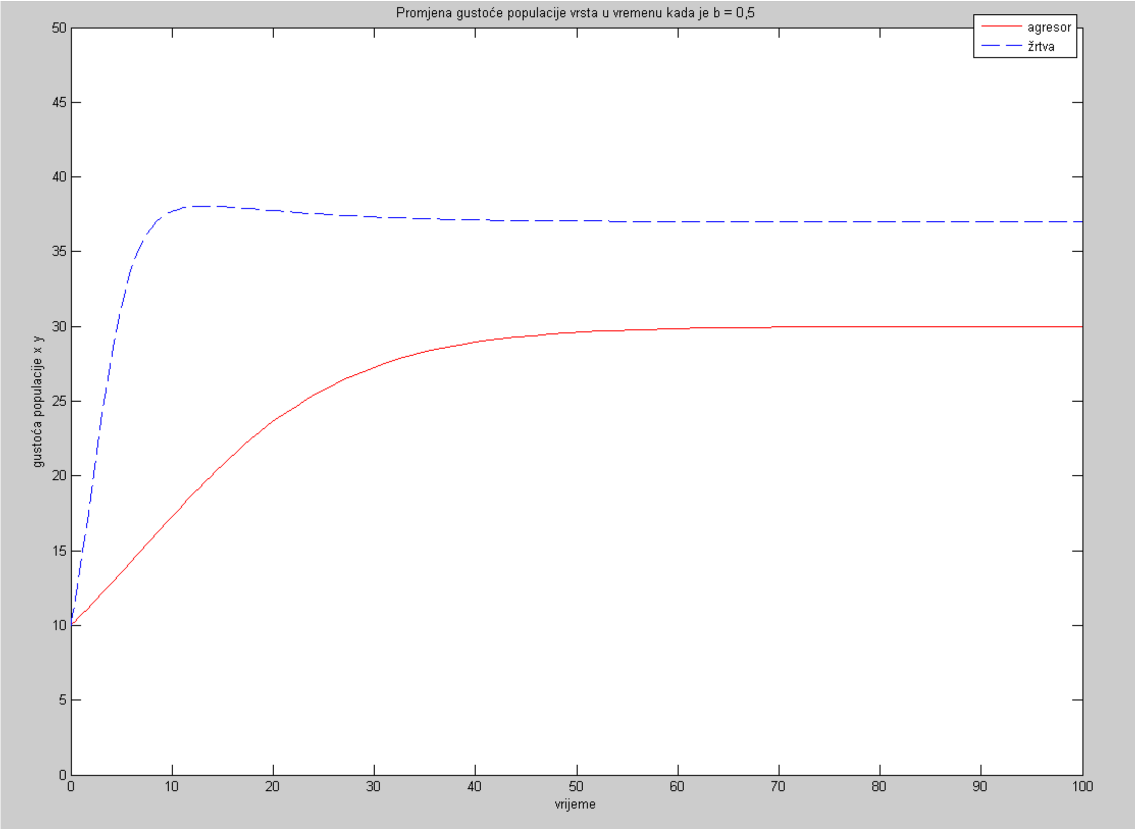
Promjenom parametra b se povećava intenzitet razvoja žrtvi pa brzo dosegnu maksimalan broj koji mogu dostići, ali čim se napadači (agresori) dovoljno razviju, opet broj žrtvi opada.



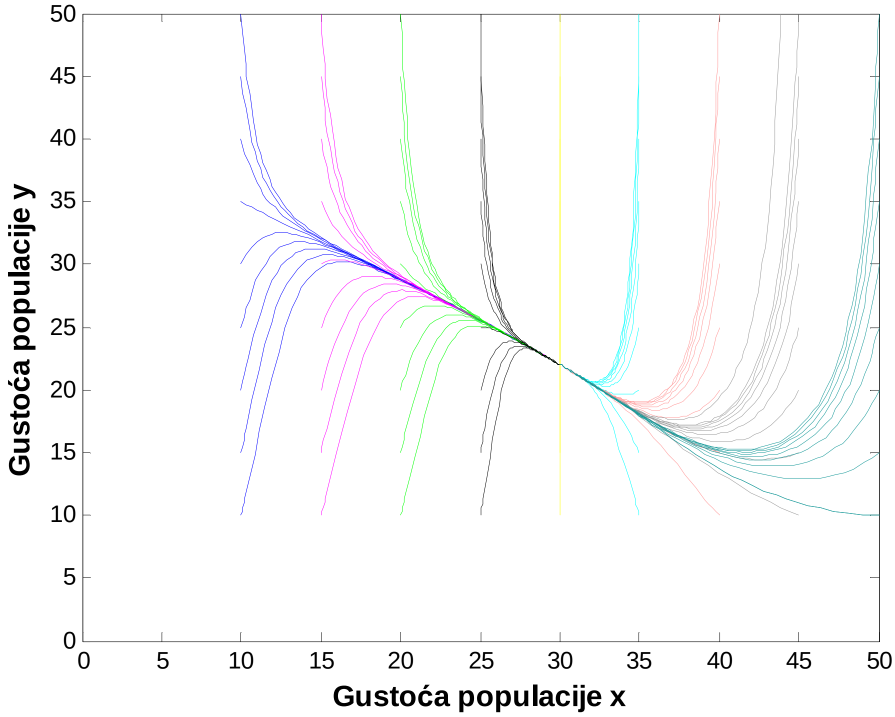
Graf 16. Promjena gustoće populacije vrsta u vremenu kada je $a = 0,5$



Graf 17. Ovisnost promjene gustoće vrste 1 o promjeni gustoće vrste 2 kada je $a = 0,5$



Graf 18. Promjena gustoće populacije vrsta u vremenu kada je $b = 0,5$



Graf 19. Ovisnost promjene gustoće vrste 1 o promjeni gustoće vrste 2 kada je $b = 0,5$

5. ZAKLJUČAK

Model suživota gdje jedna veličina ometa drugu je vrlo jednostavan i razumljiv.Pretpostavka ovog modela je da su dvije populacije različitih vrsta potpuno izolirane od ostatka svijeta.Mijenjanjem određenih parametara i početnih uvjeta dolazimo do različitih odnosapopulacija. Napadač (agresor) utječe na žrtvu tako da smanjuje njezin kapacitet. Možemo zaključiti da se povećanjem početnog intenziteta razvoja ili razmnožavanja, nasrtljivosti te maksimalnog kapaciteta napadačapovećava utjecaj na žrtvu. Do istog učinka dolazi ako se neki od tih parametara i koeficijenata kod žrtve smanjuju. Promjena bilo kojeg parametra ili koeficijenata žrtve ili napadača nema utjecaj na razvoj napadača.

Ovaj model se zbog svoje pouzdanost može koristiti za izračunavanje kretanja neke populacije, bilo neke životinjske vrste ili biljne ili čak populacije ljudi.

6. LITERATURA

1) http://elgrunon.wordpress.com/2007/04/18/mala-povijest-deterministickog-kaosa-iii/

2) http://en.wikipedia.org/wiki/Dynamical_systems_theory

3) http://www.inet.hr/~ivnakic/kaos/2-1-Uvod_u_kaoticne_sustave.htm

4) Damir Marinić; Teorije dinamičkih sustava kao metateorijski okvir za istraživanja ličnosti; pregledni rad; Osijek 2008.

5) Petra Sabljić; Diskretni dinamički sustavi – logistički model, Kaos; seminarski rad; Zagreb 2009.

6) Ivica Gusić; Uvod u matematicke metode u inženjerstvu; predavanja s Fakulteta kemijskog inženjerstva i tehnologije u Zagrebu.