SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE
ZAVOD ZA MATEMATIKU

diplomski studij: **KEMIJSKO INŽENJERSTVO U ZAŠTITI OKOLIŠA**

SEMINARSKI RAD

Kolegij**: UVOD U MATEMATIČKE METODE U INŽENJERSTVU**

NATJECATELJSKI LOTKA-VOLTERRA MODEL

STUDENTICA:
Anđela Matić

PREDMETNI NASTAVNIK:
Dr. sc. Ivica Gusić, redovni profesor
ASISTENT:
Dr.sc. Miroslav Jerković, viši asistent

Zagreb, srpanj 2011. godine

SADRŽAJ

1. Uvod

Živi svijet, koji nas okružuje, nikad ne miruje već je u nekim procesima. U zadvoljavanju svojih potreba (hranjenja, razmnožavanja itd.) organizmi utječu na okoliš, ali s druge strane itekako ovise o okolišu gdje nalaze sve što im je potrebno za život. Jedinke unutar pojedine vrste koriste iste resurse za preživljanje, pa je tako čest slučaj borbe, odnosno **natjecanja** jedinki za željeni resurs (npr. stanište, partneri za parenje, hrana…).

Dinamika bilo koje vrste može se proučavati na više načina, a najčešće direktnim promatranjem i mjerenjem određenih parametara populacije. Kako sve to iziskuje znatna novčana sredstva, a neke eksperimente nije moguće izvoditi na cijeloj populaciji, u proučavanju se koriste **matematički modeli**. Matematičko modeliranje bioloških fenomena jedno je od najvažnijih područja primijenjene matematike i teorijske biologije. Suvremeni dosezi u teorijskoj i eksperimentalnoj biologiji proizvode sve veće količine podataka, te čine matematičko modeliranje bioloških fenomena sve realističnijim i važnijim. Matematika se u određenom smislu može smatrati „novim mikroskopom“ koji može otkriti, inače nevidljive svjetove u raznim vrstama podataka.

Jedan od najpoznatijih modela u ekologiji je **natjecateljski Lotka-Volterra** model koji služi da bi se predvidio ishod natjecanja dviju vrsta koje se stalno natječu ze neki ograničavajući resurs koji je zapravo zajednički faktor obiju vrsta.

Model su sastavili talijanski matematičar Vito Volterra (1860. - 1940.) i američki biofizičar mađarsko-austrijskog podrijetla Alfred L. Lotka (1880. - 1949.). S tim modelom napravili su revoluciju u matematičkoj biolgiji, a sam model još dan danas služi kao osnova za razvijanje mnogih modela koji se koriste u analizi dinamike populacija.

2. Natjecateljski Lotka – Volterra model

Za ovaj model može se reći da je zapravo dvostruki logistički model. Znači, radi se o sustavu jednadžbi gdje prva jednadžba opisuje brzinu promjene vrste 1, a druga brzinu promjene vrste 2. Isto kao u Lotka – Volterra modelu grabežljivca i plijena, promatramo kako jedna vrsta utječe na drugu.Zato su i same jednadžbe slične s razlikom da ovaj model sadrži izraz za utjecaj **na samog sebe i izraz za međusoban utjecaj s drugom vrstom**. Kod modela grabežljivac i plijen dobiva se rješenje u obliku eksponencijalne funkcije, a kod natjecateljskog nema eksplicitnog rješenja. Bit međuvrsnog natjecanja je u tome da jedinke jedne vrste imaju smanjenu plodnost, stopu preživljavanja ili rasta kao rezultat iskorištavanja resursa ili ometanja jedinkama druge vrste.

2.1. Jednodimenzionalni sustav

Najčešći izraz za logistički populacijski model glasi:

$$\boxed{\frac{dN}{dt} = rN\left(\frac{K-N}{K}\right)}$$

gdje su:

N- veličina populacije,

t – vrijeme,

K – kapacitet nosivosti,

r – stopa rasta.

Ova logistička jednadžba predstavlja stupanj rasta populacije, koja je ograničena natjecanjem unutar jedne vrste (unutarvrsno - kad se članovi određene vrste natječu jedni protiv drugih). Prvi član desne strane jednadžbe, rN (umnožak stope rasta i veličine populacije) opisuje porast populacije ako nema natjecanja. Drugi član $((K-N)/K)$ uključuje natjecanje unutar vrste te ima vrijednost između 0 i 1. Kako se veličina populacije N približava kapacitetu nosivosti K, vrijednost u brojniku (K-N) postaje manja, ali nazivnik K ostaje isti pa taj izraz postaje manji. Ovaj izraz pokazuje da se rast populacije usporava porastom veličine populacije, sve dok populacije ne dosegne kapacitet nosivosti. Drugim riječima, krivulja rasta populacije opisana logističkom jednadžbom je sigmoida i stupanj rasta ovisi o gustoći populacije.

2.2. Dvodimenzionalni sustav

U logističkom dinamičkom modelu, kada imamo dvije populacije N_1 i N_2, u osnovnoj Lotka – Volterra jednadžbi dodaje se i izraz za izračun međusobnog utjecaja dviju vrsta (međuvrsno natjecanje). Prema tome Lotka - Volterra natjecateljski model ima slijedeći izraz:

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(\frac{K_1 - N_1 - \alpha_{12} N_2}{K_1}\right)$$

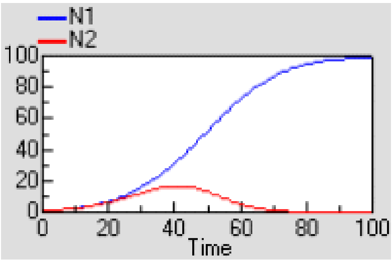
$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(\frac{K_2 - N_2 - \alpha_{21} N_1}{K_2}\right)$$

α_{12} – utjecaj vrste 2 na populaciju vrste 1,

α_{21} – utjecaj vrste 1 na populaciju vrste 2.

Glavna razlika je dodatak izraza koji uključuje koeficijent natjecanja α. Koeficijent natjecanja predstavlja utjecaj koji jedna vrsta ima na drugu: α_{12} predstavlja utjecaj vrste 2 na vrstu 1, a α_{21} predstavlja utjecaj vrste 1 na vrstu 2 (prvi broj u indeksu uvijek se odnosi na vrstu na koju se utječe).

U prvoj jednadžbi Lotka –Volterra modela za međuvrsno natjecanje, utjecaj koji vrsta 2 ima na vrstu 1 (α_{12}) pomnožen je s veličinom populacije vrste 2 (N_2). Kada je α_{12}<1, utjecaj vrste 2 na vrstu 1 manji je nego utjecaj vrste 1 na vlastite članove. I obrnuto, kada je α_{12}>1, utjecaj vrste 2 na vrstu 1 veći je nego utjecaj vrste 1 na vlastite članove. Stoga, umnožak koeficijenta natjecanja α_{12} i veličine populacije vrste 2 (N_2), predstavlja utjecaj ekvivalentnog broja članova vrste. Isto vrijedi i za izraz $\alpha_{21}N_1$ u drugoj jednadžbi.

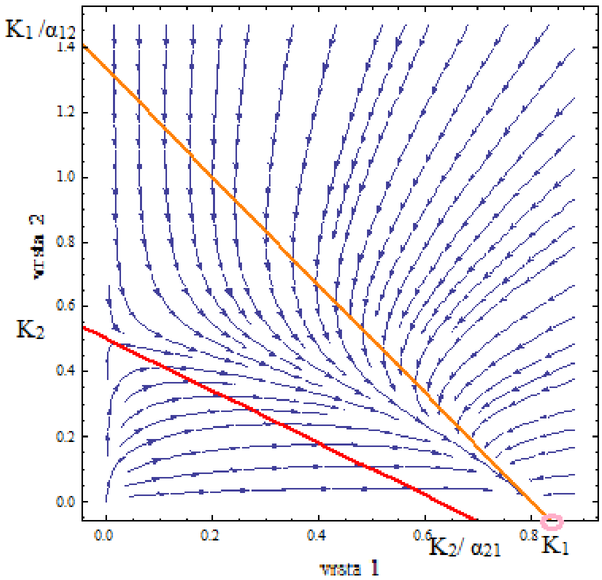


Slika: primjer nadvladavanja vrste 1 nad vrstom 2 u vremenu

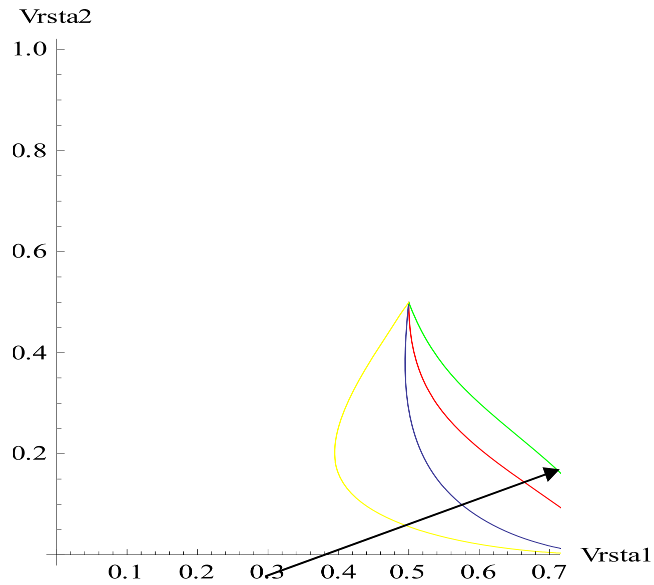
3. Primjena Lotka-Volterra natjecateljskog modela s primjerima

3. 1. Scenarij 1

U prvom scenariju postavljen je slučaj gdje populacija vrste **1 uvijek nadvlada vrstu 2,** odnosno vrsta 2 biva natjecateljski isključena vrstom 1. To je grafičko prikazano tako da je izoklina vrste 1 (narančasta linija) iznad i na desno od izokline vrste 2 (crvena linija). Za bilo koju točku u lijevom kutu grafa (bilo koja kombinacija gustoća vrsta), obje populacije su ispod njihove dotične izokline i obje rastu. Za bilo koju točku u gornjem desnom kutu grafa, obje vrste su iznad njihove dotične izokline i obje opadaju. Za bilo koju točku između dviju izoklina, vrsta 1 je još uvijek ispod svoje izokline i raste, a vrsta 2 je iznad svoje izokline i stoga opada. Udruženo kretanje dviju populacija (plave strelice) ide prema dolje i na desno, pa je vrsta 2 dovedena do izumiranja, a vrsta 1 raste dok ne dosegne svoj kapacitet nosivosti K_1. Otvoreni krug u ovoj točki predstavlja stabilnu ravnotežu.

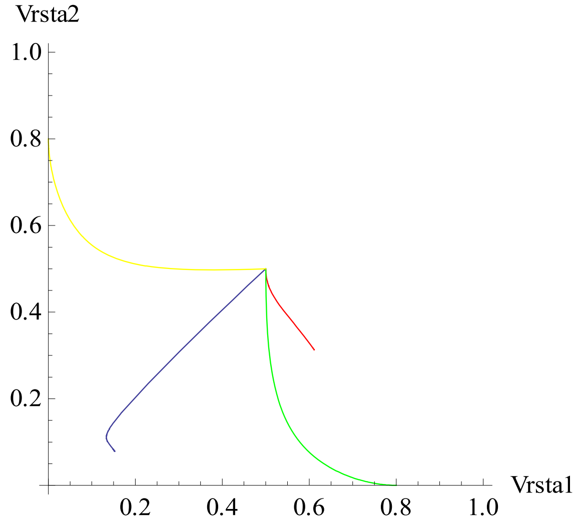


a) Utjecaj rasta/ pada koeficijenta natjecanja α



Porastom koeficijenta natjecanja α12 i α21 nadvladavanje vrste 1 nad vrstom 2 je otežano jer krivulje koje izviru iz zajedničke točke nemaju više tako oštri pad

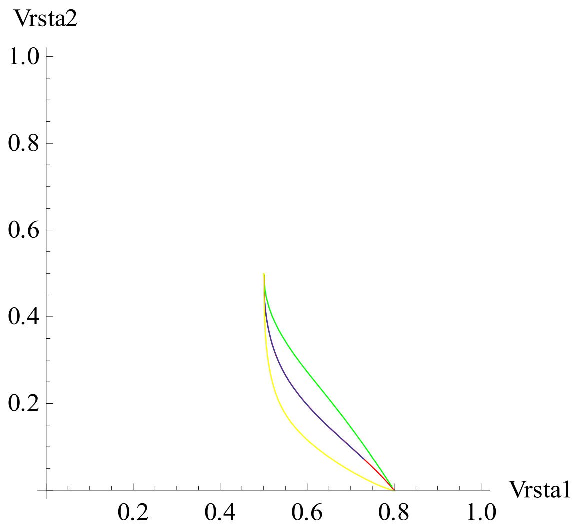
b) Utjecaj rasta/pada kapaciteta nosivosti vrste 1 ili vrste 2



- crvena linija: kapaciteti nosivosti obje vrste su visoki
- plava linija: kapaciteti nosivosti obje vrste su niski
- zelena linija: kapacitet nosivosti vrste 1 je viši, a vrste 2 znatno niži
- žuta linija: kapacitet nosivosti vrste 2 je viši, a vrste 1 znatno niži

Porastom kapaciteta nosivosti obje vrste, vrsta 1 znatno brže nadvladava vrstu 2. Smanjenjem oba kapaciteta, padaju obje populacije, tek pri kraju pojavljuje se blagi rast vrste 1. Povećanjem kapaciteta nosivosti vrste 1, samo se nešto malo usporava pad krivulje, odnosno vrsta 1 neznatno slabije napreduje u odnosu na vrstu 2. Ako se poveća kapacitet nosivosti vrste 2, vrsta 1 nikad u ne nadvlada vrstu 2, štoviše ide ka 0.

c) Utjecaj rasta/pada stope rasta vrste 1 ili vrste 2

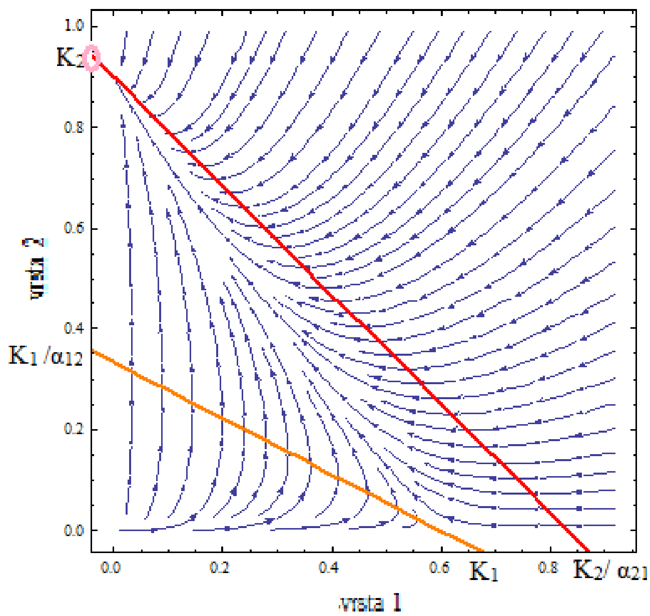


- crvena linija: stope rasta obje vrste su visoke
- plava linija: stope rasta obje vrste su visoke niske
- zelena linija: stopa rasta vrste 1 je viša, a vrste 2 znatno nža
- žuta linija: stopa rasta vrste 2 je viša, a vrste 1 znatno niža

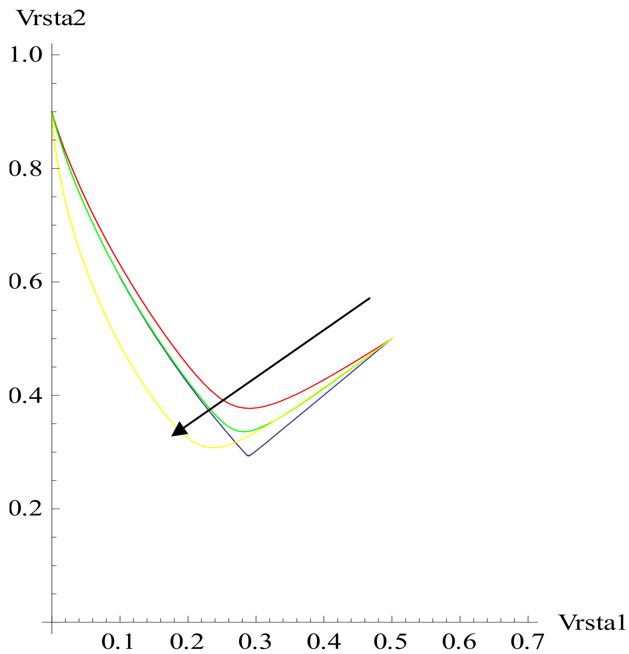
Odmah se može primjetiti da, ako su stope rasta vrste 1 i 2 jednake, bilo obje niske ili visoke, grafovi se preklapaju s tim da ako su obje visoke, vrsta 2 će na kraju u potpunost isčeznuti. Ako je stopa rasta viša u vrste 1, ta populacija će brže nadvladati vrstu 2, a ako je ista manja, sporije. Možemo reći da promjena stopa rasta manje utječe nego promjena kapaciteta nosivosti.

3. 2. Scenarij 2

U ovom scenariju prikazan je sličan slučajkao i u prvom, samo što je sada situacija između vrsta obrnuta. Dakle, **vrsta 2** uvijek **nadvlada vrstu 1** te je vrsta 1 natjecateljski isključena vrstom 2 . Izoklina vrste 2 nalazi se iznad i na desno od izokline vrste 1. Sada je trajektorija dviju populacija, kada se kreće između izoklina, iznad i nalijevo.

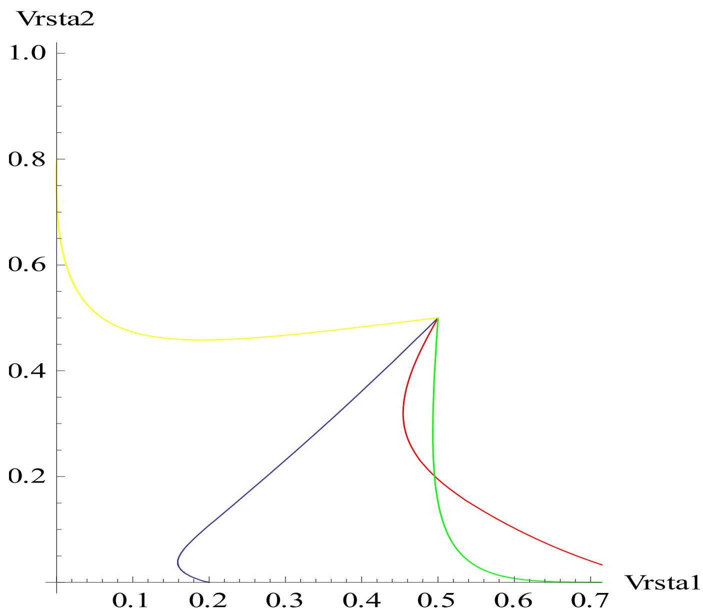


a) Utjecaj rasta/ pada koeficijenta natjecanja α



Porastom koeficijenta natjecanja α12 i α21 nadvladavanje vrste 2 nad vrstom 1 je ubrzano, odnosno vrsta 1 će lakše postati natjecateljski isključena vrstom 2

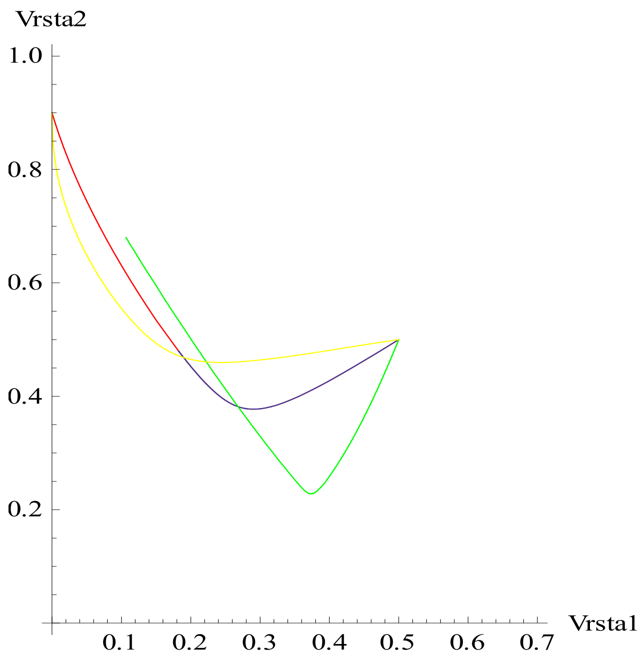
b) Utjecaj rasta/pada kapaciteta nosivosti vrste 1 ili vrste 2



- crvena linija: kapaciteti nosivosti obje vrste su visoki
- plava linija: kapaciteti nosivosti obje vrste su niski
- plava linija: kapacitet nosivosti vrste 1 je viši, a vrste 2 znatno niži
- žuta linija: kapacitet nosivosti vrste 2 je viši, a vrste 1 znatno niži

Povećanjem kapaciteta nosivosti obiju vrsta u početku, populacije obiju vrsta se smanjuju, a zatim ipak vrsta 2 nadvladava. Ako smanjimo kapacitete obiju vrsta, vrste isčežnjavaju još brže. Povećanjem kapaciteta nosivosti vrste 1, vrsta 2 zapravo isčežava, što je još više kontradiktorno scenariju, ali odgovara zadanim uvjetima. Ako se poveća kapacitet nosivosti vrste 2, vrsta 2 kontinuirano nadvladava vrstu 1.

c) Utjecaj rasta/pada stope rasta vrste 1 ili vrste 2



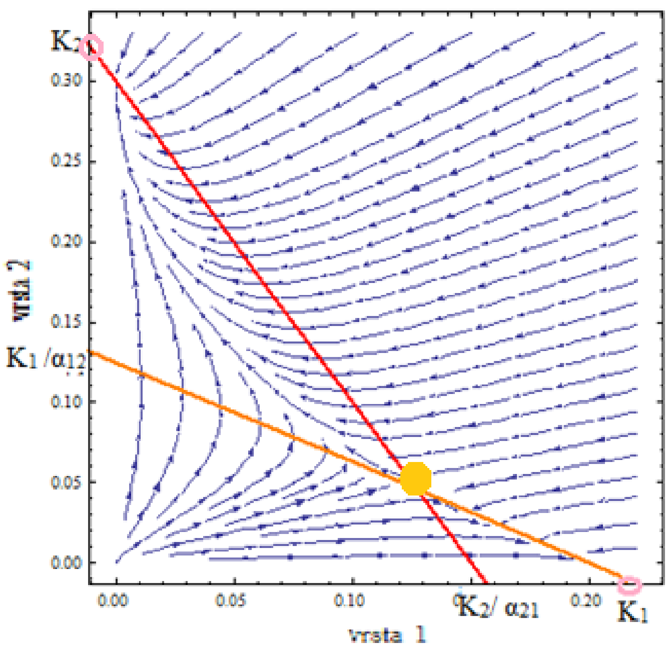
- crvena linija: stope rasta obje vrste su visoke
- plava linija: stope rasta obje vrste su visoke niske

- zelena linija: stopa rasta vrste 1 je viša, a vrste 2 znatno niža
- žuta linija: stopa rasta vrste 2 je viša, a vrste 1 znatno niža

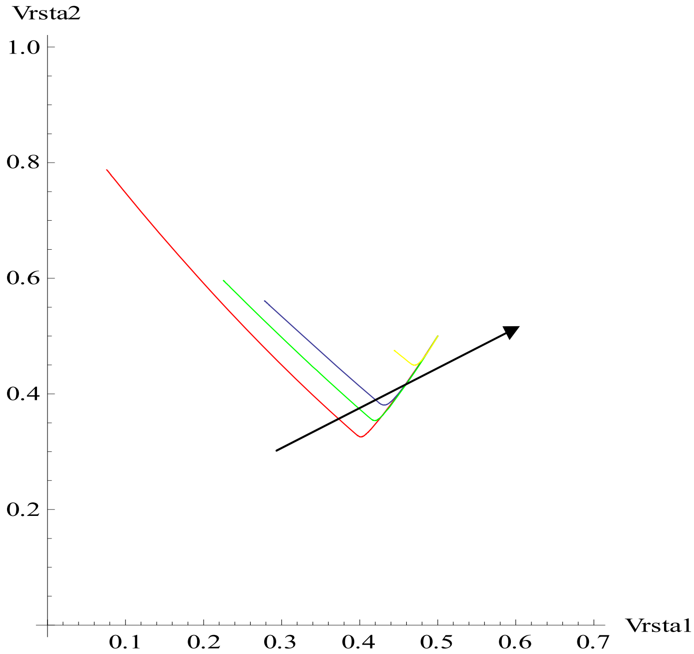
Odmah se može primjetiti da, ako su stope rasta vrste 1 i 2 jednake, bilo obje niske ili visoke, grafovi se „nadopunjavaju“ jedan na drugog s tim da ako su obje visoke, vrsta 2 će prije natjecateljski nadvladati vrstu 1. Ako je stopa rasta viša u vrste 1, to nadvladavanje će se dogoditi sporije, a ako je ista viša u vrste 2, brže.

3. 3. Scenarij 3

Prema trećem scenariju eventualno može prevladavati vrsta 1 ili vrsta 2. Ovdje, kapacitet nosivosti vrste 1 (K_1) je veći od kapaciteta nosivosti vrste 2 (K_2) podijeljenog s natjecateljskim koeficijentom (K_2/α_{21}), a kapacitet nosivosti vrste 2 (K_2) veći je od kapaciteta nosivosti vrste 1 podijeljenog s natjecateljskim koeficijentom (K_1/α_{12}). To rezultira presjecanjem izoklina vrste 1 i vrste 2, a u sjecištu nalazi se ravnotežna točka koja je nestabilna (zatvoreni krug). Mogu se primijetiti četiri različita polja u kojima se udruženo kretanje dviju populacija različito ponaša, a ishod ovisi o početnim gustoćama obiju vrsta. Ispod izokline vrste 1 obje populacije rastu, a iznad izokline vrste 2 padaju (isto kao u prva dva scenarija). Za točke iznad crvene linije (izoklina vrste 2) i ispod narančaste linije (izoklina vrste 1) ishod je jednak kao u prvom scenariju: vrsta 2 natjecateljski je isključena vrstom 1. Nasuprot tome, za točke iznad izokline vrste 1 i ispod izokline vrste 2, ishod je isti kao u drugom scenariju: vrsta 1 natjecateljski je isključena vrstom 2. Dvije stabilne ravnotežne točke opet su predstavljene otvorenim krugom.

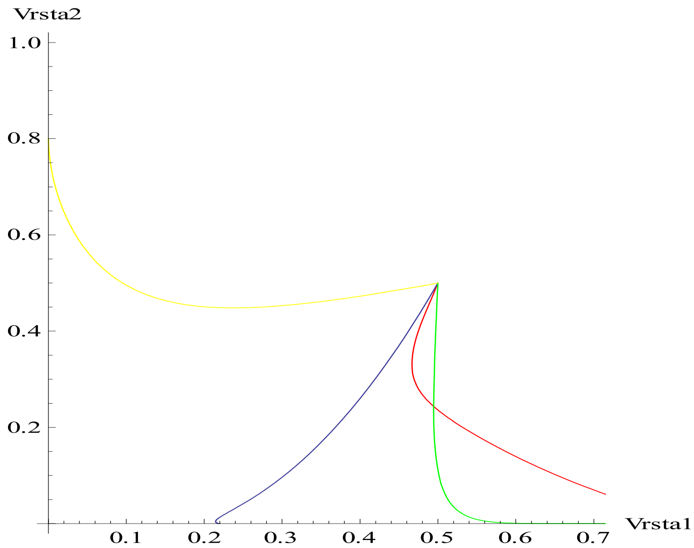


a) Utjecaj rasta/ pada koeficijenta natjecanja α



Porastom koeficijenta natjecanja α12 i α21 nadvladavanje vrste 2 nad vrstom 1 je usporeno.

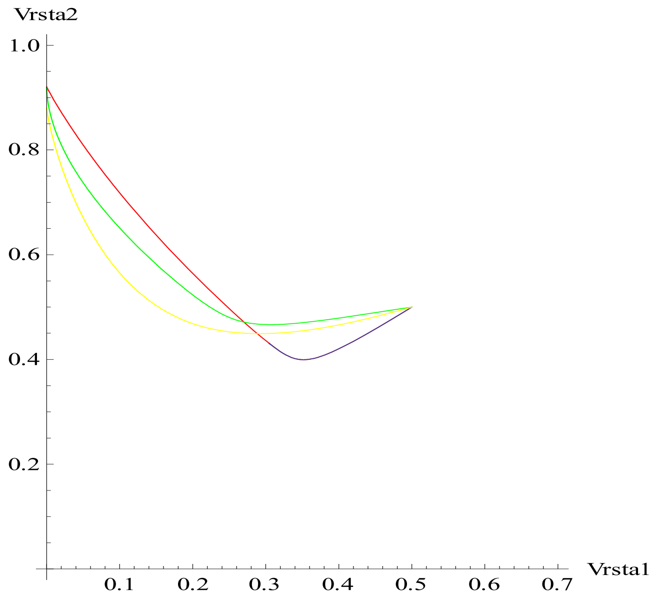
b) Utjecaj rasta/pada kapaciteta nosivosti vrste 1 ili vrste 2



- crvena linija: kapaciteti nosivosti obje vrste su visoki
- plava linija: kapaciteti nosivosti obje vrste su niski
- zelena linija: kapacitet nosivosti vrste 1 je viši, a vrste 2 znatno niži
- žuta linija: kapacitet nosivosti vrste 2 je viši, a vrste 1 znatno niži

Povećanjem kapaciteta nosivosti obiju vrsta u početku, populacije obiju vrsta se smanjuju, a zatim ipak vrsta 2 nadvladava.Smanjenjem kapaciteta nosivosti obje vrste, vrste se smanjuju. Povećanjem kapaciteta nosivosti vrste 1, populacija vrste 2 ubrzano opada, a vrste 1 prvo stagnira, pa vrlo sporo raste. Povećanjem kapaciteta nosivosti vrste 2, populacija vrste 2 raste također istim takvim tokom, a vrste 1 pada.

c) Utjecaj rasta/pada stope rasta vrste 1 ili vrste 2



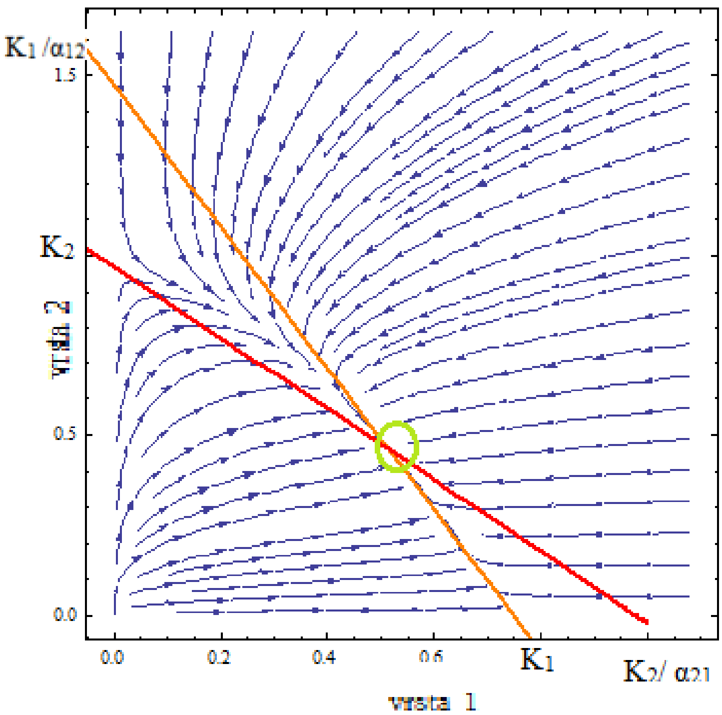
- crvena linija: stope rasta obje vrste su visoke

- plava linija: stope rasta obje vrste su visoke niske
- zelena linija: stopa rasta vrste 1 je viša, a vrste 2 znatno niža
- žuta linija: stopa rasta vrste 2 je viša, a vrste 1 znatno niža

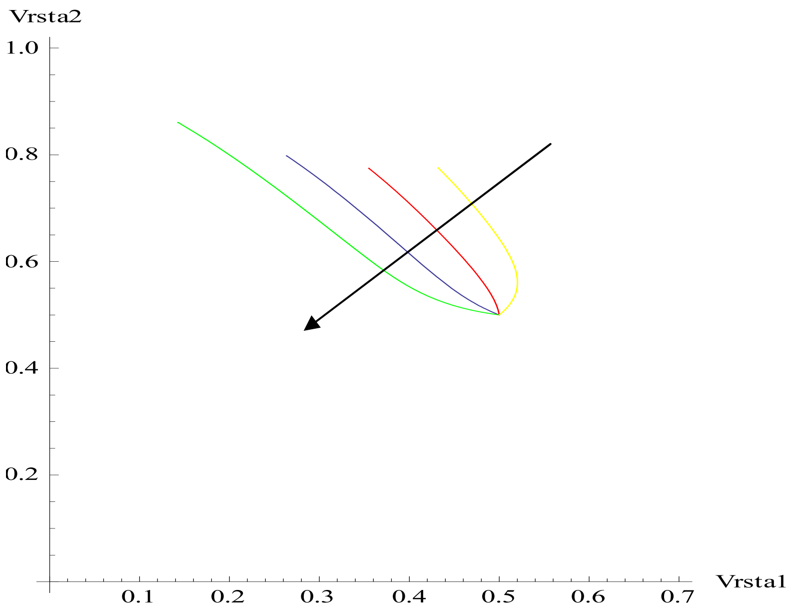
Odmah se može primijetiti da, ako su stope rasta vrste 1 i 2 jednake, bilo obje niske ili visoke, grafovi se „nadopunjavaju“ jedan na drugog s tim da ako su obje visoke, vrsta 2 će natjecateljski nadvladati vrstu 1. Ako je stopa rasta viša u vrste 1, to nadvladavanje će se dogoditi brže, a ako je ista viša u vrste 2, sporije. Općenito, među grafovima su manje razlike, nego u prethodna dva scenarija.

3. 4. Scenarij 4

U posljednjem scenariju izokline se opet presijecaju, ali u ovome slučaju kapacitet nosivosti obiju vrsta manji je od kapaciteta nosivosti druge vrste podijeljenog s natjecateljskim koeficijentom. Ovdje, ishod nije ovisan o početnim gustoćama. Grafički, ovaj slučaj je sličan trećem scenariju - ispod obje izokline populacije rastu, a iznad izoklina opadaju. No, kada su populacije obiju vrsta između izoklina, trajektorije su uvijek usmjerene u sjecište izoklina. Umjesto nadvladavanja (isključivanja) jedne vrste drugom, **dvije vrste sposobne su ko-egzistirati** u ovoj stabilnoj ravnotežnoj točki (otvoreni krug).

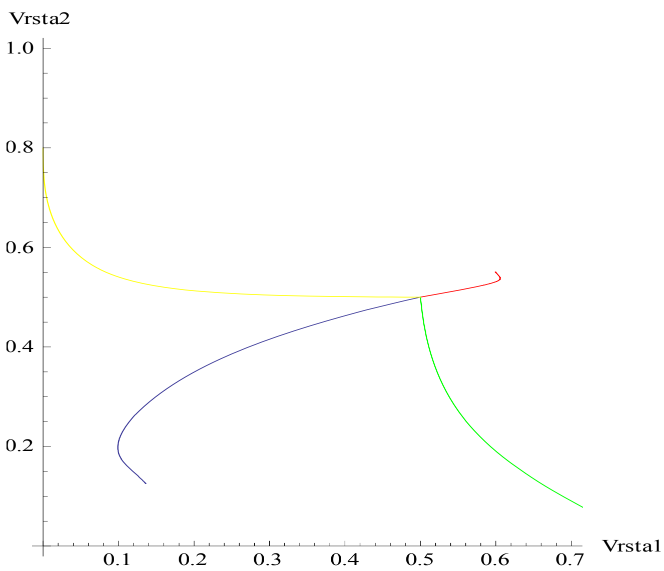


a) Utjecaj rasta/ pada koeficijenta natjecanja α



Porastom koeficijenta natjecanja α12 i α21 nadvladavanje vrste 2 nad vrstom 1 je ubrzano.

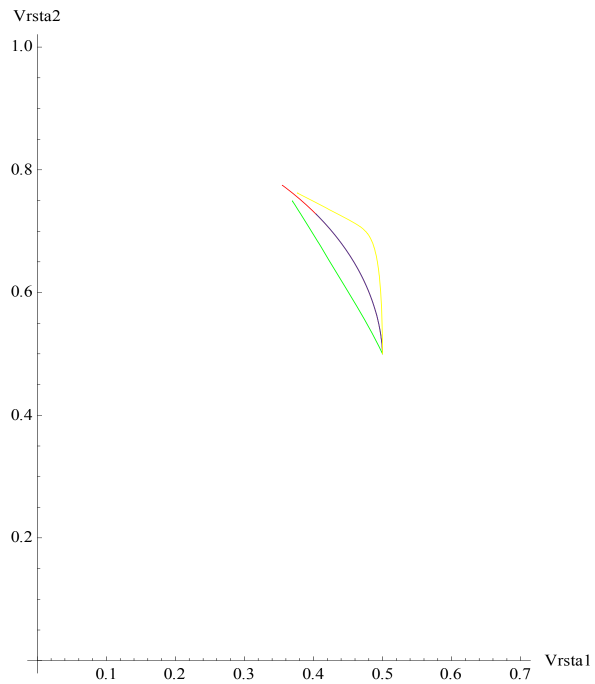
b) Utjecaj rasta/pada kapaciteta nosivosti vrste 1 ili vrste 2



- crvena linija: kapaciteti nosivosti obje vrste su visoki
- plava linija: kapaciteti nosivosti obje vrste su niski
- zelena linija: kapacitet nosivosti vrste 1 je viši, a vrste 2 znatno niži
- žuta linija: : kapacitet nosivosti vrste 2 je viši, a vrste 1 znatno niži

Porastom kapaciteta nosivosti obiju vrsta , vrste rastu, a smanjenjem padaju što je i logično. Povećanjem kapaciteta nosivosti vrste 1, populacija vrste 2 opada, a vrste 1 sporo raste. Povećanjem kapaciteta nosivosti vrste 2, populacija vrste 2 prvo stagnira, zatim vrlo sporo raste, a vrsta 1 pada do 0.

c) Utjecaj rasta/pada stope rasta vrste 1 ili vrste 2



- crvena linija: stope rasta obje vrste su visoke

- plava linija: : stope rasta obje vrste su visoke niske
- zelena linija: stopa rasta vrste 1 je viša, a vrste 2 znatno niža
- žuta linija: stopa rasta vrste 2 je viša, a vrste 1 znatno niža

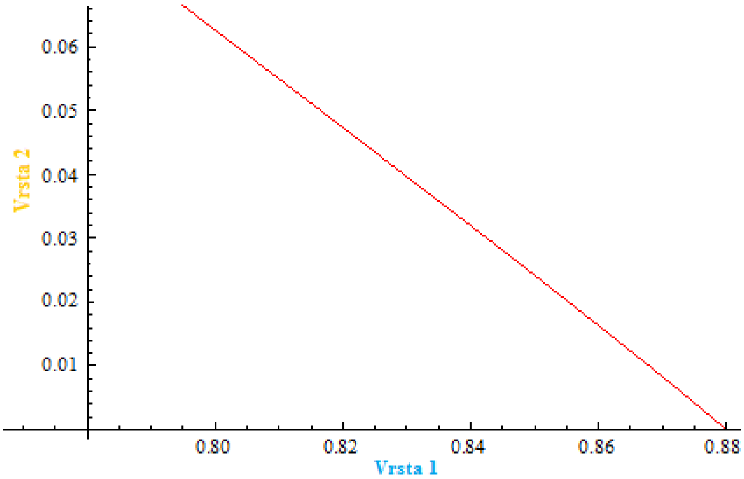
Odmah se može primjetiti da, ako su stope rasta vrste 1 i 2 jednake, bilo obje niske ili visoke, grafovi se preklapaju jedan na drugog s tim da ako su obje visoke, vrsta 2 će natjecateljski nadvladati vrstu 1. Ako je stopa rasta viša u vrste 1, to nadvladavanje će se dogoditi brže, a ako je ista viša u vrste 2, sporije. Međutim, sam proces nadvladavanje je toliko spor, da možemo reći da ovdje uopće nema natjecanja, nego da su obje vrste sposobne živjeti zajedno.

4. Izrada simulacija

U ovom radu za simulacije prikazanih scenarija, kao i za prikaz vektorskog polja korišten je programski paket Mathematica. Slijede algoritmi za svaki scenarij po jedan primjer:

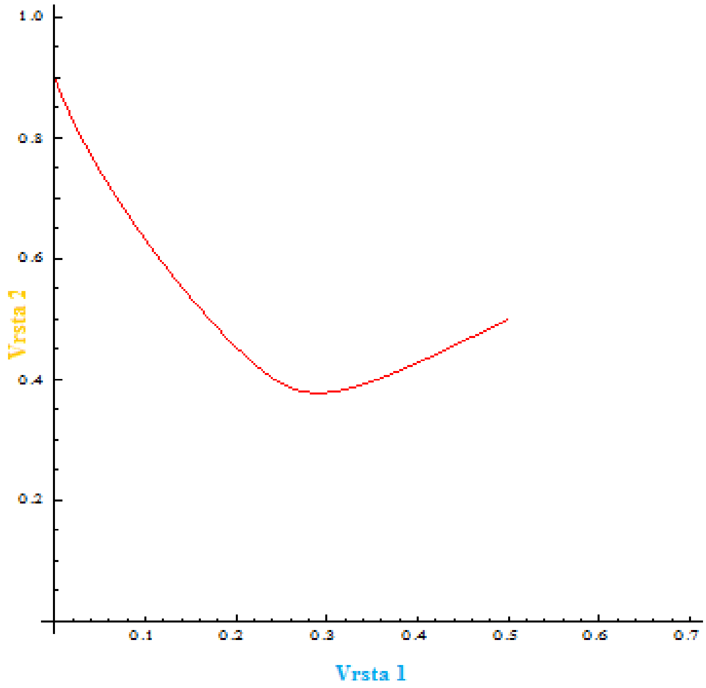
4. 1. Vrsta 1 natjecateljski isključuje vrstu 2

```
r1:=0.6
r2:=0.5
K1:=0.88
K2:=0.5
α12:=0.6
α21:=0.9
f[x_,y_]:=r1*x[t]*((K1-x[t]-α12*y[t])/K1)
g[x_,y_]:=r2*y[t]*((K2-y[t]-α21*x[t])/K2)
x0:=0.5
y0:=0.5
tmax:=50
rjesenje:=NDSolve[{x'[t]==f[x,y],y'[t]==g[x,y],x[0]==x0,y[0]==y0}
,{x,y},{t,0,tmax}]
rjesenje
     rj11=ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/.rjesenje],{t,0,tmax},Pl
     otStyle→{{Red},{RGBColor[0.1,0.8,0.9]}}]
```



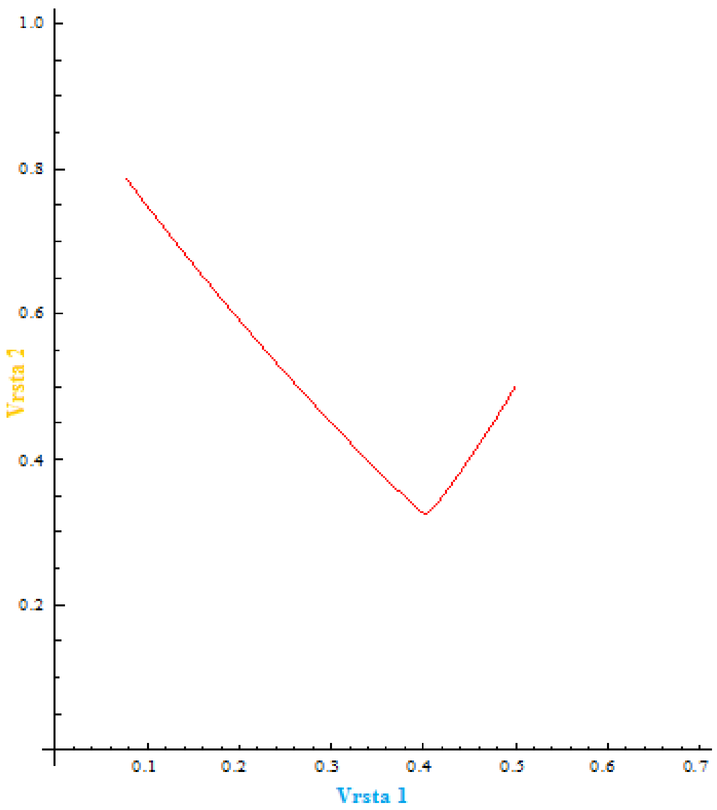
4.2. Vrsta 2 natjecateljski isključuje vrstu 1

```
r1:=0.67
r2:=0.67
K1:=0.3
K2:=0.7
α12:=1.1
α21:=1.8
f[x_,y_]:=r1*x[t]*((K1-x[t]-α12*y[t])/K1)
g[x_,y_]:=r2*y[t]*((K2-y[t]-α21*x[t])/K2)
x0:=0.5
y0:=0.5
tmax:=50
rjesenje:=NDSolve[{x'[t]==f[x,y],y'[t]==g[x,y],x[0]==x0,y[0]==y0}
,{x,y},{t,0,tmax}]
rjesenje
     ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/.rjesenje],{t,0,tmax},PlotSty
     le→{{Red},{RGBColor[0.1,0.8,0.9]}}]
```



4. 3. Eventualno može prevladavati vrsta 1 ili vrsta 2

```
r1:=0.39
r2:=0.99
K1:=0.7
K2:=0.91
α12:=1.25
α21:=1.50
f[x_,y_]:=r1*x[t]*((K1-x[t]-α12*y[t])/K1)
g[x_,y_]:=r2*y[t]*((K2-y[t]-α21*x[t])/K2)
x0:=0.5
y0:=0.5
tmax:=50
rjesenje:=NDSolve[{x'[t]==f[x,y],y'[t]==g[x,y],x[0]==x0,y[0]==y0}
,{x,y},{t,0,tmax}]
rjesenje
rj13=ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/.rjesenje],{t,0,tmax},PlotSty
le→{{Red},{RGBColor[0.1,0.8,0.9]}}]
```

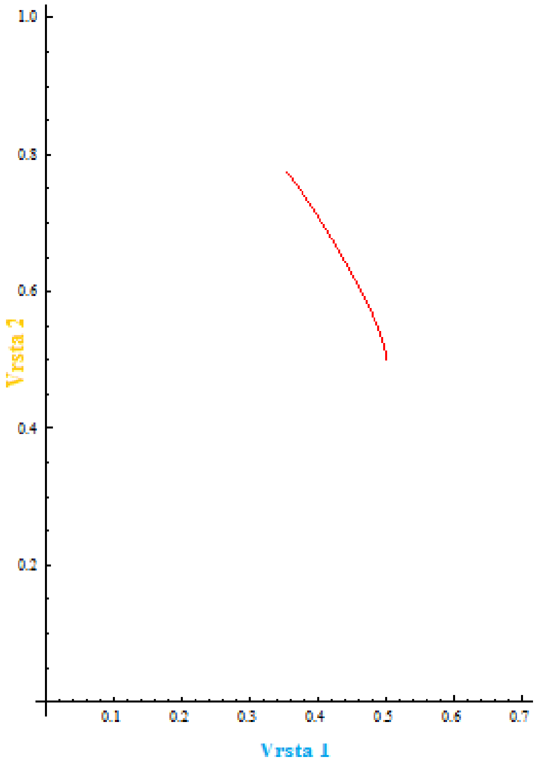


4. 4. Koegzistencija

```
r1:=0.99
r2:=0.33
K1:=0.70
K2:=0.97
α12:=0.61
α21:=0.63
f[x_,y_]:=r1*x[t]*((K1-x[t]-α12*y[t])/K1)
g[x_,y_]:=r2*y[t]*((K2-y[t]-α21*x[t])/K2)
x0:=0.5
y0:=0.5
tmax:=50
rjesenje:=NDSolve[{x'[t]==f[x,y],y'[t]==g[x,y],x[0]==x0,y[0]==y0}
,{x,y},{t,0,tmax}]
```

rjesenje

```
rj14=ParametricPlot[Evaluate[{x[t],y[t]}/.rjesenje],{t,0,tmax},PlotSty
le→{{Red},{RGBColor[0.1,0.8,0.9]}}]
```



5. Zaključak

U ovom radu predstavljena su najosnovnija saznanja o natjecateljskom Lotka-Volterrinom modelu. Prikazana su četiri najčešća ishoda međuvrsnih odnosa, a za simulacije korišten je programski paket Mathematica .

1) Vrsta 1 natjecateljski isključuje vrstu 2:

- ovakav scenarij dolazi do izražaja ako je kapacitet nosivosti vrste 1 viši u odnosu na kapacitet nosivosti vrste 2 i ako je viši koeficijenta natjecanja α_{21}

2) Vrsta 2 natjecateljski isključuje vrstu 1:

- ovakav scenarij dolazi do izražaja ako je kapacitet nosivosti vrste 2 viši u odnosu na kapacitet nosivosti vrste 1 i ako je viši koeficijenta natjecanja α_{12}

3) Eventualno može prevladavati vrsta 1 ili vrsta 2 :

- ovakav scenarij dolazi do izražaja ako je stopa rasta vrste 2 viša u odnosu na stopu rasta vrste 1 i ako je viši koeficijent natjecanja α_{21}

4) Koegzistencija:

- ovakav scenarij dolazi do izražaja ako je stopa rasta vrste 1 viša u odnosu na stopu rasta vrste 2 i ako je kapacitet nosivosti vrste 2 viši

Lotka – Volterra model međuvrsnog natjecanja predstavlja koristan i nadasve zanimljiv pokušaj predviđanja čestih prirodnih pojava među raznim vrstama u živom svijetu. Model se odlikuje svojom jednostavnošću i konzistentnošću, premda u realnim istraživanjima odnosa vrsta je potrebno uključiti mnoge druge parametre, utjecaje i pretpostavke.

6. Literatura

1) Gusić: “Uvod u matematičke metode u inženjerstvu“, predavanja (2010./2011.)
2) M. Sojčić i T.Šćulac: “Natjecateljski Lotka-Volterra model“, seminarski rad, (2010.)
3) http://en.wikipedia.org/wiki/Competitive_Lotka%E2%80%93Volterra_equations
4) http://sky.scnu.edu.cn/life/class/ecology/kejian/13.htm
5) http://mathworld.wolfram.com/Lotka-VolterraEquations.html
6) http://blog.globe-expert.info/thierrylorho/2011/04/10/lotka-and-volterra-the-founding-fathers-of-theoretical-ecology/