

**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE**  
**SVEUČILIŠNI DIPLOMSKI STUDIJ**

**Uvod u matematičke metode u inženjerstvu**

**Tajana Milin**

**Tea Surma**

**DINAMIČKI MODEL LJUBAVI**  
**MODEL ROMEO I JULIJA**

**SEMINARSKI RAD**

**Voditelj: dr. sc. Ivica Gusić, red. prof.**

**Zagreb, lipanj 2012.**

## SADRŽAJ

<i>1. UVOD</i> .....	<i>1</i>
<i>2. DVODIMENZIONALNI LINEARNI DINAMIČKI SUSTAVI</i> .....	<i>2</i>
<i>3. OSNOVNI MODEL LJUBAVNE VEZE ROMEA I JULIJE</i> .....	<i>5</i>
<i>4. RJEŠAVANJE MODELA</i> .....	<i>7</i>
<i>5. JEDNAKI ROMANTIČNI STILOVI</i> .....	<i>9</i>
5.1.Pohotnik i pohotnik.....	9
5.2.Narcis i narcis.....	11
5.3.Oprezan ljubavnik i oprezan ljubavnik .....	13
5.4.Pustinjak i pustinjač.....	17
<i>6. SLUČAJEVI BEZ UTJECAJA VLASTITIH OSJEĆAJA</i> .....	<i>21</i>
6.1.Dva ljubavnika .....	21
6.2.Dva narcisa.....	23
6.3.Narcis i ljubavnik.....	25
<i>7. LJUBAVNICI POTPUNE SUPROTNOSTI</i> .....	<i>28</i>
7.1.Pohlepnik i pustinjač .....	28
7.2.Narcis i ljubavnik.....	33
<i>8. OSTALE KOMBINACIJE LJUBAVI I RAVNODUŠNI ROMEO</i> .....	<i>38</i>
8.1.Ljubavnik i pohlepnik .....	38
8.2.Ljubavnik i pustinjač .....	41
<i>9. RAVNODUŠNI ROMEO</i> .....	<i>44</i>
<i>10. ZAKLJUČAK</i> .....	<i>47</i>
<i>11. LITERATURA</i> .....	<i>48</i>
<i>12. PRILOG</i> .....	<i>49</i>

## 1. UVOD

Ovaj rad pokušat će kroz proučavanje zamišljenih ljubavnika, Romea i Julije, opisati sustav koji modelira ljubavne odnose. Iako se dinamički modeli mogu u određenom smislu zamisliti kao priče koje pričaju o razvoju situacije tijekom vremena, iz ovakvog se opisa ljubavnih odnosa jasno može vidjeti njihova složenost kao i činjenica da na priču svakog pojedinca utječu različiti faktori i to različitim intenzitetom. Činjenica da svaka osoba može prepoznati više vrsta ljubavi također je navedena kao još jedan od problema kod modeliranja ljubavnih odnosa (Spratt, 2004.).

Ljubav je vrlo teško matematički opisati. Postoji mnogo vrsta ljubavi. Čovjek može voljeti ljubavnog partnera, čovjek može voljeti sebe, život, čovječanstvo, itd. Nadalje, suprotno od ljubavi ne mora biti mržnja, ta dva osjećaja mogu postojati uzajamno, te netko može istovremeno voljeti neke osobine partnera, a neke mrziti. Ne možemo sa sigurnošću tvrditi da je nečija ljubav uzrokovana samo vlastitim osjećajima i osjećajima druge osobe, nego ovisi i o drugim utjecajima, a parametri koji karakteriziraju međudnos mogu se mijenjati.

## 2. Dvodimenzionalni linearni dinamički sustavi

Jednodimenzionalni dinamički sustavi opisani su samo jednom diferencijalnom jednačbom. U jednodimenzionalnom problemu promatra se veličina  $x$  koja se mijenja u vremenu  $t$ . U (Sprott 2004.) pokazano je da je tok u jednodimenzionalnom prostoru uvijek monoton ili konstantan. Inače u praksi su češći problemi u kojima sudjeluje više međusobno zavisnih veličina koje se mijenjaju vremenom. To znači da vrijednost jedne veličine utječe na vrijednost druge.

$$x' = f(x, y, t) \tag{1}$$

$$y' = g(x, y, t) \tag{2}$$

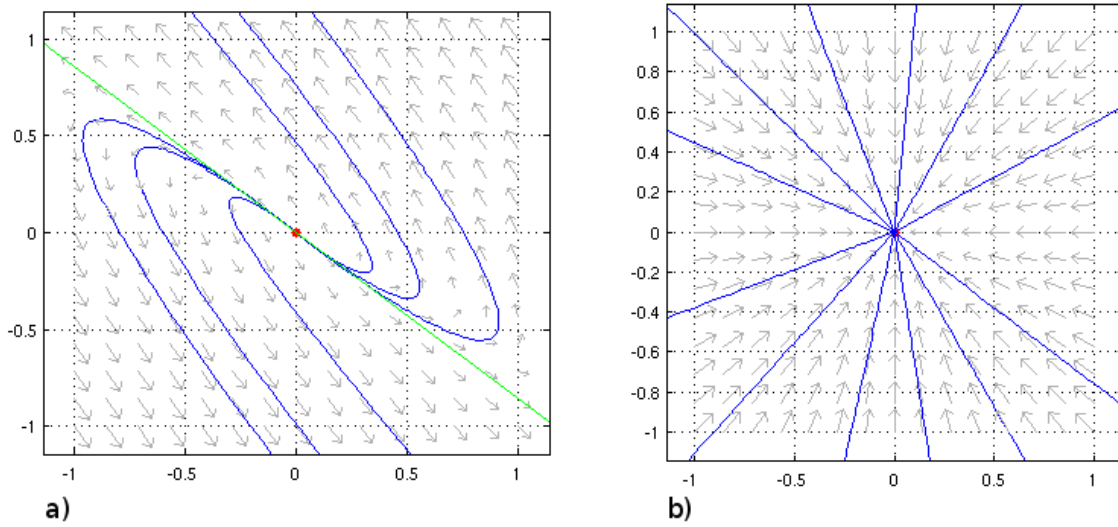
Tu je  $x' = \frac{dx}{dt}$  i  $y' = \frac{dy}{dt}$ , a  $f$  i  $g$  su funkcije triju varijabla koje opisuju brzinu promjene od  $x$ , odnosno  $y$  u ovisnosti o  $x$ ,  $y$  i  $t$ . U svakom trenutku  $t$  načelno mogu se odrediti vrijednosti  $x(t)$ ,  $y(t)$  tih veličina. Također, moguće je procijeniti brzine njihovih promjena. To dovodi do vrlo važnog poopćenja običnih diferencijalnih jednačba, odnosno do sustava običnih diferencijalnih jednačba. Kada te brzine ovise samo o vrijednostima veličina  $x$  i  $y$ , a ne o promatranom vremenu, dobije se sljedeći autonomni sustav:

$$x' = f(x, y) \tag{3}$$

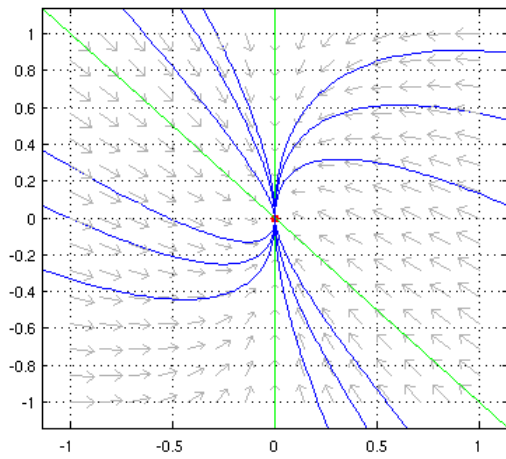
$$y' = g(x, y) \tag{4}$$

Cilj je riješiti takav sustav, tj. dobiti formule za  $x(t)$ ,  $y(t)$  za svaki  $t$  i tako opisati život ovog dinamičkog sustava. To općenito nije moguće, pa se pribjegava drugim metodama. Na primjer, ako je poznato stanje dinamičkog sustavu u trenutku  $t_0$  (tj. početni uvjeti  $x(t_0) = x_0$  i  $y(t_0) = y_0$ ) koriste se grafičke ili numeričke metode kojima se mogu približno odrediti  $x(t)$  i  $y(t)$  za svaki  $t$ . Za dobivanje približnih rješenja neophodne su suvremene kompjutorske tehnike. Pri proučavanju dinamičkih sustava važnu ulogu ima trajektorija točke  $(x_0; y_0)$ , sa svojstvom da postoji vrijeme  $t_0$  tako da bude  $x(t_0) = x_0$  i  $y(t_0) = y_0$  (tj. putanja koja prolazi kroz zadani početni uvjet). Prema definiciji, to je skup svih  $(x(t), y(t))$ , gdje  $t$  prolazi svim vremenima (svim realnim brojevima). To je, dakle, skup svih stanja (život) tog dinamičkog sustava koji sadrže stanje  $(x_0, y_0)$ . Primjer takvog modela je dinamički model ljubavi. U

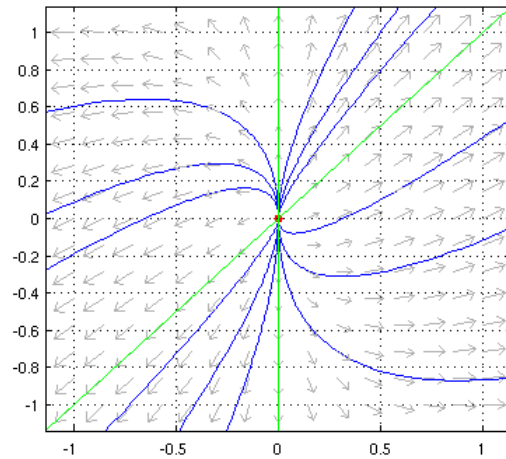
složenijim prostorima, trajektorije imaju više slobode u kretanju te pokazuju širi raspon dinamičkog ponašanja.



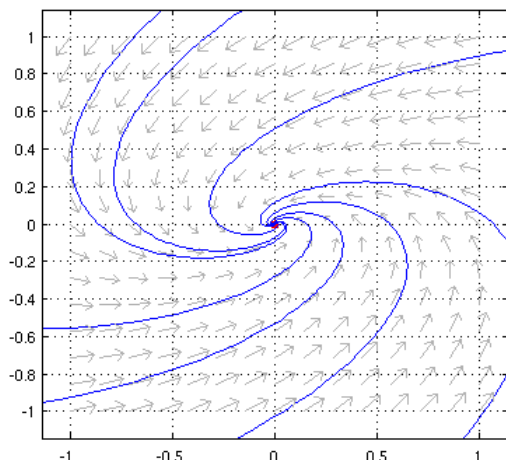
*Slika 1. Posebni oblici trajektorija (putanja): a) Deformirani (nestabilni) cvor, b) Zvijezda (stabilna)*



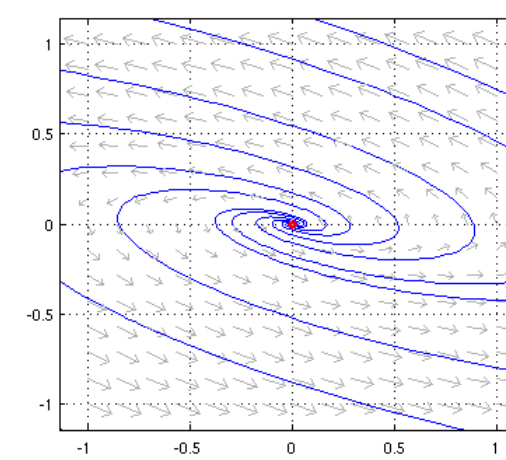
a)



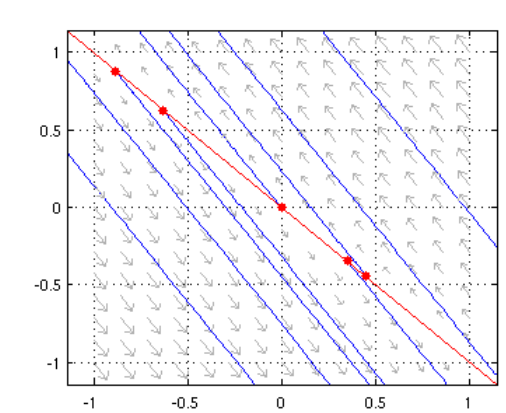
b)



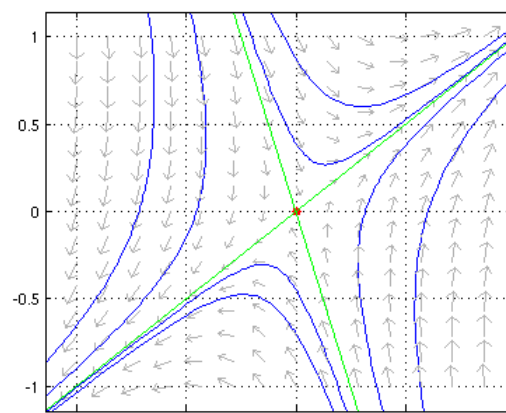
c)



d)



e)



f)

**Slika 2.:** Osnovni tipovi trajektorija (putanja): a) Stabilni cvor, b) Nestabilni cvor c) Stabilna spirala, d) Nestabilna spirala, e) Centar (nestabilni), f) Sedlo

### 3. OSNOVNI MODEL LJUBAVNE VEZE ROMEA I JULIJE

Pri proučavanju ljubavnih odnosa Julije i Romea, preuzet je model i tumačenje modela iz (Strogatz, 1994). Dakle, model privlačnosti između dvije osobe se može prikazati pomoću dvije linearne jednačbe:

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= aR + bJ \\ \frac{dJ}{dt} &= cR + dJ\end{aligned}\tag{5}$$

gdje je  $R(t)$  Romeova ljubav prema Juliji u vremenu  $t$ , a  $J(t)$  Julijina ljubav prema Romeu. Parametri  $a$  i  $b$  predstavljaju Romeov *romantični stil*, dok parametri  $c$  i  $d$  opisuju Julijin *romantični stil*. Parametar  $a$  govori koliko Romeovi osjećaji utječu na njega, dok  $b$  opisuje koliko na njega utječu Julijini osjećaji. Parametri  $c$  i  $d$  opisuju isto s Julijina gledišta. Može se reći da što su koeficijenti  $a$  odnosno  $d$  manji, to su Romeo odnosno Julija *inertniji* u smislu promjene osjećaja. Koeficijenti  $b$  i  $c$ , s druge strane, opisuju u kojoj mjeri osjećaji partnera utječu na osjećaje pojedinog od ljubavnika.

Za Romea se mogu definirati četiri različita romantična stila, preuzeta iz (Strogatz, 1994):

1. **Gorljivi udvarač (pohotnik)**  $a > 0$ ,  $b > 0$ , *Romeo je ohrabren i svojim i Julijinim osjećajima,*
2. **Narcis**  $a > 0$ ,  $b < 0$ , *Romeo hoće više od onoga što osjeća, ali se istodobno povlači pri povećanju Julijinih osjećaja,*
3. **Oprezni udvarač**  $a < 0$ ,  $b > 0$ , *Romeo se boji svojih osjećaja ali je ohrabren Julijinim,*
4. **Pustinjak**  $a < 0$ ,  $b < 0$  *Romeo bježi i od svojih i od Julijinih osjećaja.*

Tako dobivamo 16 mogućih različitih tipova veza Romea i Julije čiju dinamiku možemo lako odrediti iz slika 1 i 2. Vidljivo je da veliki broj (svi nestabilni tipovi trajektorija) različitih tipova ljubavnika završava, u dalekoj budućnosti, iskazujući *beskonačno* jake osjećaje za partnera, osjećaje koji se, po intenzitetu, kroz vrijeme samo pojačavaju.

Sustav jednačbi (5) ima jednu stacionarnu točku kada je  $R = J = 0$ , a označava ravnodušnost (ravnotežu) između Romea i Julije.

Ravnoteža se dobije iz sustava:  $dR/dt=0$ ,  $dJ/dt=0$ . Inače, to je jedina stacionarna točka ako je determinanta sustava  $ad-bc$  različita od 0. U daljnjem tekstu, navedene *romantične stilove* (pohlepnik, narcis, oprezni ljubavnik, pustinjač) i njihove međusobne utjecaje prikazat ćemo grafički, pomoću modela u programskom paketu *Matlab 7*.



## 4. RJEŠAVANJE MODELA

Model je rješavan u programskom paketu Matlab 7. Posebno je zadana funkcija u zasebnoj M datoteci, što izgleda ovako:

```
function [r,j,t] = Romeo_Juliet(a,b,c,d,t,r0,j0)

DR=['Dr = ',num2str(a),'*r + (',num2str(b),'*j)'];
DJ=['Dj = ',num2str(c),'*r + (',num2str(d),'*j)'];
R0=['r(0) = ',num2str(r0)];
J0=['j(0) = ',num2str(j0)];
[r, j] = dsolve(DR,DJ,R0,J0);

r=subs(r);
j=subs(j);
```

Zatim zadanu funkciju pozivamo u novu skriptu gdje definiramo početne uvjete, te parametre a, b, c, d, i uvjete ispisa traktorija. Odnosno istovremeno tražimo riješenja za više različitih početnih uvjeta:

```
a=0;b=1;c=1;d=0;
t=0:0.1:10;
Graph_lim=5;
figure (1)
for r0=-2:0.2:2
j0=0;
[r, j]=Romeo_Juliet(a,b,c,d,t,r0,j0);
plot(r,j), hold on, grid on;
end
for j0=-2:0.2:2
r0=0;
[r, j]=Romeo_Juliet(a,b,c,d,t,r0,j0);
plot(r,j,'g'), hold on, grid on;
end
```

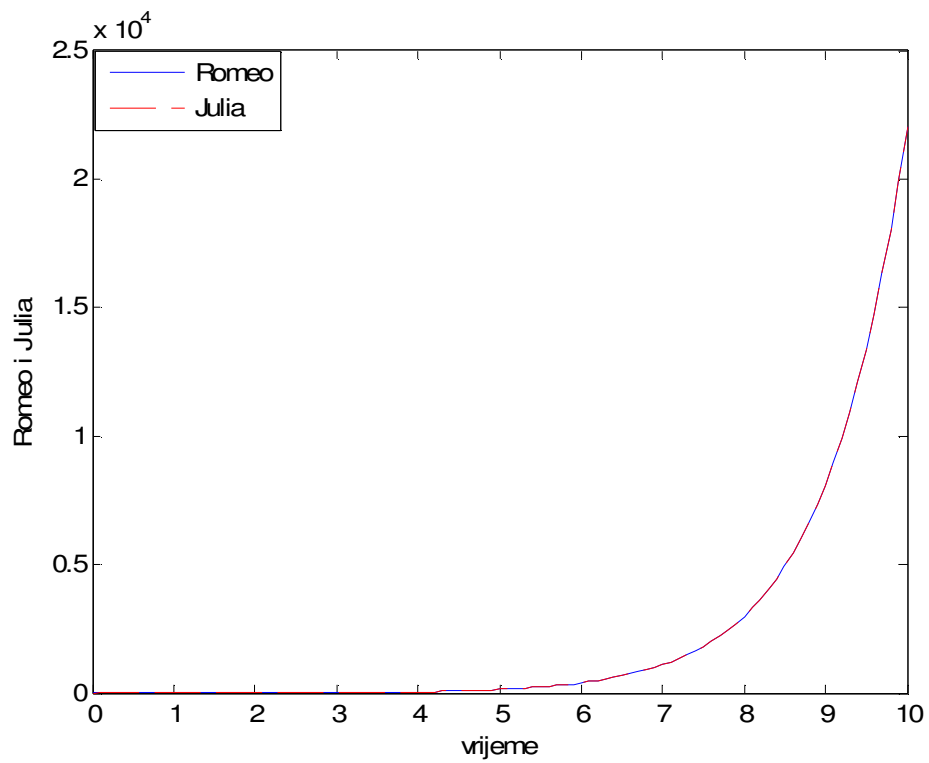
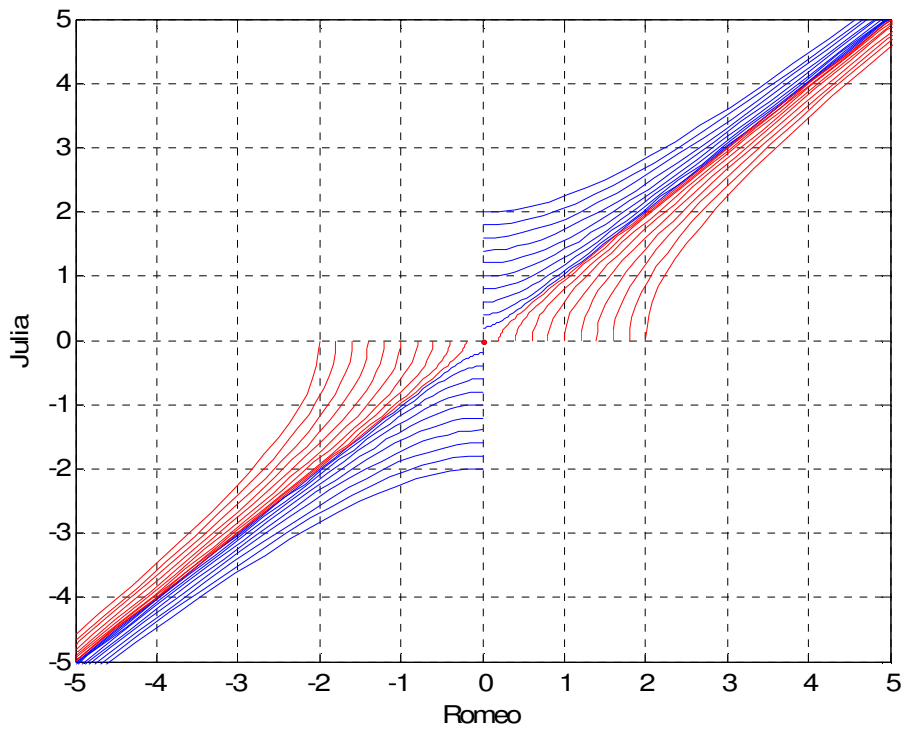
```
axis([-Graph_lim Graph_lim -Graph_lim Graph_lim])
xlabel('Romeo')
ylabel('Julia')
figure (2);
plot (r, t, '--', j,t,'-')
xlabel('tvrijeme')
ylabel('Romeo i Julia')
legend('Romeo', 'Julia')
```

U daljnjem tekstu biti će prikazani odnosi između dvaju partnera (Romea i Julije) kad oni imaju jednake *romantične stilove*.

## 5. JEDNAKI ROMANTIČNI STILOVI

### 5.1. Pohotnik i pohotnik

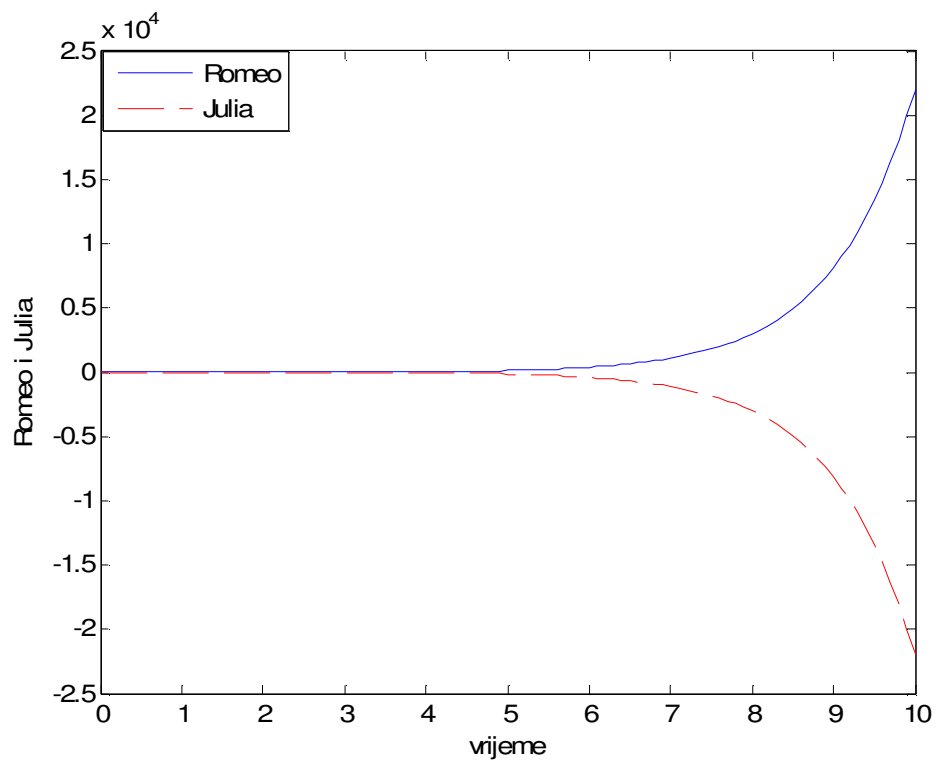
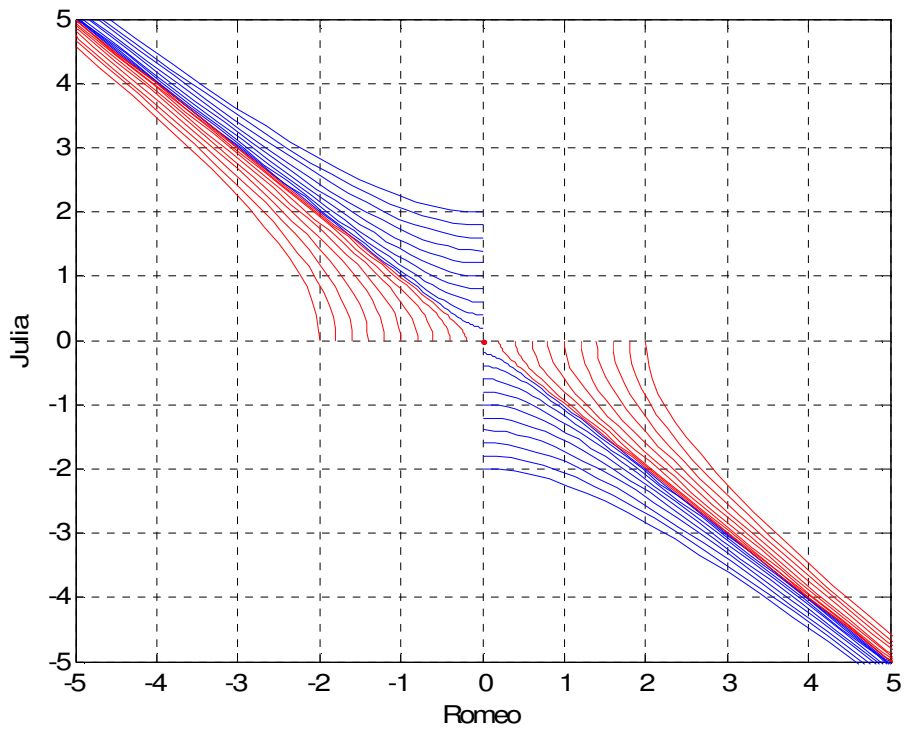
Romeo i Julija su ohrabreni vlastitim i međusobnim osjećajima. Bez obzira na omjer intenziteta osjećaja ovaj odnos će uvijek završiti tako da se ili oboje beskonačno (jako, mnogo, puno) vole (I kvadrant) ili beskonačno mrze (III kvadrant), a to ovisi isključivo o početnim uvjetima, tj. kakav je bio njihov odnos na početku veze. Odabrane vrijednosti parametara su:  $a=0$ ,  $b=1$ ,  $c=1$ ,  $d=0$ . (slika 3.)



*Slika 3. Odnos pohotnika i pohotnika i prikaz promjene velicina  $x$  i  $y$  tj. odnosa Romea i Julije u ovisnosti o vremenu.*

## 5.2. Narcis i narcis

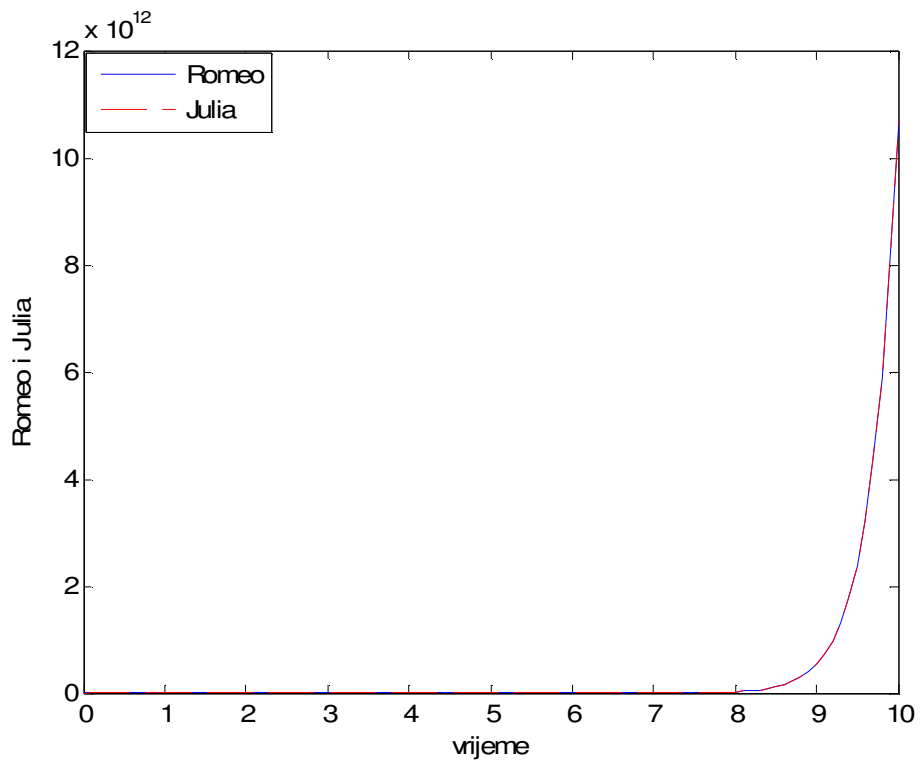
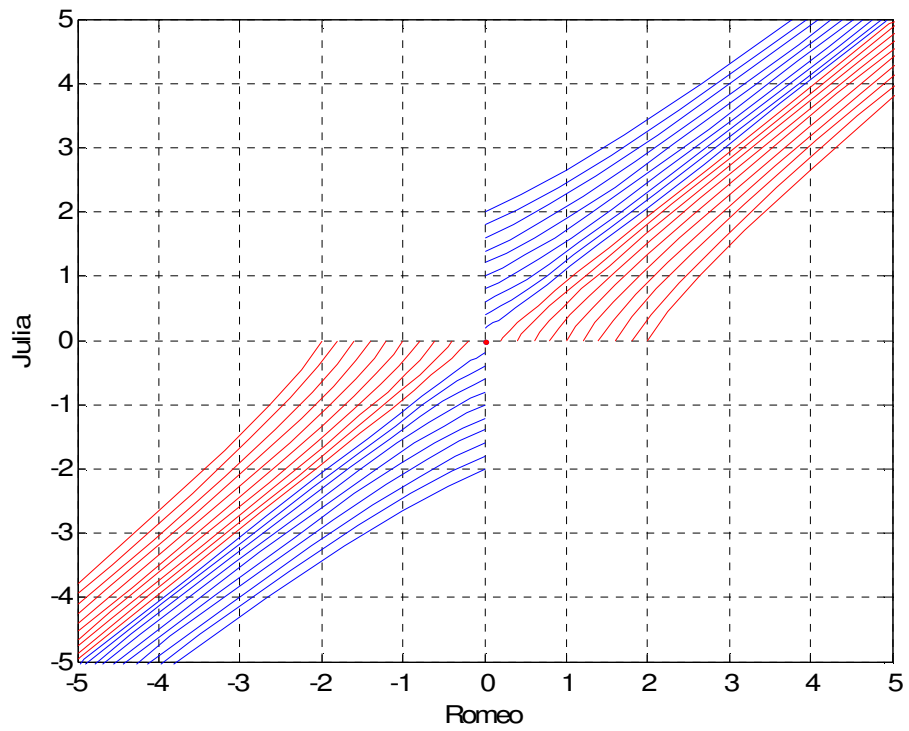
Romeo i Julija su ohrabreni vlastitim osjećajima, ali što Julija više ohrabruje Romea (II kvadrant) on je sve manje voli, odnosno što se više Romeo udvara Juliji ona je sve manje zainteresirana za njega (IV kvadrant). Ovakav odnos će uvijek rezultirati situacijom u kojoj jedno od njih bude beskonačno zaljubljeno, a drugo beskonačno mrzi. Odabrani parametri u ovom slučaju su  $a=0$ ,  $b=-1$ ,  $c=-1$ ,  $d=0$ . (slika 4).



*Slika 4. Odnos narcisa i narcisa i prikaz promjene velicina  $x$  i  $y$  tj. odnosa Romea i Julije u ovisnosti o vremenu.*

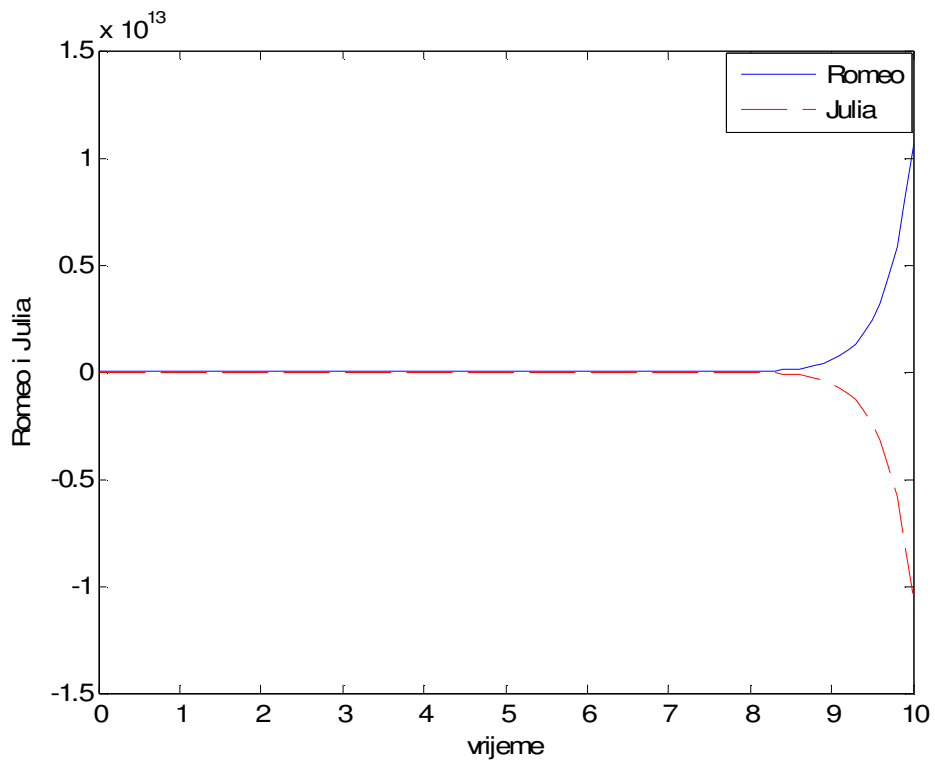
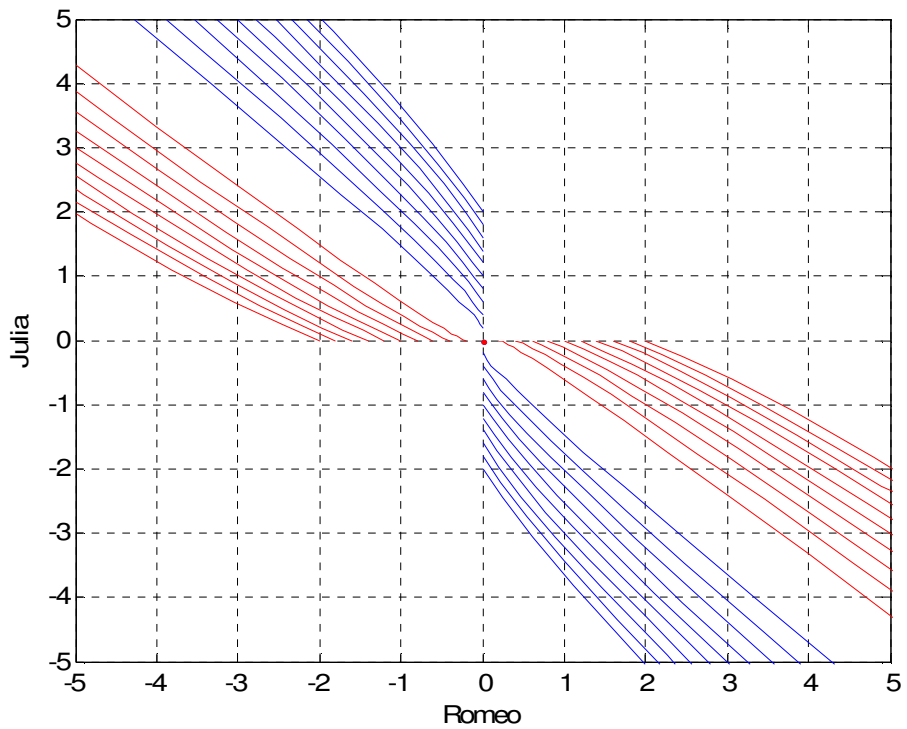
### 5.3. Oprezan ljubavnik i oprezan ljubavnik

I Romeo i Julija su ohrabreni osjećajima onog drugog, ali se ne žele ozbiljno vezati te se zbog toga udaljavaju od vlastitih osjećaja. Rezultat ovakvoga odnosa ovisi o tome odgovaraju li Romeo i Julija više na osjećaje onog drugoga,  $|a| < |b|$ , ili su i jednom i drugom važniji njihovi vlastiti osjećaji,  $|a| > |b|$ . Prvi slučaj rezultira beskonačnom ljubavlju (I kvadrant) ili mržnjom (III kvadrant), što ovisi o početnim uvjetima, jer Romeo i Julija ipak odgovaraju na osjećaje onog drugog (slika 5). U tom slučaju  $a=1$ ,  $b=2$ ,  $c=2$ ,  $d=1$ . U drugom slučaju u kojem je  $a=2$ ,  $b=-1$ ,  $c=-1$ ,  $d=2$ , doći će do međusobne apatije u kojoj ni Romeo ni Julija neće imati nikakve osjećaje prema onom drugom (slika 6). Ukoliko Romeo i Julija jednako odgovaraju na vlastite osjećaje kao i osjećaje onog drugog,  $|a| = |b|$ , tada će njihov odnos rezultirati jednim nepromjenjivim stanjem u kojem se Romeo i Julija ili vole ili mrze. Za taj slučaj uzeti su sljedeći parametri:  $a=1$ ,  $b=-1$ ,  $c=-1$ ,  $d=1$  (slika 7). Isto će se dogoditi ukoliko vrijedi da je  $|a| = |c|$  i  $|b| = |d|$ .

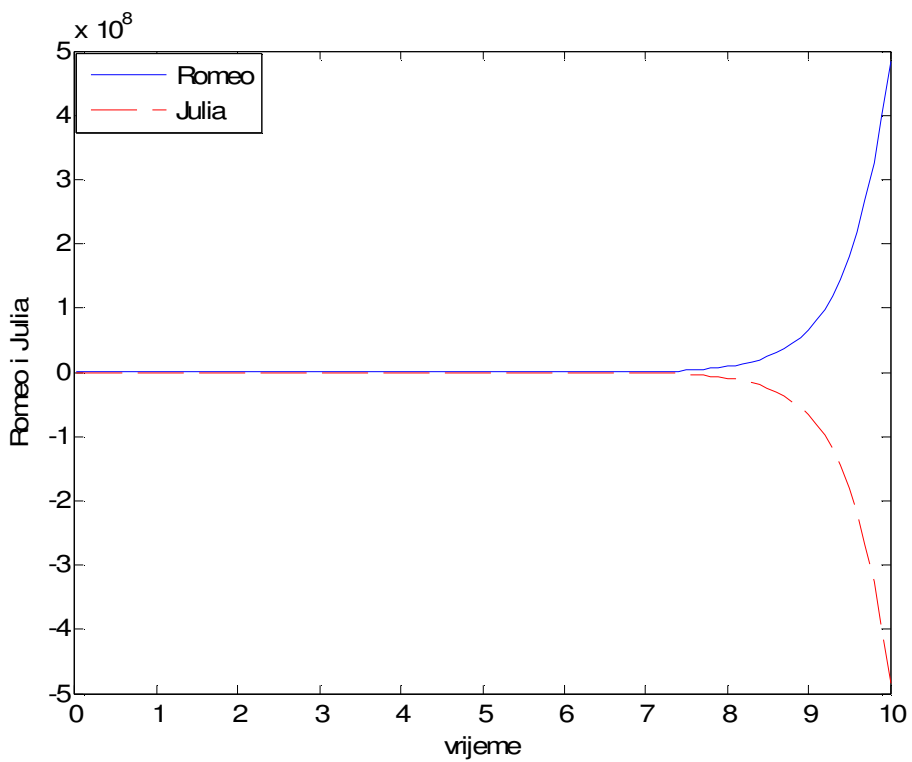
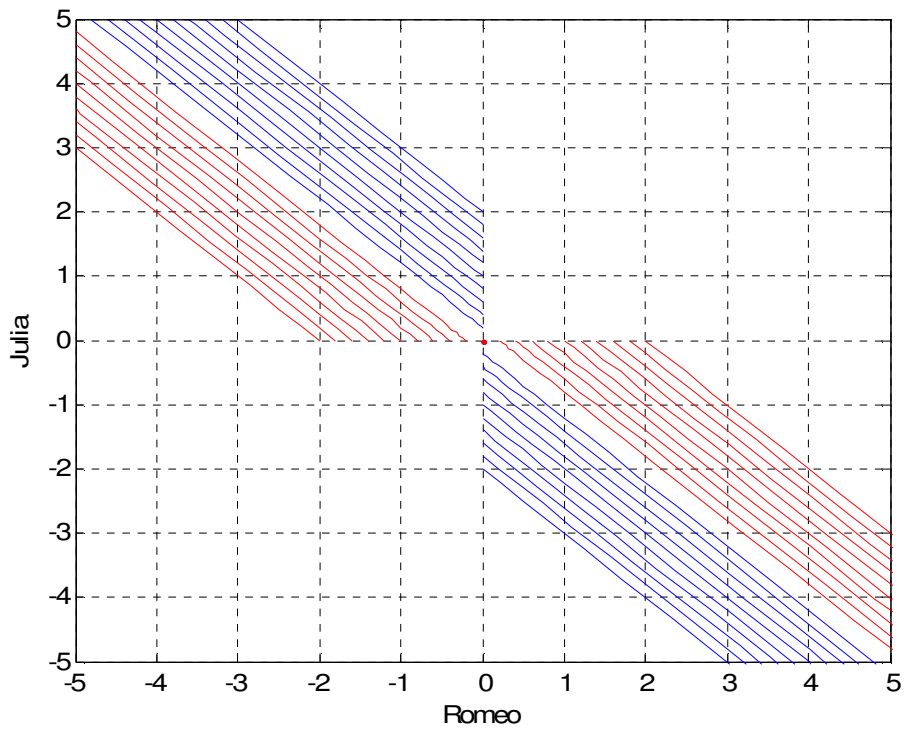


*Slika 5. Odnos opreznog ljubavnika i opreznog ljubavnika u slučaju kad odgovaraju na osjećaje onog drugog*





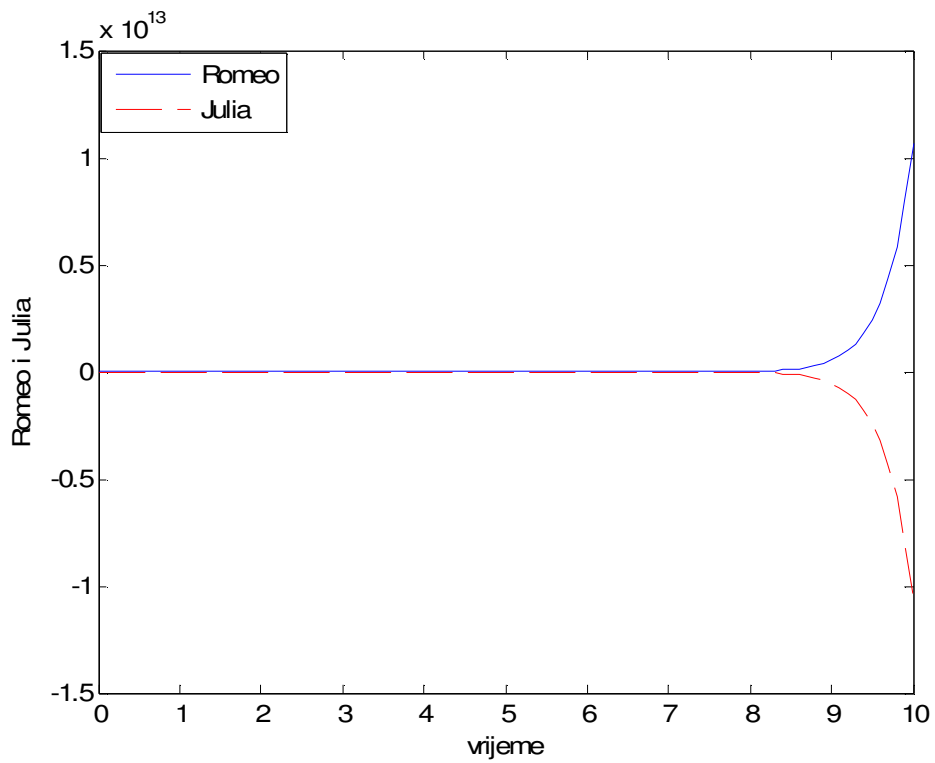
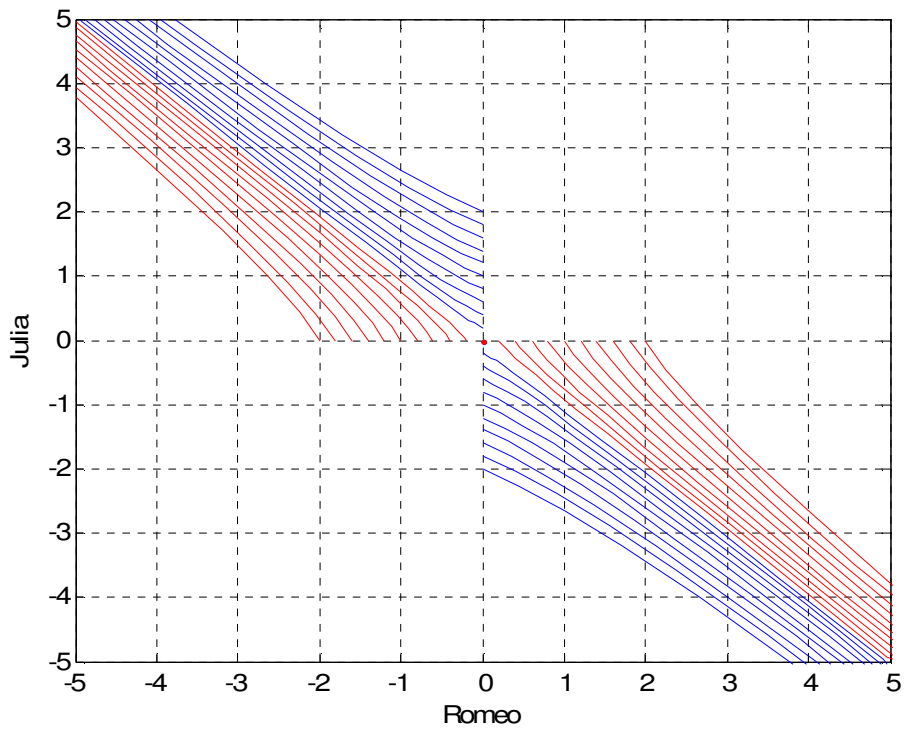
*Slika 6. Odnos opreznog ljubavnika i opreznog ljubavnika u slučaju kad vlada međusobna ravnodušnost*



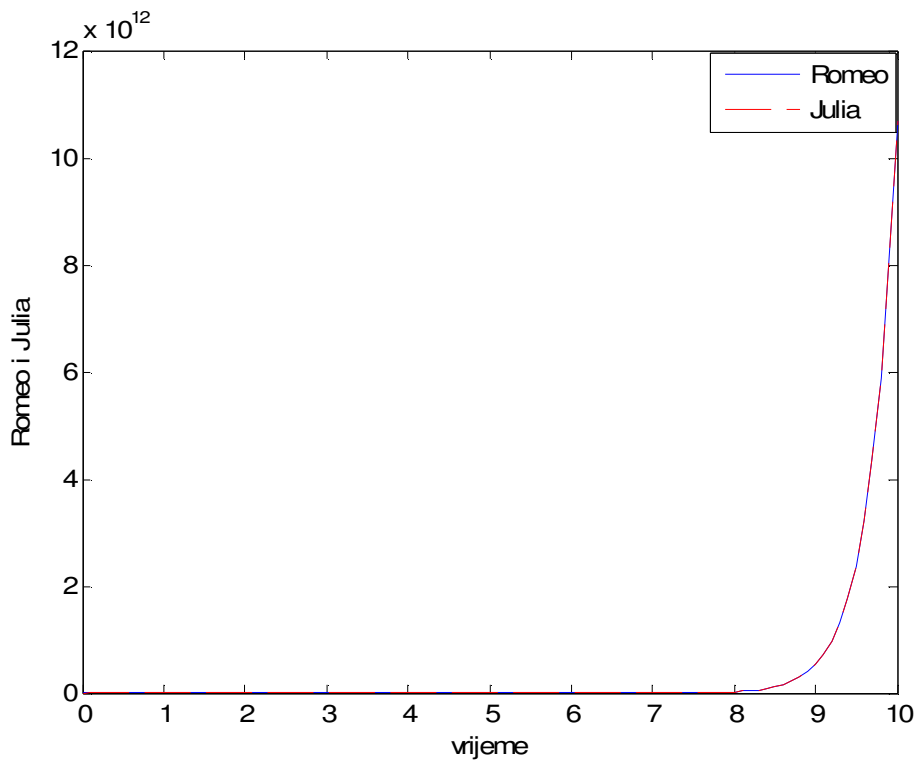
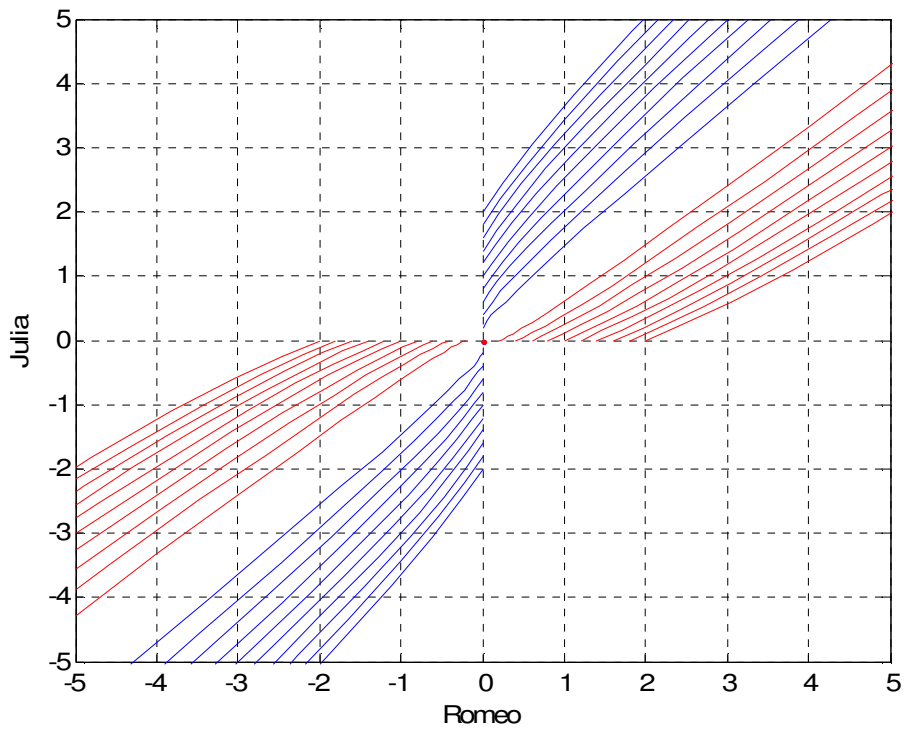
*Slika 7. Odnos opreznog ljubavnika i opreznog ljubavnika u slučaju kad vlada nepromjenjivo stanje*

## 5.4. Pustinjak i pustinjak

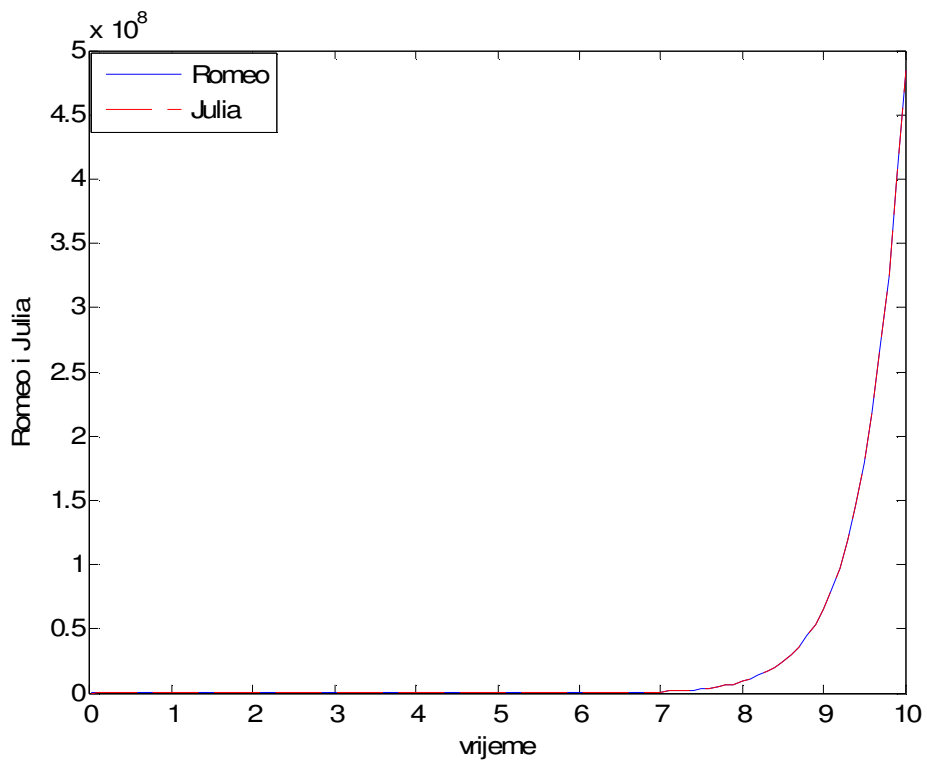
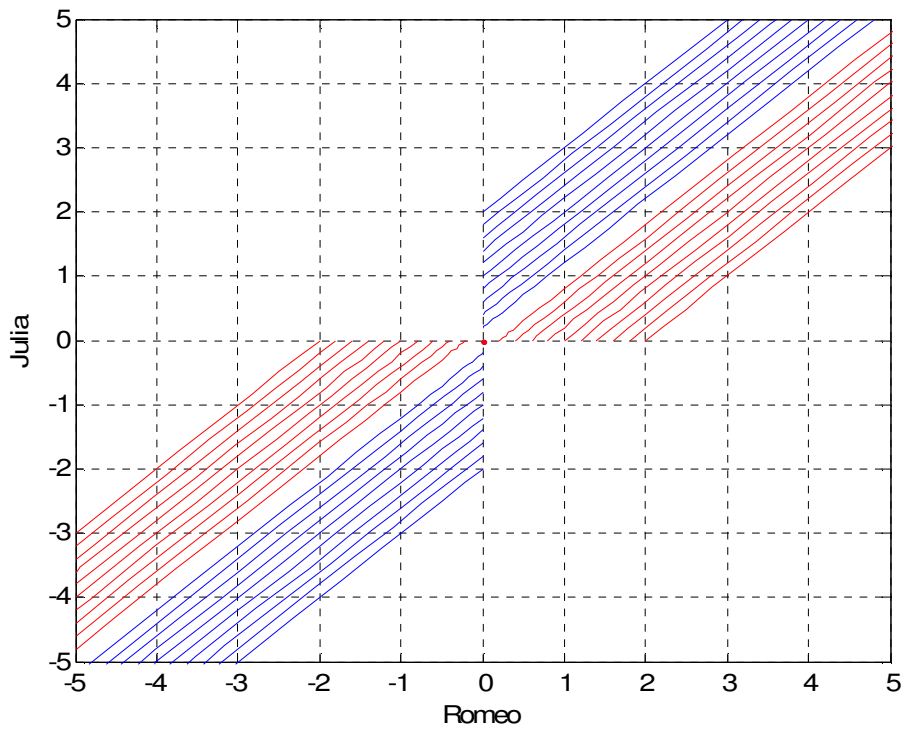
Ako su Romeo i Julija oboje pustinjaci tada će njihov odnos rezultirati tako da je jedno od njih beskonačno zaljubljeno dok ga ono drugo beskonačno mrzi ukoliko Romeo i Julija više odgovaraju na osjećaje onog drugog nego na svoje osjećaje,  $|a| < |b|$  (slika 8). Parametri za ovaj slučaj su:  $a=1$ ,  $b=2$ ,  $c=2$ ,  $d=1$ . U suprotnom, kada je  $|a| > |b|$ , dolazi do međusobne apatije (slika 9). Ukoliko Romeo i Julija jednako odgovaraju na vlastite osjećaje kao i osjećaje onog drugog,  $|a| = |b|$ , tada će njihov odnos rezultirati jednim nepromjenjivim stanjem u kojem je jedno od njih zaljubljeno, a drugo mrzi (slika 10.). Isto će se dogoditi ukoliko vrijedi da je  $|a| = |c|$  i  $|b| = |d|$ .



*Slika 8. Odnos pustinjač–pustinjač u kojem se više odgovara na osjećaje onog drugog nego na vlastite*



*Slika 9. Odnos pustinjač–pustinjač u kojem vlada međusobna ravnodušnost*



*Slika 10. Odnos pustinjač–pustinjač u kojem je jedno zaljubljeno, a drugo mrzi*

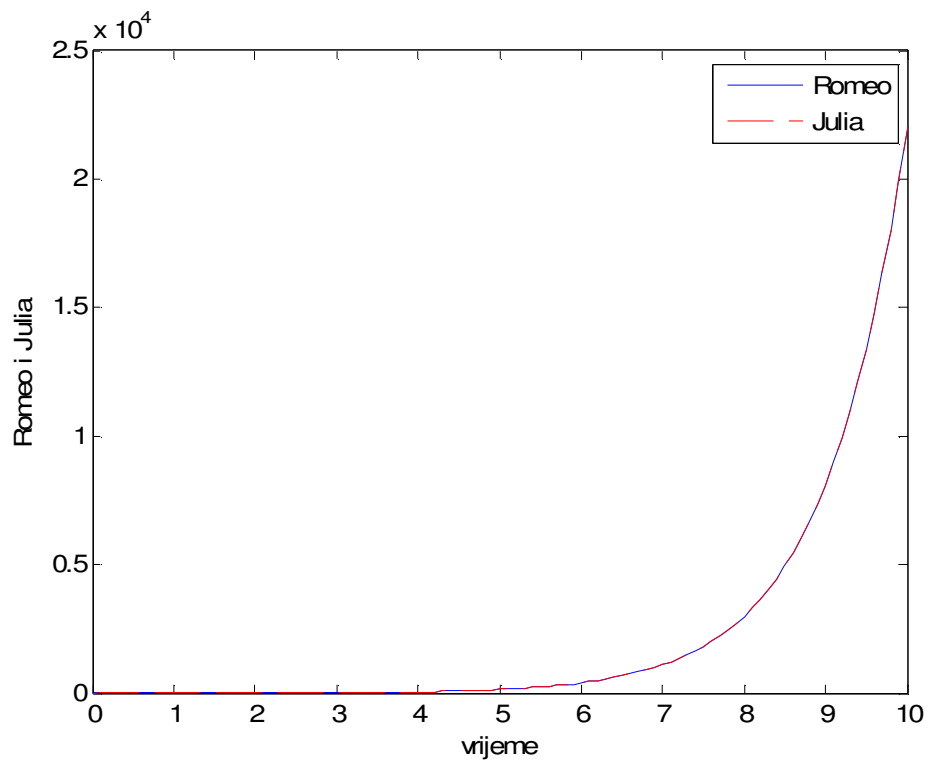
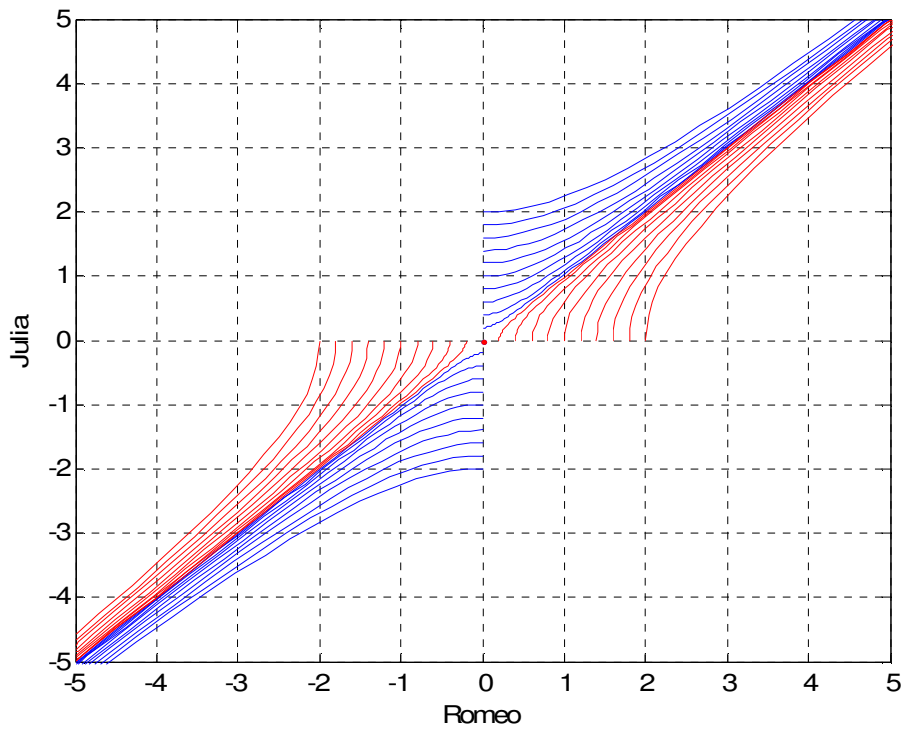
## 6. SLUČAJEVI BEZ UTJECAJA VLASTITIH OSJEĆAJA

U sljedećim slučajevima na Romea i Juliju ne utječu njihovi vlastiti osjećaji i reagiraju samo na osjećaje onog drugog, odnosno  $a = d = 0$ . Dinamika sustava u ovom slučaju ovisi isključivo o parametrima  $b$  i  $c$  za koje postoje tri kombinacije:

1. Dva ljubavnika:  $b > 0, c > 0$  (uzajamna ljubav ili uzajamna mržnja)
2. Dva narcisa:  $b < 0, c < 0$  (jedan voli više, a drugi manje)
3. Narcis + ljubavnik:  $bc < 0$  (beskrajni ciklus ljubavi i mržnje).

### 6.1. Dva ljubavnika ( $b > 0, c > 0$ )

U ovom slučaju Romeo i Julija se beskonačno vole (I kvadrant), odnosno Romeo je ohrabren Julijinim osjećajima i njegova ljubav prema Juliji sve više raste. S druge strane i Julija sve više voli Romea ohrabrena njegovim osjećajima. U tom slučaju uzeli smo parametre  $a=0$ ,  $b=1$ ,  $c=1$ ,  $d=0$ , a slučaj je prikazan na slici 11.

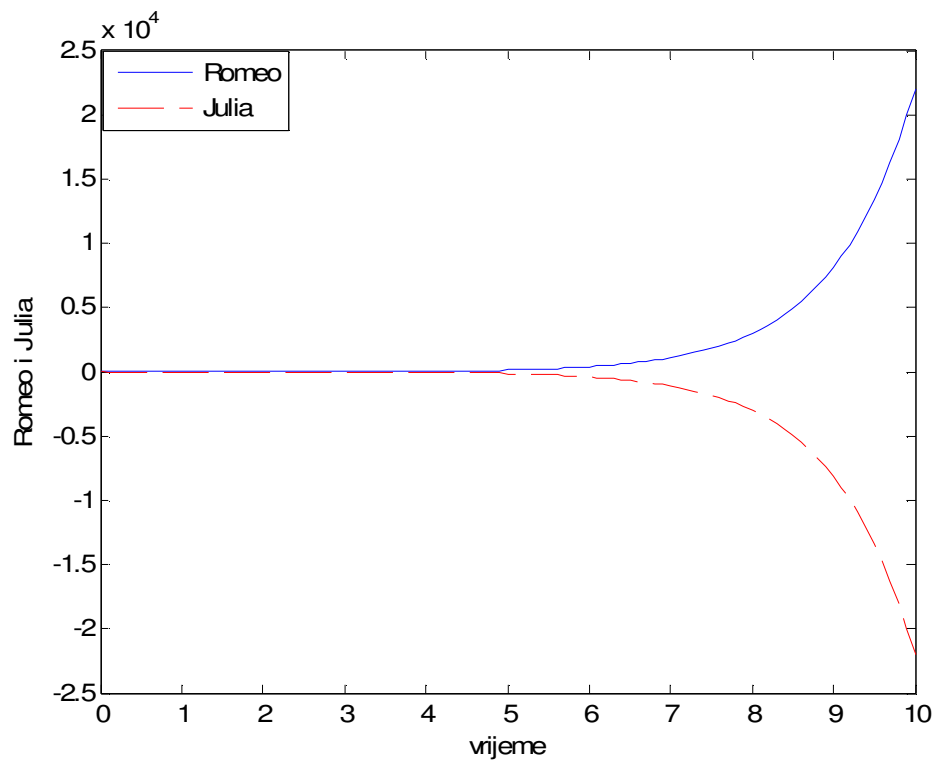
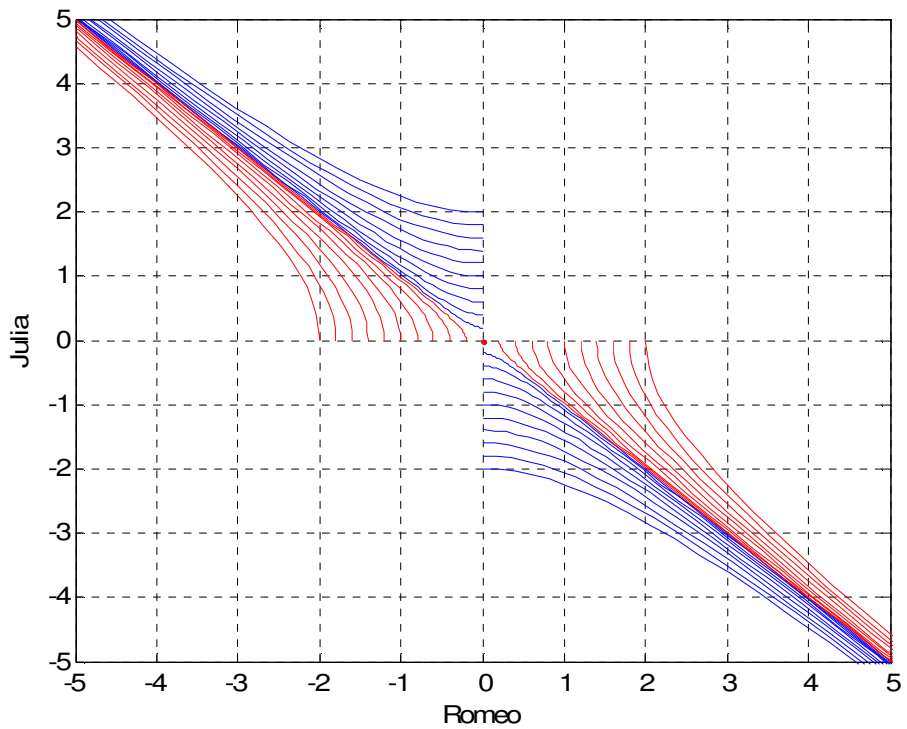


*Slika 11. Odnos dva ljubavnika*



## 6.2. Dva narcisa ( $b < 0, c < 0$ )

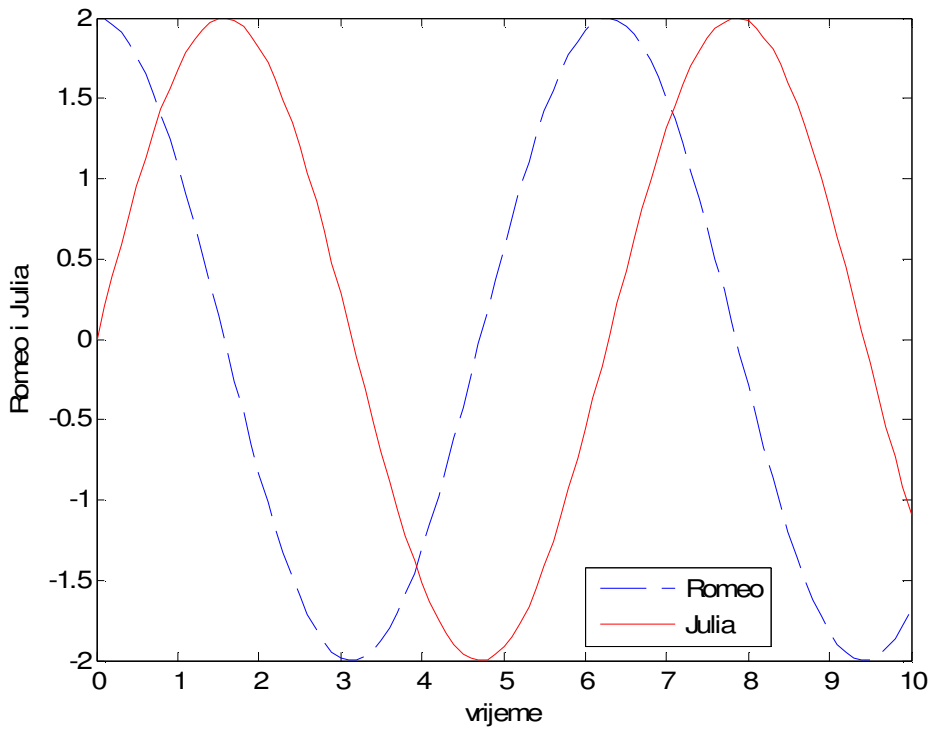
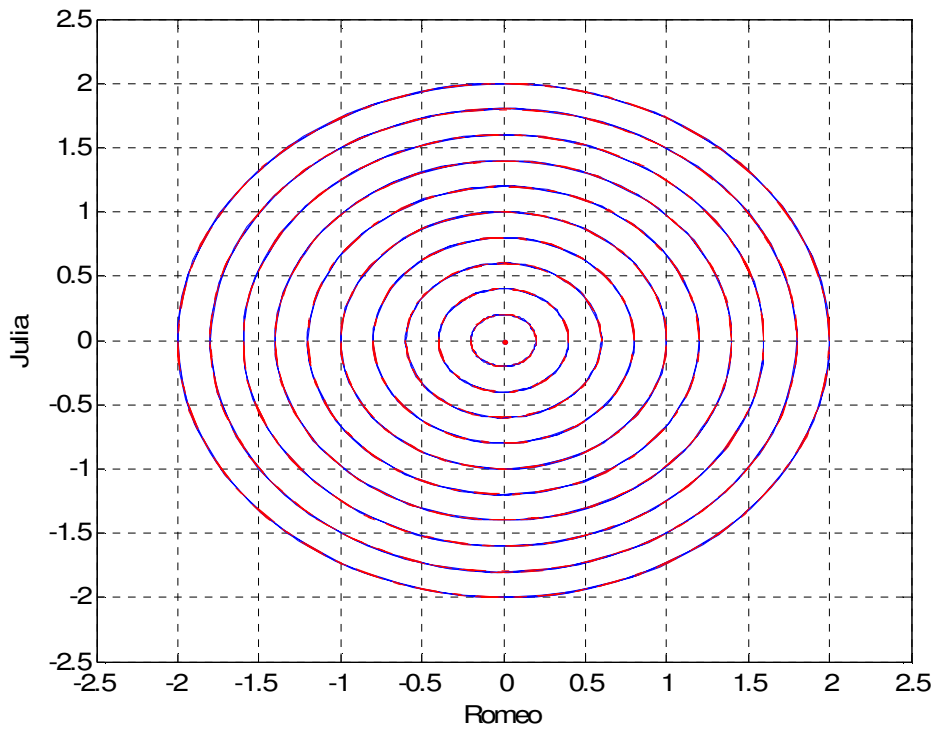
U ovom slučaju što je Julijina ljubav prema Romeu veća, Romeova ljubav prema njoj se smanjuje (II kvadrant), odnosno kada Romeova ljubav prema Juliji raste, ona postaje manje zainteresirana za njega (IV kvadrant). Za taj slučaj uzeti su sljedeći parametri:  $a=0$ ,  $b=-1$ ,  $c=-1$ ,  $d=0$ , a slučaj je prikazan na slici 12.



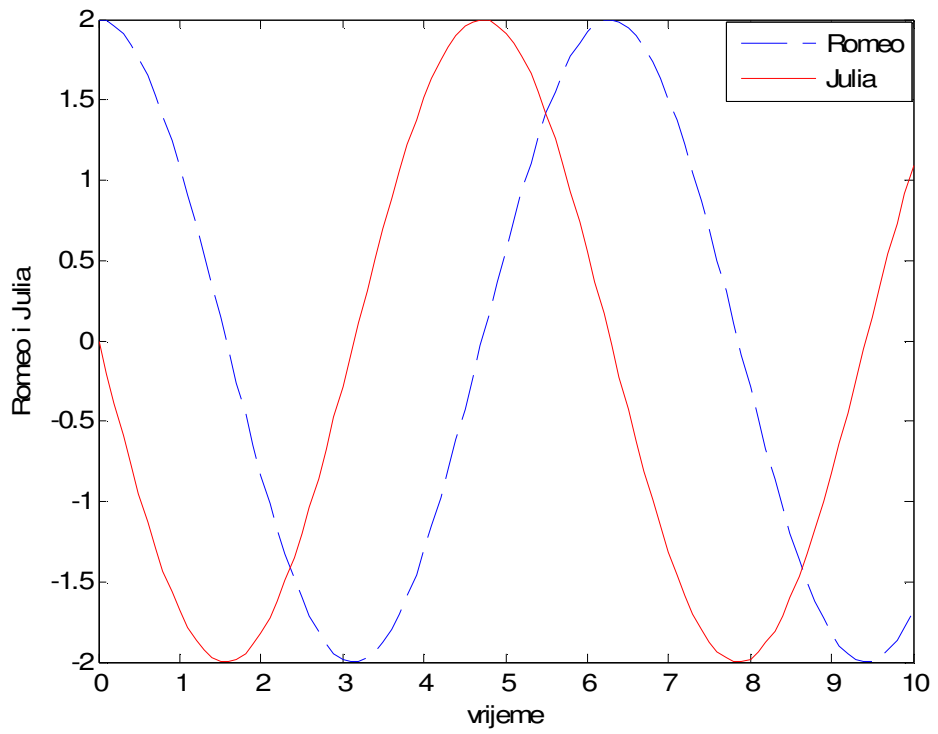
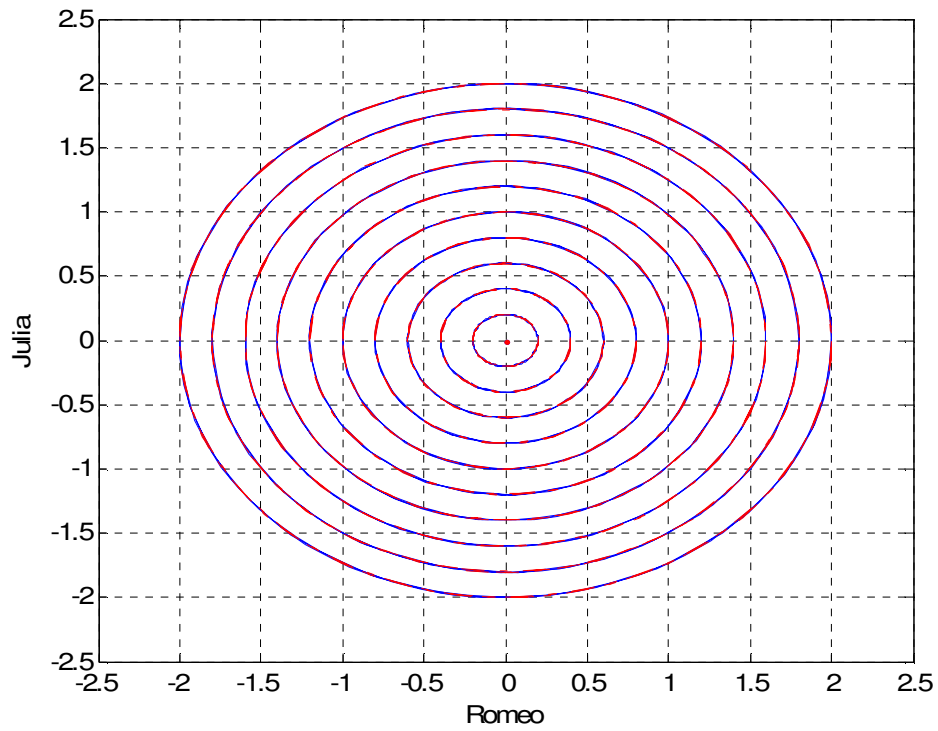
*Slika 12. Odnos dva narcisa*

### 6.3. Narcis i ljubavnik ( $bc < 0$ )

Ako vrijedi  $bc < 0$  dobije se elipsa, odnosno intenzitet njihovih osjećaja (pozitivnih ili negativnih), koji se javljaju zbog ohrabrivanja onog drugog, je jednak. U prvom kvadrantu, iako ohrabren Julijinim osjećajima Romeo je sve manje zaljubljen (drugi kvadrant) i Julijini osjećaji počinju slabjeti, tako da se sve manje vole. U trećem kvadrantu Romeovi osjećaji počinju se ponovno buditi, ali je sada Julija sve manje zainteresirana, dok u četvrtom kvadrantu i njegovi i njeni osjećaji postaju sve snažniji. Dakle razvija se beskonačan ciklus ljubavi i mržnje. Ako vrijedi da je  $b > 0$  i  $c < 0$ , uzimamo vrijednost parametara  $a=0$ ,  $b=1$  i  $c=-1$ ,  $d=0$ , tada je orijentacija krivulje u smjeru kazaljki na satu, a slučaj prikazuje slika 13. U prilogu se nalazi slika na kojoj je prikazano usmjerenje trajektorija za isti slučaj. Za  $b < 0$  i  $c > 0$  uzimamo vrijednost parametara  $a=0$ ,  $b=-1$ ,  $c=1$ ,  $d=0$ , tada je orijentacija krivulje u smjeru suprotnom od kazaljki na satu a slučaj prikazuje slika 14. U prilogu se nalazi slika s prikazanim smjerom trajektorija za navedeni slučaj.



*Slika 13. Odnos narcis i ljubavnik za  $b > 0$  i  $c < 0$*



*Slika 14. Odnos narcis i ljubavnik za  $b < 0$  i  $c > 0$*

## 7. LJUBAVNICI POTPUNE SUPROTNOSTI

Model privlačnosti prikazujemo pomoću već ranije spomenutih jednadžbi:

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= aR + bJ \\ \frac{dJ}{dt} &= cR + dJ\end{aligned}\tag{5}$$

Sada pretpostavimo slučaj u kojem su dvoje ljubavnika potpune suprotnosti ( $c = -b$  i  $d = -a$ ).

1) pohlepnik + pustinjač:  $ab > 0$ .

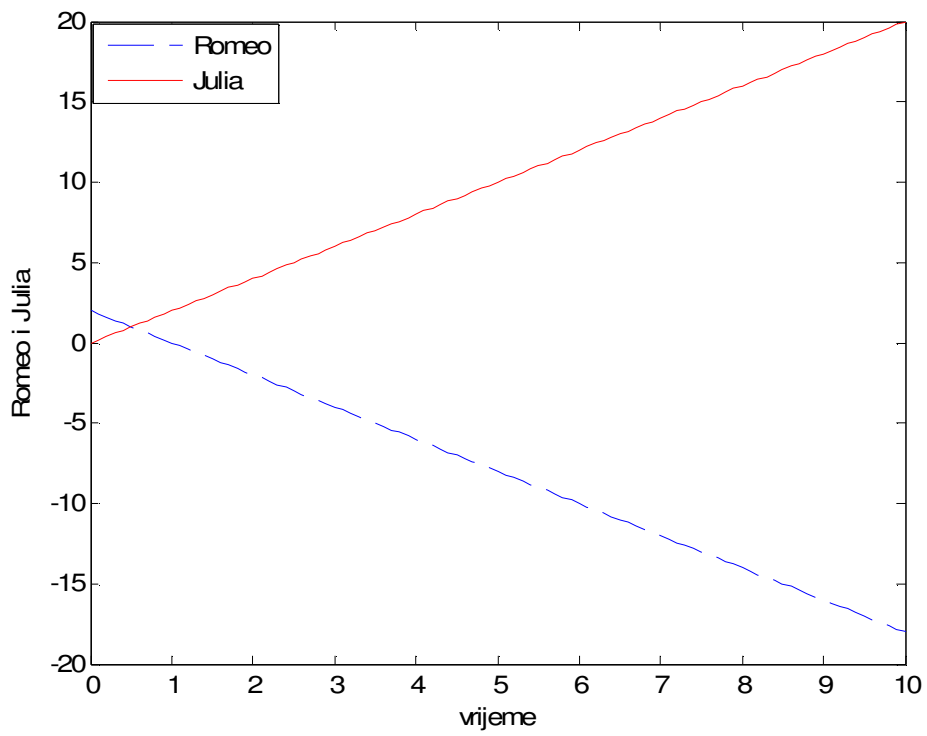
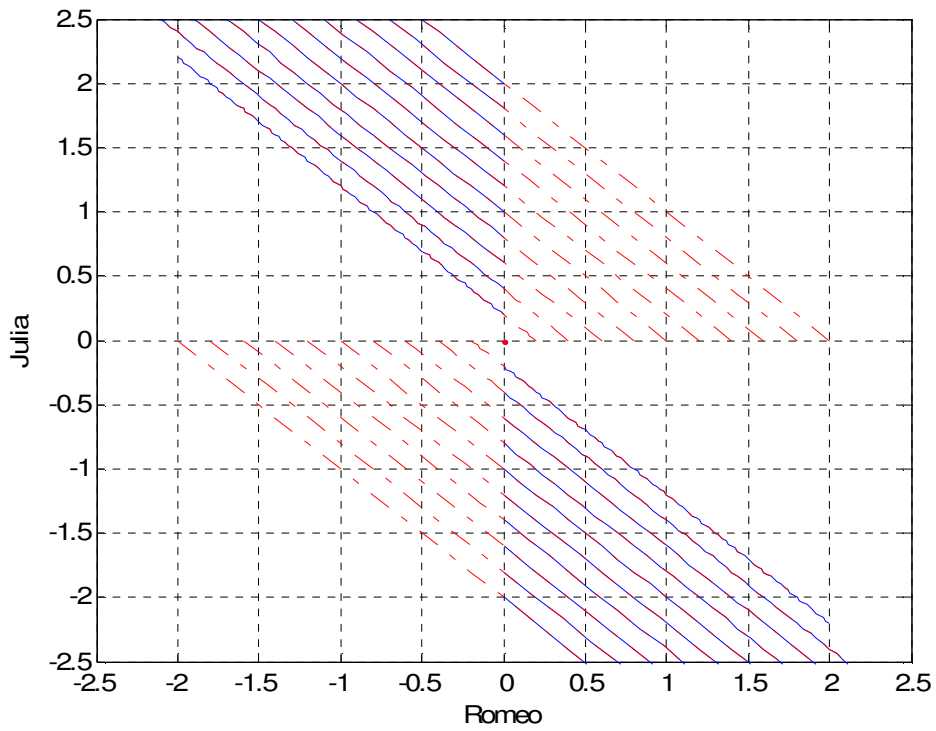
2) narcis + ljubavnik:  $ab < 0$ .

Parametri  $a$  i  $b$  mogu biti jednaki nuli, no takve rubne slučajeve nećemo razmatrati. Ishod navedenog slučaja ovisi o tome hoće li pojedinci više reagirati na sebe ( $|a| > |b|$ ) ili na druge ( $|a| < |b|$ ). Prvi slučaj vodi do toga da su pohlepnik i pustinjač u sukobu, a narcis i oprezni ljubavnik su u ljubavi ili u mržnji. U drugom slučaju sve je obrnuto. Prema tome trajektorije mogu završiti u bilo kojem kvadrantu (sve 4 kombinacije ljubavi i mržnje) ili u beskonačnom ciklusu.

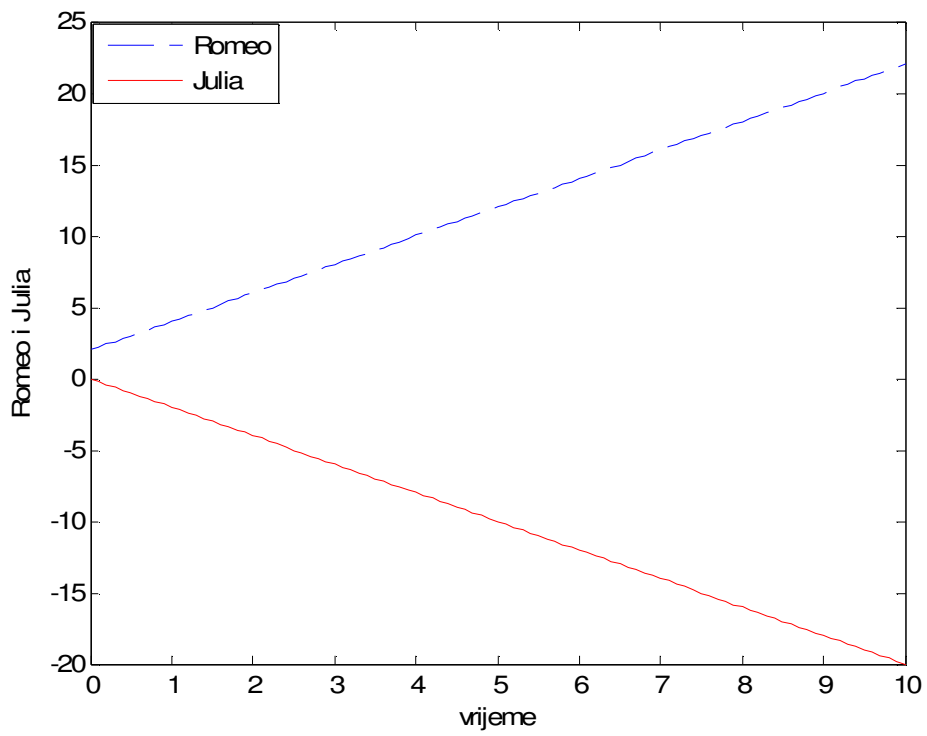
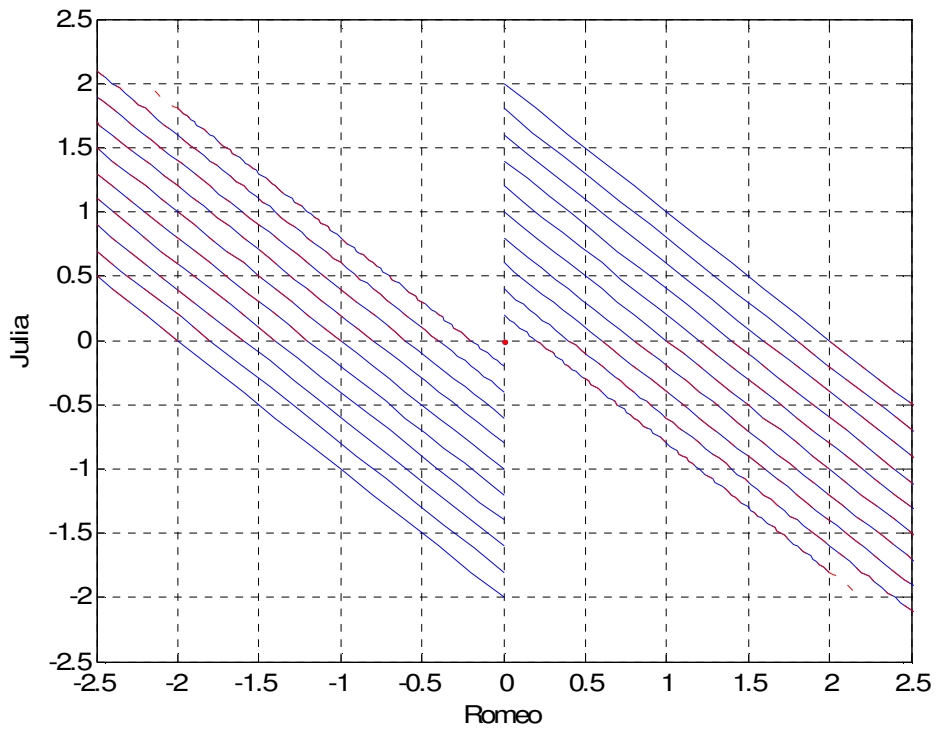
### 7.1. Pohlepnik i pustinjač

U ovom slučaju  $ab > 0$ , a parametri koje smo izabrali za razmatranje definiramo kao  $a=1$  i  $b=1$ , i vrijedi da je  $c=-b$ ,  $d=-a$ , a slučaj prikazuje slika 15. U drugom slučaju  $ab < 0$ , uzeli smo vrijednost parametara  $a=-1$ ,  $b=-1$ , te također vrijedi da je  $c=-b$ ,  $d=-a$ , a slučaj je prikazan na slici 16. Iz slika 15. i 16. vidimo da ukoliko Romeova ljubav prema Juliji raste, tada se Julijina ljubav prema Romeu smanjuje. Odnosno, ukoliko Julija sve manje voli Romea, tada je i Romeova ljubav prema njoj sve veća. Slike su slične iako se odnose na dvije različite situacije zbog toga što uzimamo različite vrijednosti parametara  $a$  i  $b$  za oba slučaja ali ostajemo pri tome da je  $ab > 0$ .

Za slike 17. uzeli smo vrijednost parametara  $a=2$ ,  $b=1$  te također vrijedi uvjet  $c=-b$ ,  $d=-a$ , dok smo za primjer 18. uzeli vrijednost parametara  $a=-2$ ,  $b=-1$  za iste uvjete. Iz tih slika također vidimo da kada se Romeova ljubav prema Juliji povećava, tada se Julijina ljubav prema njemu smanjuje i obrnuto, ovisno o počenim uvjetima.

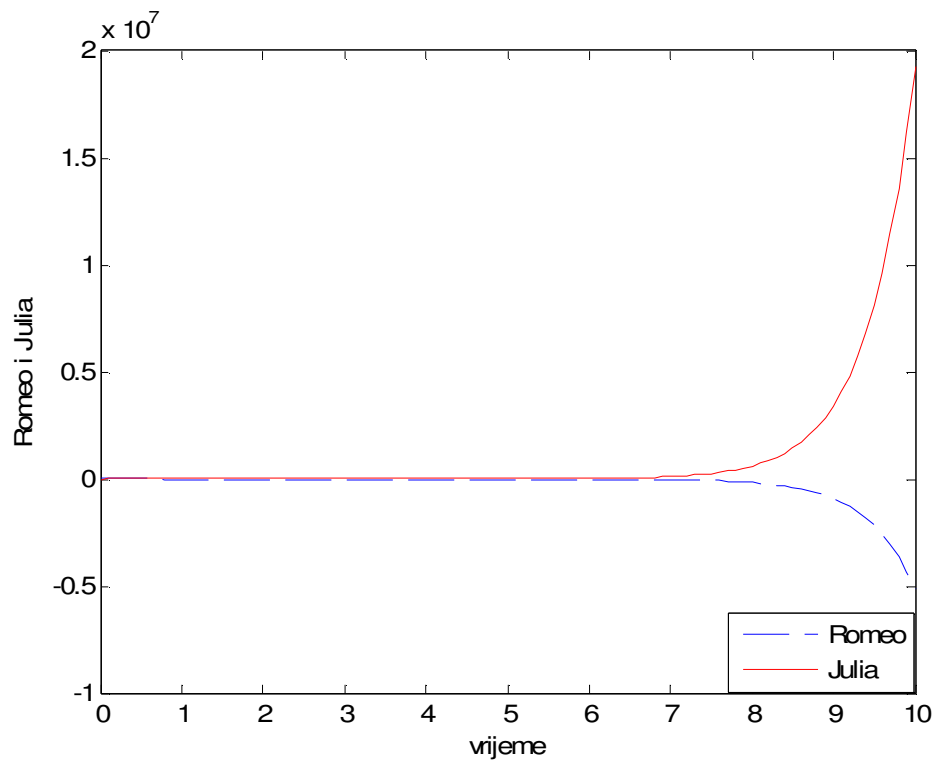
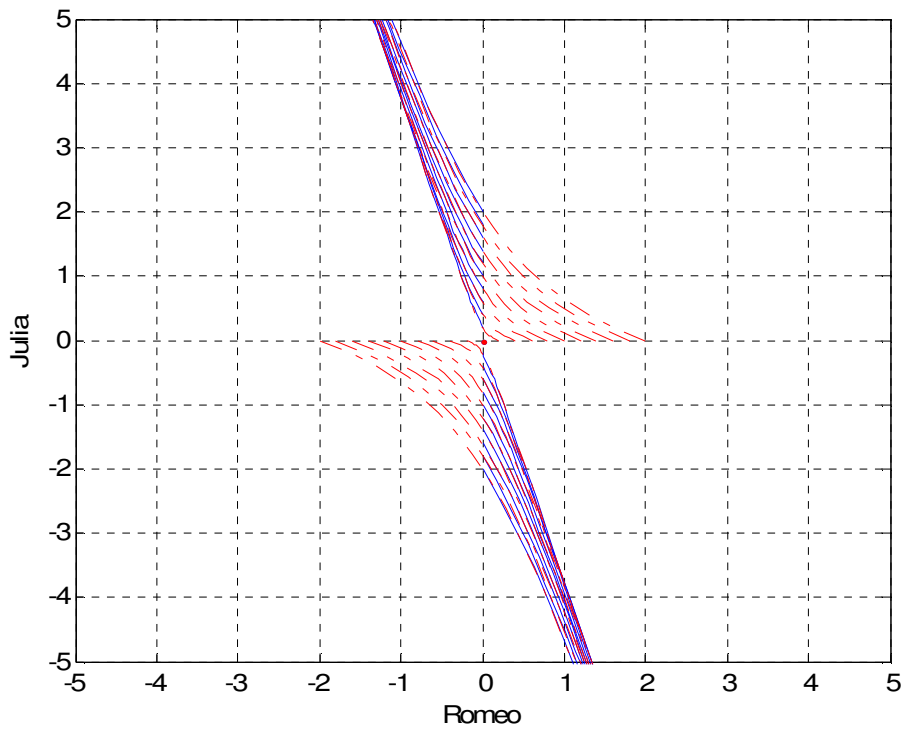


*Slika 15. Odnos pohlepnika i pustinjaka za slučaj  $ab > 0$*

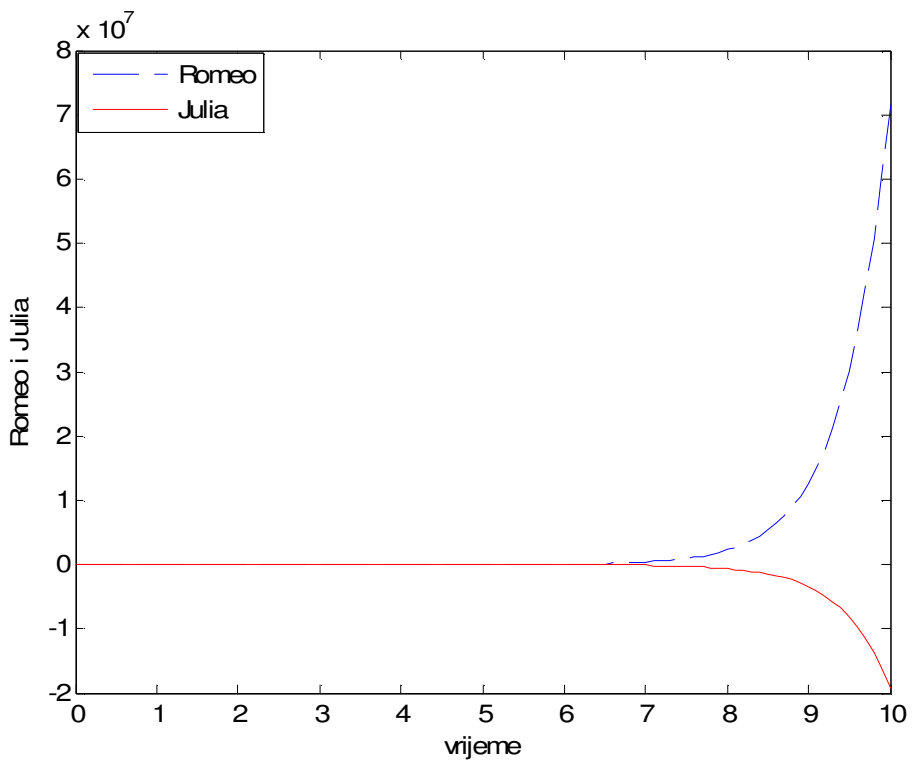
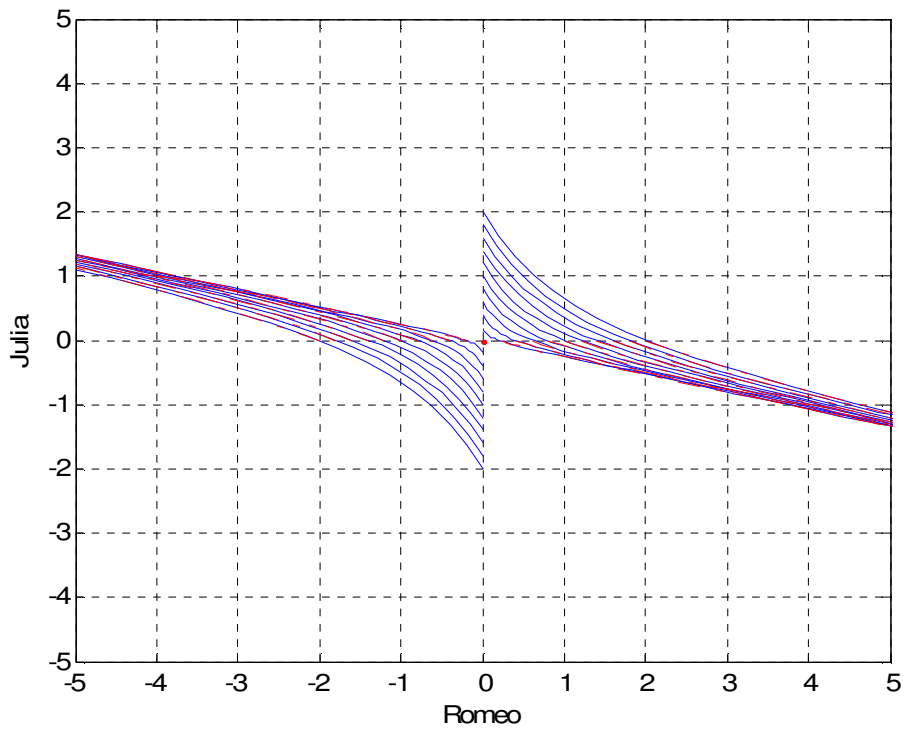


*Slka 16. Odnos pohlepnika i pustinjaka za slučaj  $ab < 0$*





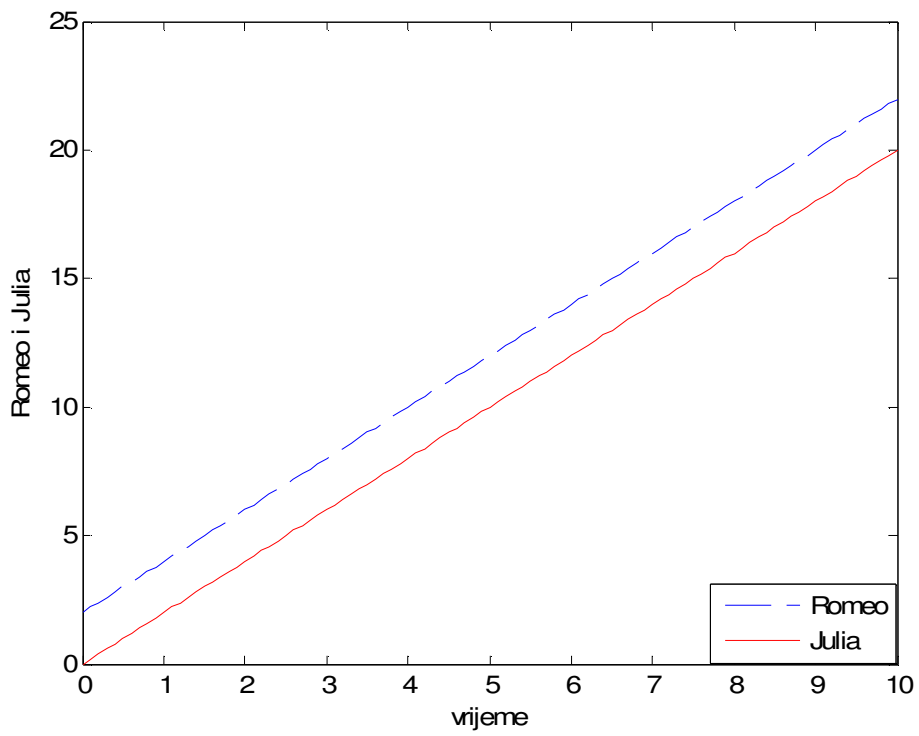
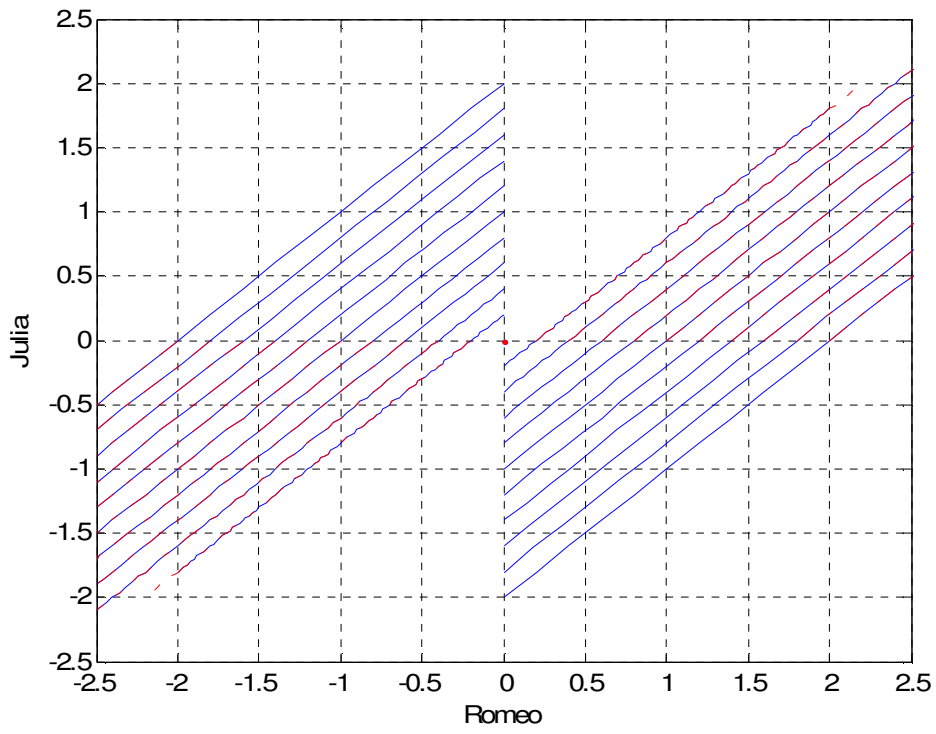
*Slika17. Odnos pohlepnika i pustinjaka za slučaj  $ab < 0$*



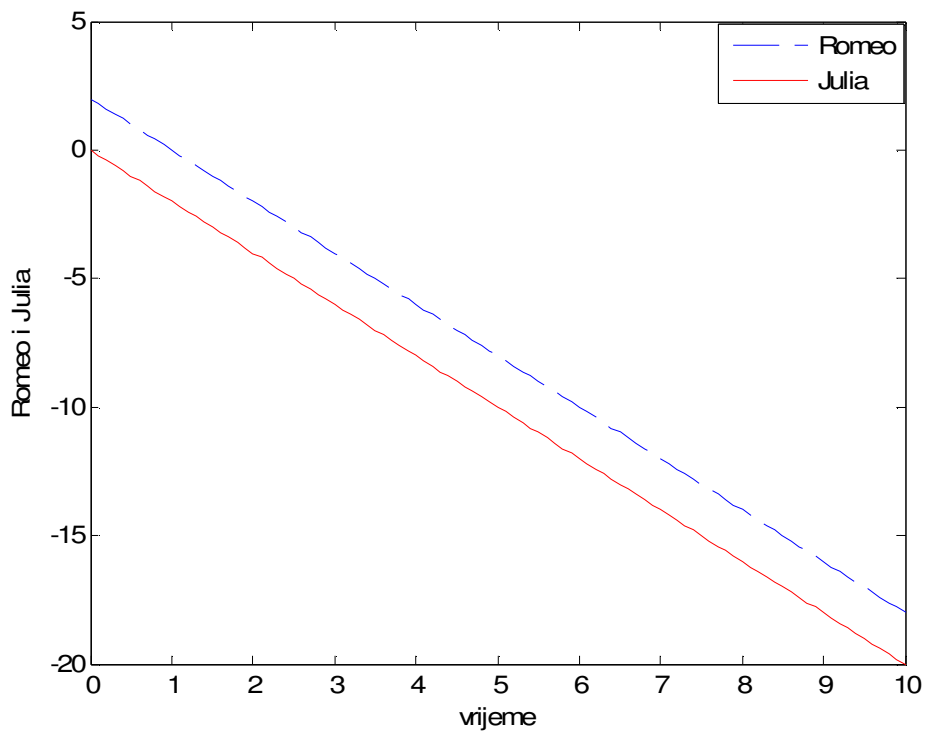
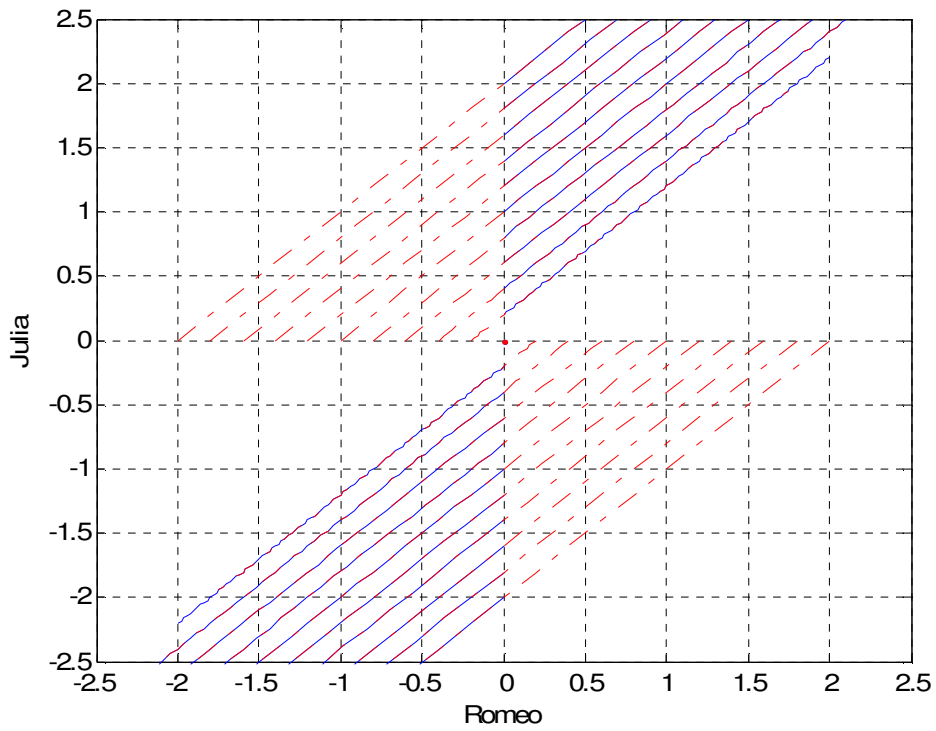
*Slika18. Odnos pohlepnika i pustinjaka za slučaj  $ab < 0$*

## 7.2. Narcis i ljubavnik

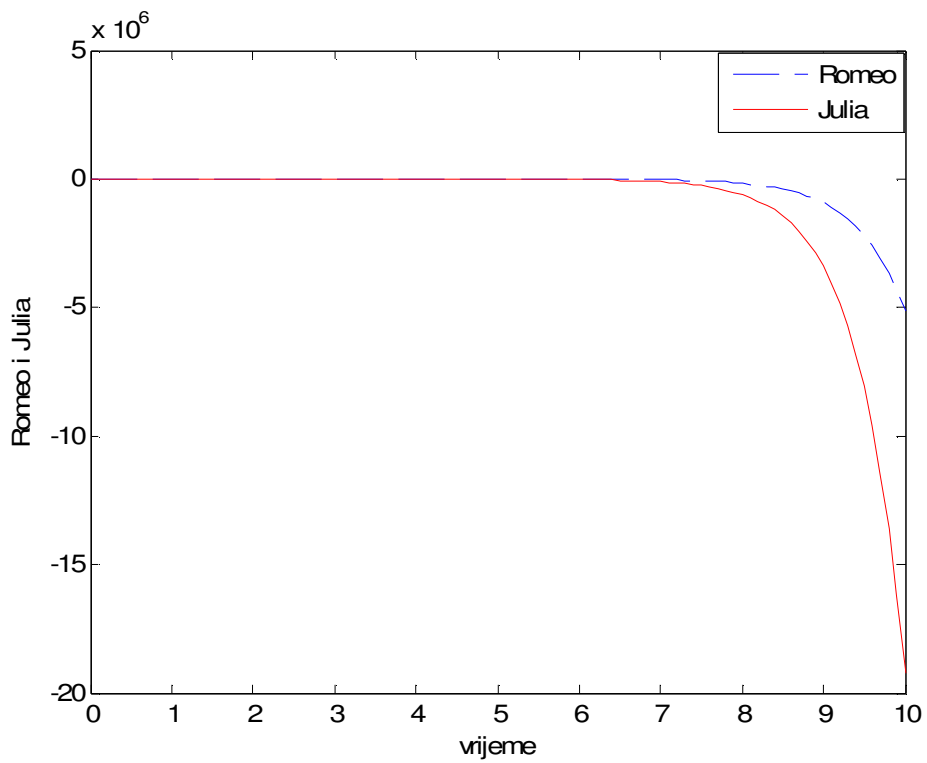
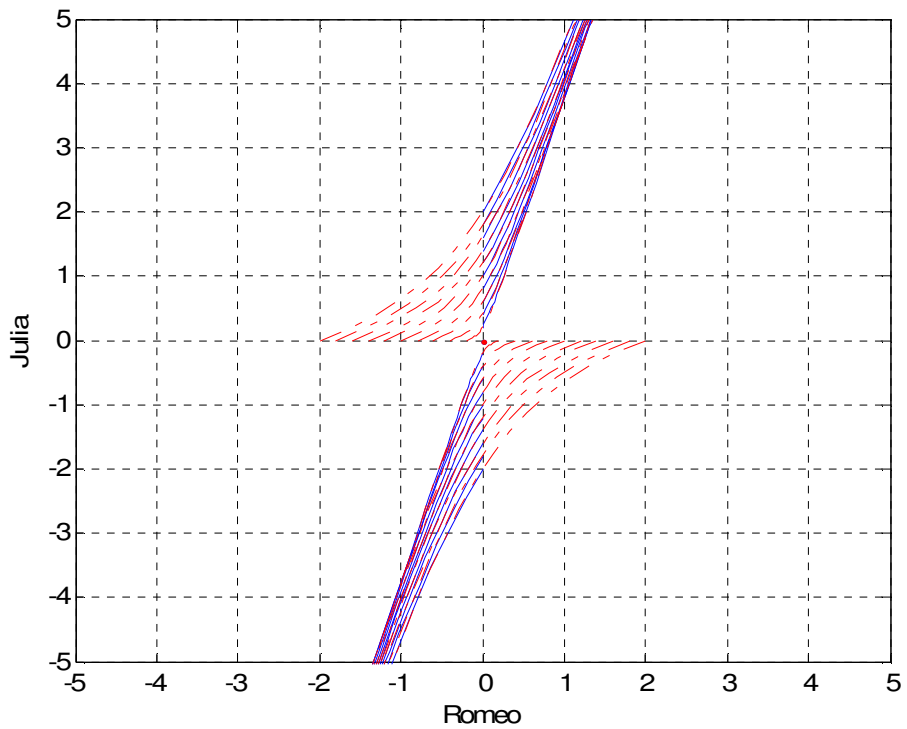
U ovom slučaju  $ab < 0$ , a parametri su  $a = -1$  i  $b = 1$ , i vrijedi da je  $c = -b$ ,  $d = -a$ , a slučaj prikazuje slika 19. U drugom slučaju uzeli smo vrijednost parametara  $a = 1$ ,  $b = -1$ , te također vrijedi da je  $c = -b$ ,  $d = -a$ , a slučaj je prikazan na slici 20. Iz slika 19. i 20. vidimo da ukoliko Romeova ljubav prema Juliji raste, tada raste i Julijina ljubav prema Romeu. S druge strane, kada Julija sve više voli Romea, tada i Romeovi njoj uzvraća istim osjećajima. Slike su slične iako se odnose na dvije različite situacije zbog toga što uzimamo različite vrijednosti parametara  $a$  i  $b$  za oba slučaja ali ostajemo pri uvjetu da je  $ab < 0$ . Za slike 21. i 22. radi se o istom odnosu Romea i Julije, međutim uzeti su različiti parametri (za sliku 21. uzeli smo da je  $a = 2$ ,  $b = -1$ , a za sliku 22. uzeli smo da je  $a = -2$ ,  $b = 1$ ).



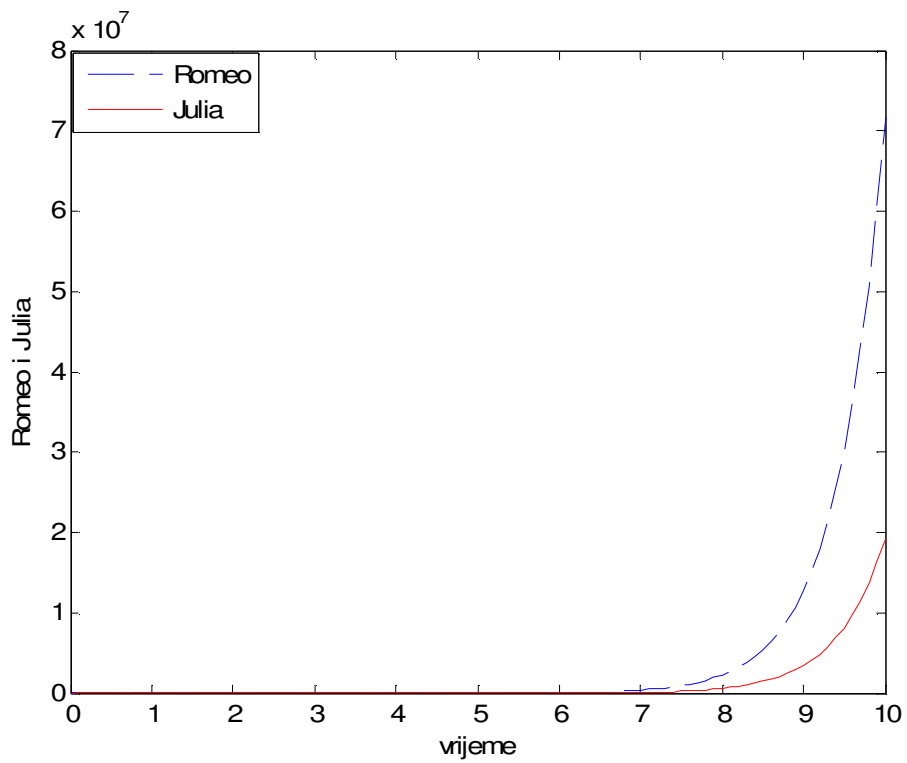
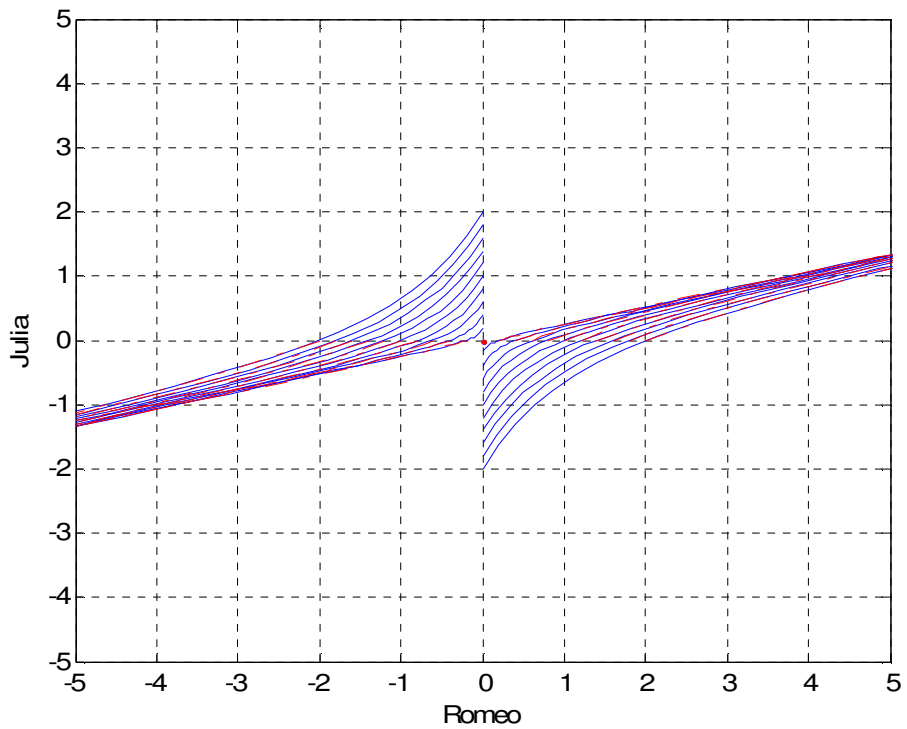
*Slika 19. Odnos narcis-ljubavnik za slučaj  $ab < 0$*



**Slika 20.** Odnos narcis-ljubavnik za slučaj  $a=1$ ,  $b=-1$



*Slika 21. Odnos narcis-ljubavnik za slučaj  $a=2, b=-1$*



*Slika 22. Odnos narcis-ljubavnik ua slučaj  $a=-2, b=1$*

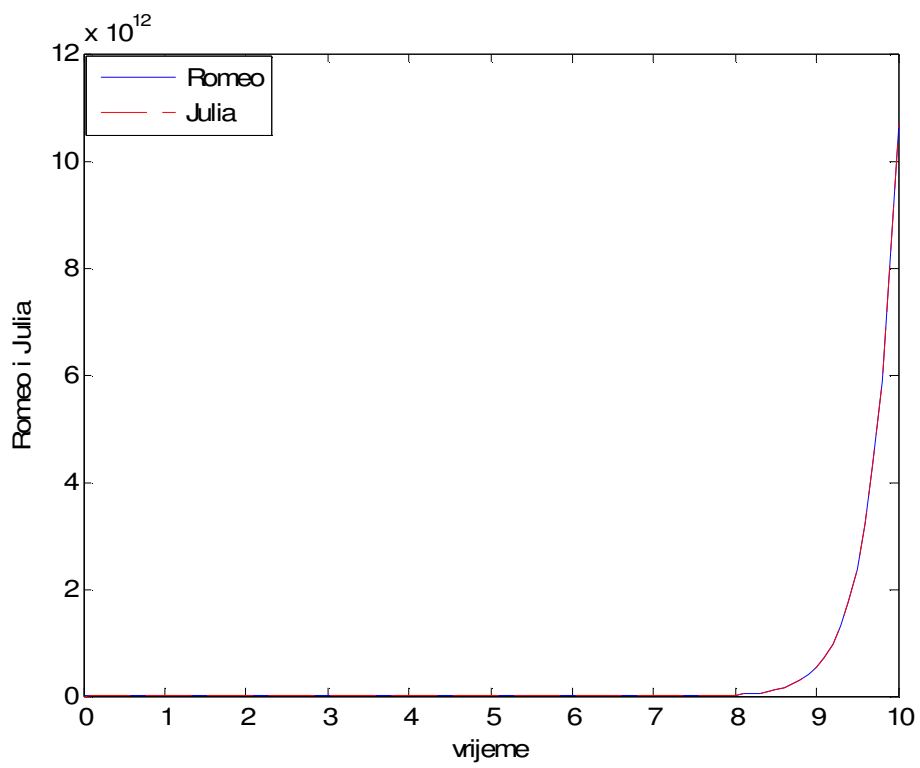
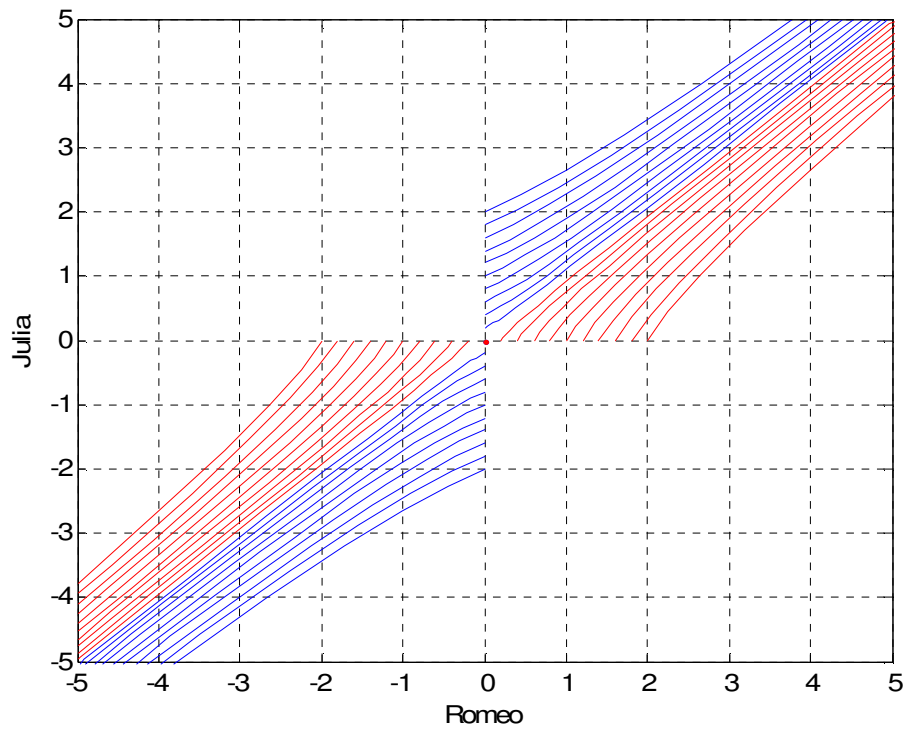
## 8. OSTALE KOMBINACIJE LJUBAVI I RAVNODUŠNI ROMEO

U ovom slučaju radi se o dva romantična klona i vrijedi da je  $c=b$  i  $d=a$ . Oprezni ljubavnici s  $lal < lbl$  i pohlepnik završe ili u ljubavi ili u mržnji, ovisno o početnim uvjetima. Pustinjaci s  $lal < lbl$  i narcisoidi završe tako da jedan voli, a drugi mrzi. Opreznim ljubavnici i pustinjaci s  $lal > lbl$  završe u stanju uzajamne ravnodušnosti. Također, postoji i slučaj kada je  $lal = lbl$ , ali takav slučaj nećemo razmatrati.

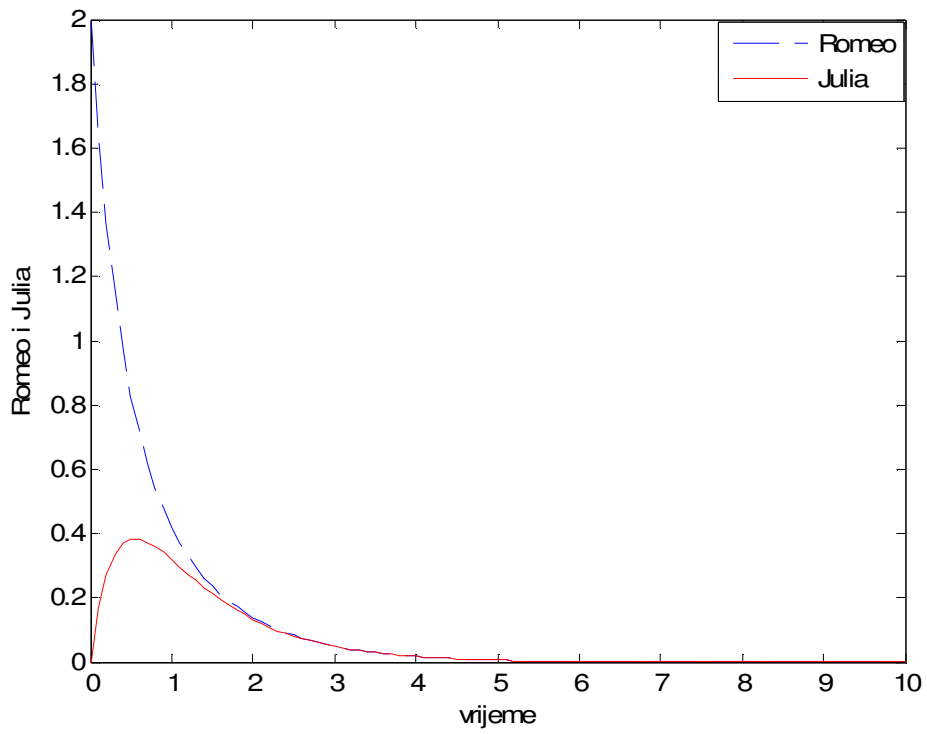
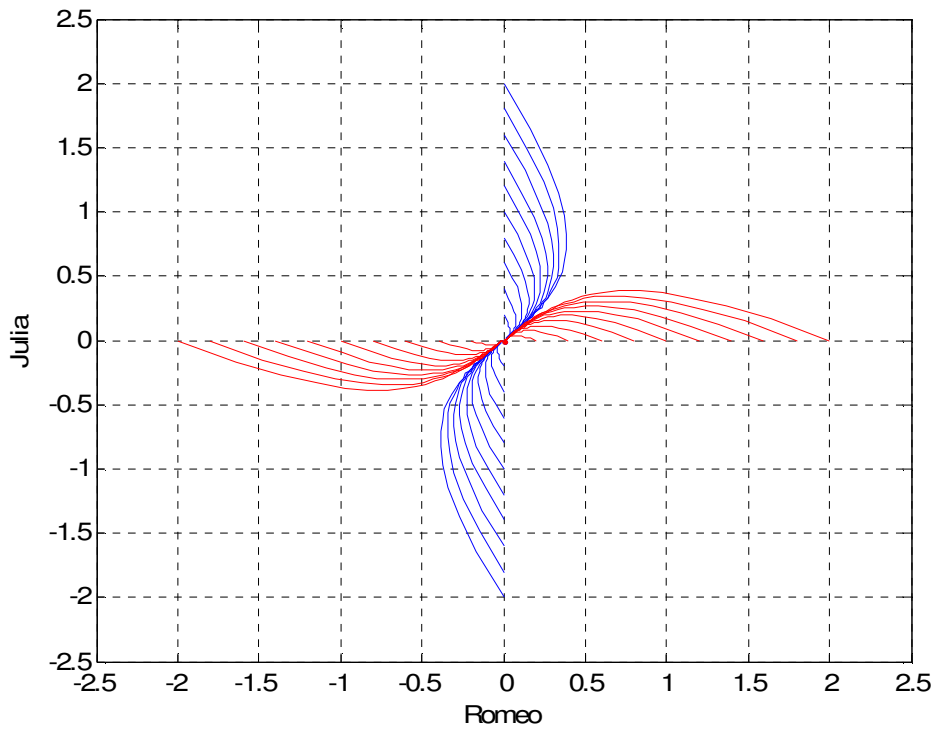
### 8.1. Ljubavnik i pohlepnik

Ako je  $lal < lbl$  tada govorimo o ljubavi ili sukobu, te također postoji više slučajeva ovisno o početnim uvjetima. Uzimamo slučaj u kojemu definiramo parametre  $lal=1$  i  $lbl=2$ , te vrijedi  $c=b$  i  $d=a$ , takav slučaj je prikazan na slici 23. Slika pokazuje da kada Romeova ljubav prema Juliji raste, tada raste i Julijina ljubav prema njemu, odnosno kada Julija mrzi Romea, i on osjeća isto prema njoj. Ako je  $lal > lbl$ , uzimamo slučaj u kojemu definiramo parametre  $lal=-2$  i  $lbl=1$  (slika 24.) i vidimo da u tome slučaju dolazi do apatije između Romea i Julije, odnosno trajektorije se približavaju nuli što govori da između njih dvoje nema nikakvih osjećaja.





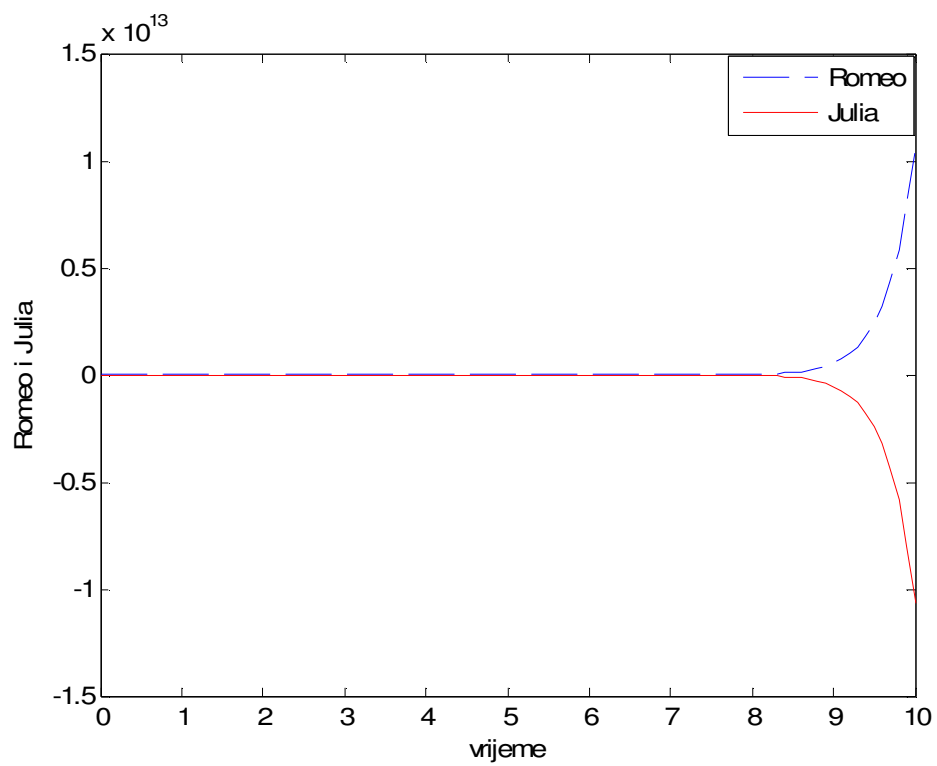
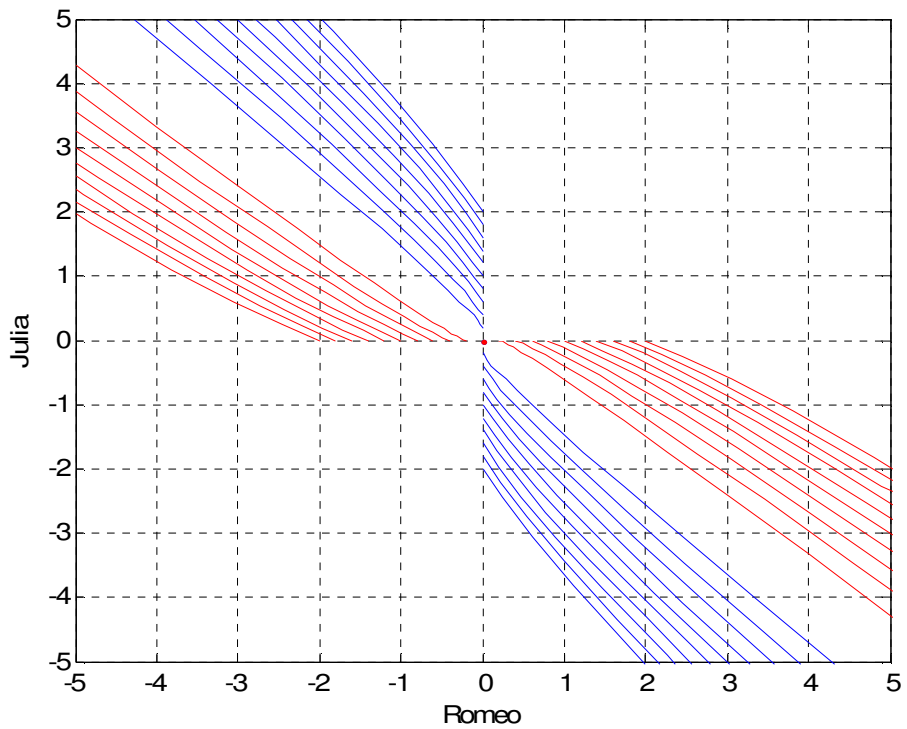
*Slika 23. Odnos ljubavnik-pohlepnik kada osjećaji uzajamno rastu*



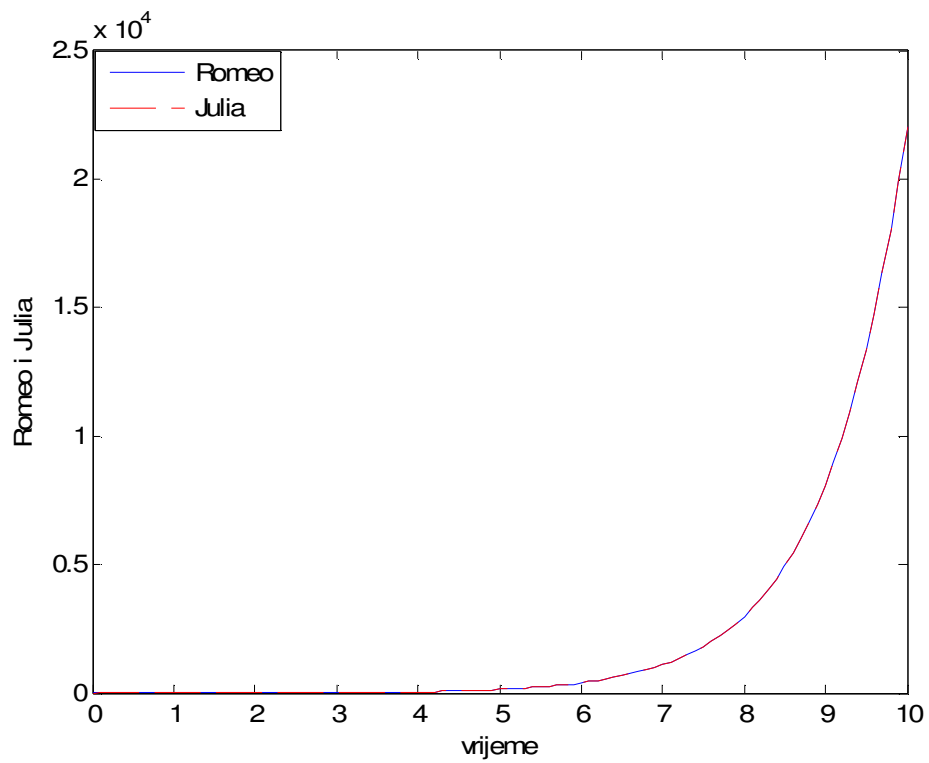
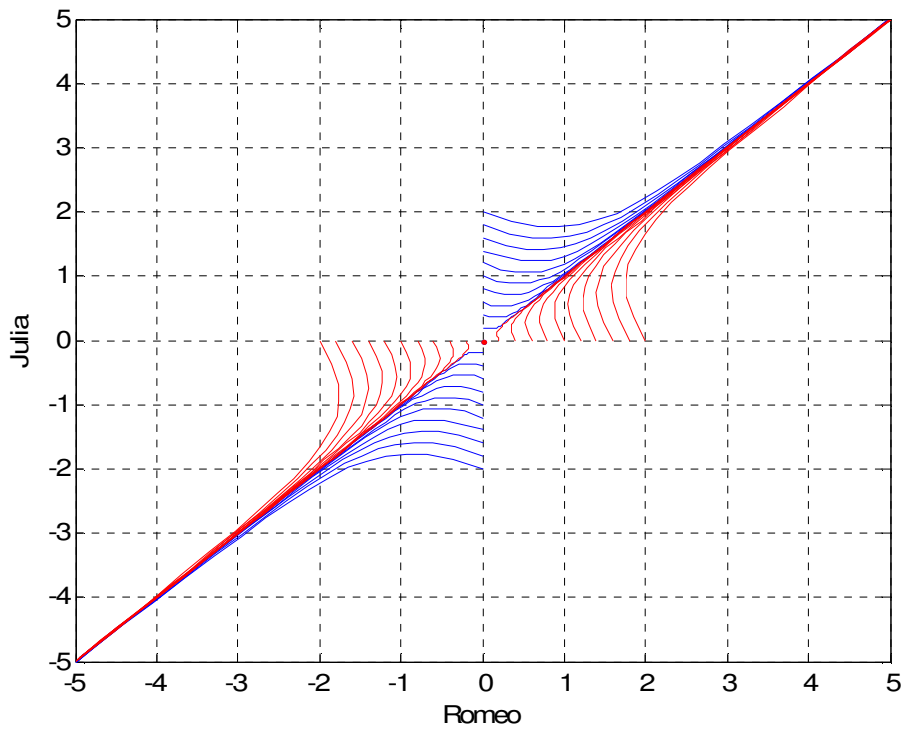
*Slika 24. Odnos ljubavnik-pohlepnik u slučaju apatije*

## 8.2. Ljubavnik i pustinjač

Ako je  $l_a > |l_b|$  tada nastupa stanje uzajamne ravnodušnosti. Uzimamo slučaj u kojemu definiramo parametre  $l_a = 2$  i  $l_b = -1$  te vrijedi  $c=b$  i  $d=a$ , takav slučaj je prikazan na slici 25. Iz slike vidimo da kada se Romeova ljubav prema Juliji povećava, tada se Julijina ljubav prema njemu smanjuje i obrnuto, ovisno o početnim uvjetima. U slučaju ako je  $l_a < |l_b|$ , uzeli smo vrijednost parametara  $a=-1$ ,  $b=2$  (slika 26.) i u tome slučaju vidimo da ukoliko Romeova ljubav prema Juliji raste, tada raste i Julijina ljubav prema Romeu. S druge strane, kada Julija sve više voli Romea, tada i Romeovi njoj uzvraća istim osjećajima.



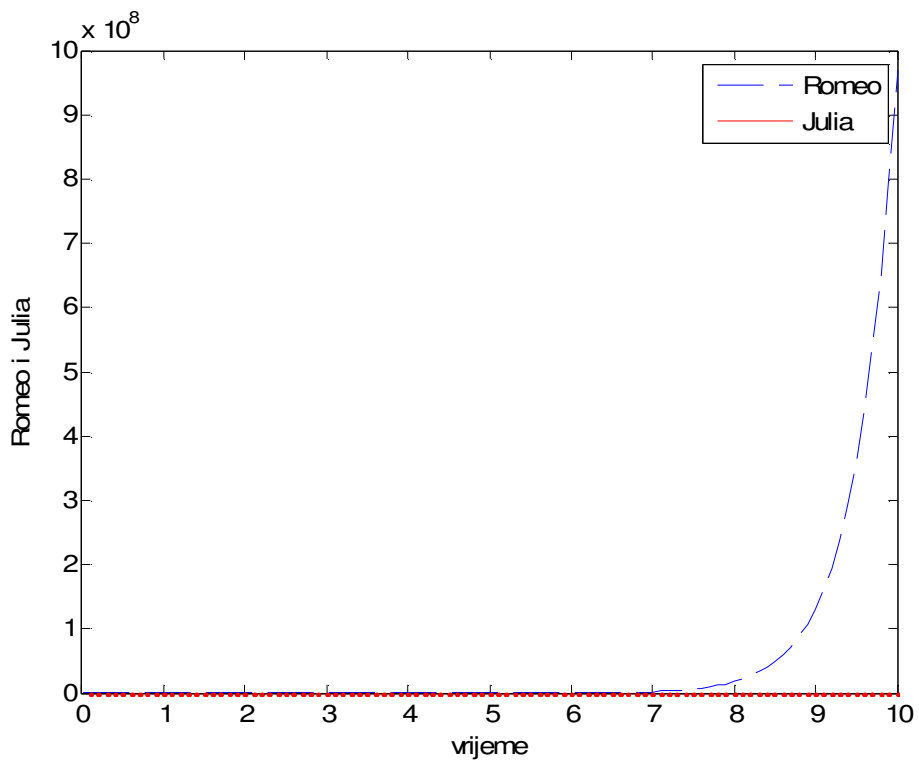
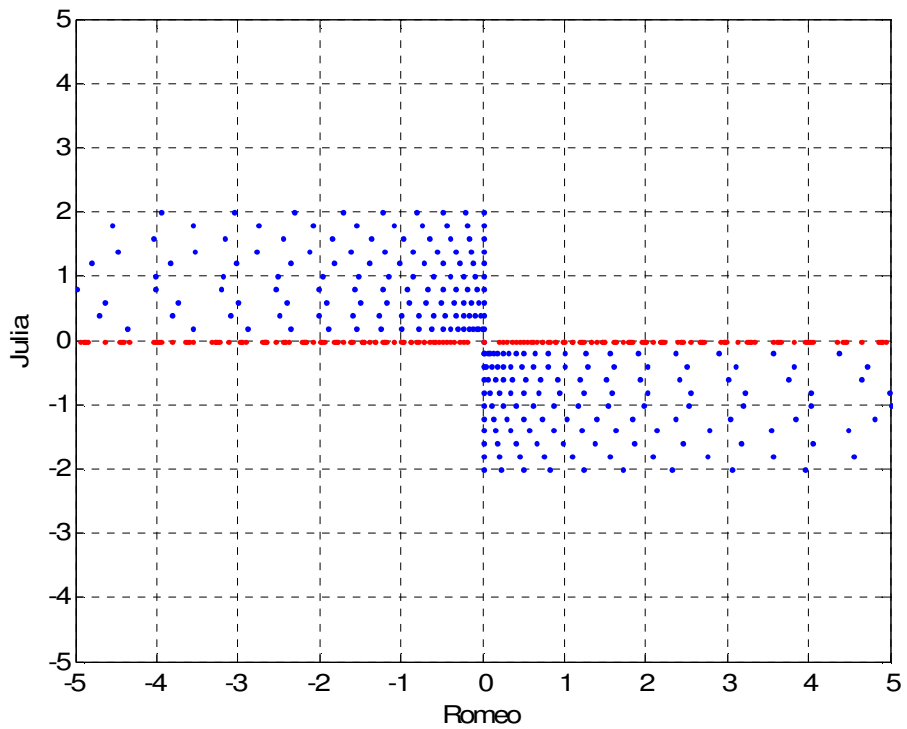
*Slika 25. Odnos ljubavnik-pustinjak za slučaj  $|a| > |b|$*



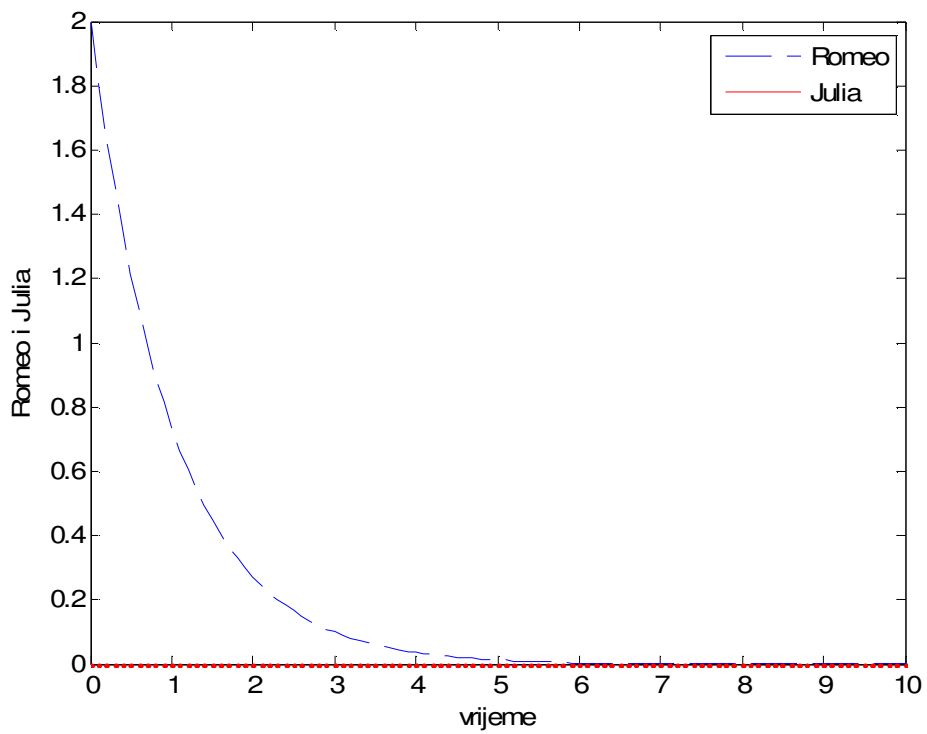
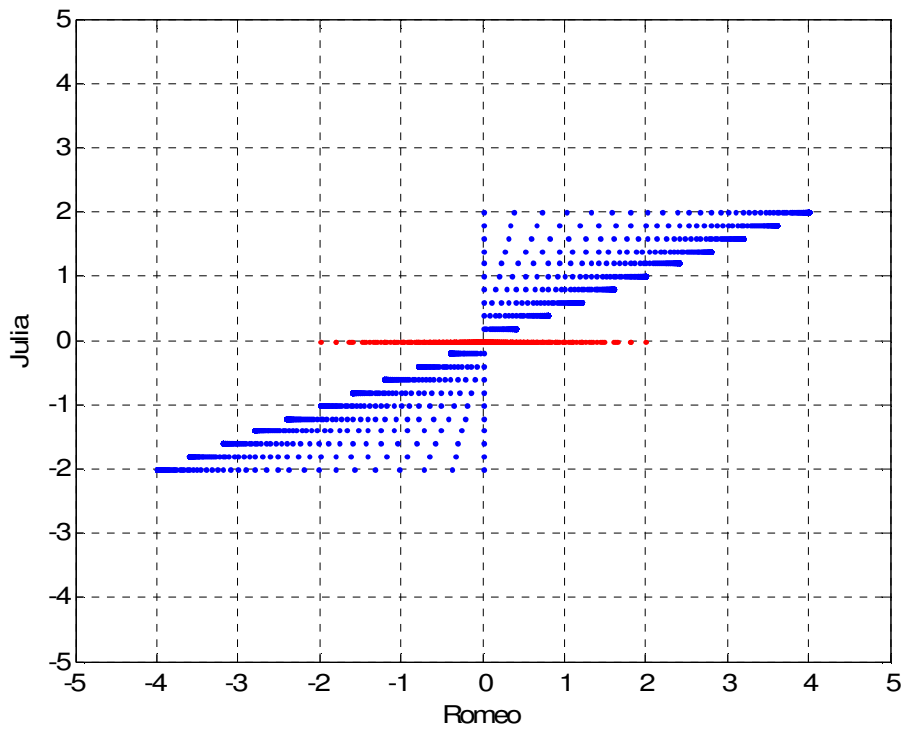
Slika 26. Odnos ljubavnik-pustinjak za slučaj  $|a| < |b|$

## 9. RAVNODUŠNI ROMEO

Ako pretpostavimo da na Romea ne utječu ni vlastiti osjećaji ( $a=0$ ), niti osjećaji koje prima od Julije ( $b=0$ ), tada je  $R$  konstanta, odnosno Romeova ljubav (ili mržnja) se ne mijenja. Izgled grafa će isključivo ovisiti o Julijinim osjećajima ako su njeni osjećaji prema Romeu snažniji od Romeovih osjećaja prema njoj (situacije prikazane na slikama 27. i 28.). Ako je  $|c| < |d|$  (slika 27.) uzeti su parametri  $c=-1$ ,  $d=2$ . Za drugi slučaj (slika 28.) kada je  $|c| > |d|$  uzeli smo parametre  $c=2$ ,  $d=-1$ .



Slika 27. Ravnodušni Romeo za slučaj  $|c| < |d|$



Slika 28. Ravnodušni Romeo za slučaj  $|c| > |d|$



## 10. ZAKLJUČAK

U radu smo opisivali različite odnose Romea i Julije pomoću matematičkog sustava od dvije linearne jednadžbe.

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= aR + bJ \\ \frac{dJ}{dt} &= cR + dJ\end{aligned}\tag{5}$$

Iako jednostavan, linearan model ljubavi pokazao je iznimno složenu dinamiku. Svakom promjenom parametara dobiva se nova situacija u odnosu Romea i Julije. U radu smo grafički prikazali različite kombinacije "ljubavnih stilova" pomoću modela u programskom paketu *Matlab7.*, te smo promatrali promjene Romeovih i Julijinih osjećaja u vremenu, ovisno o početnim uvjetima.

## 11. LITERATURA

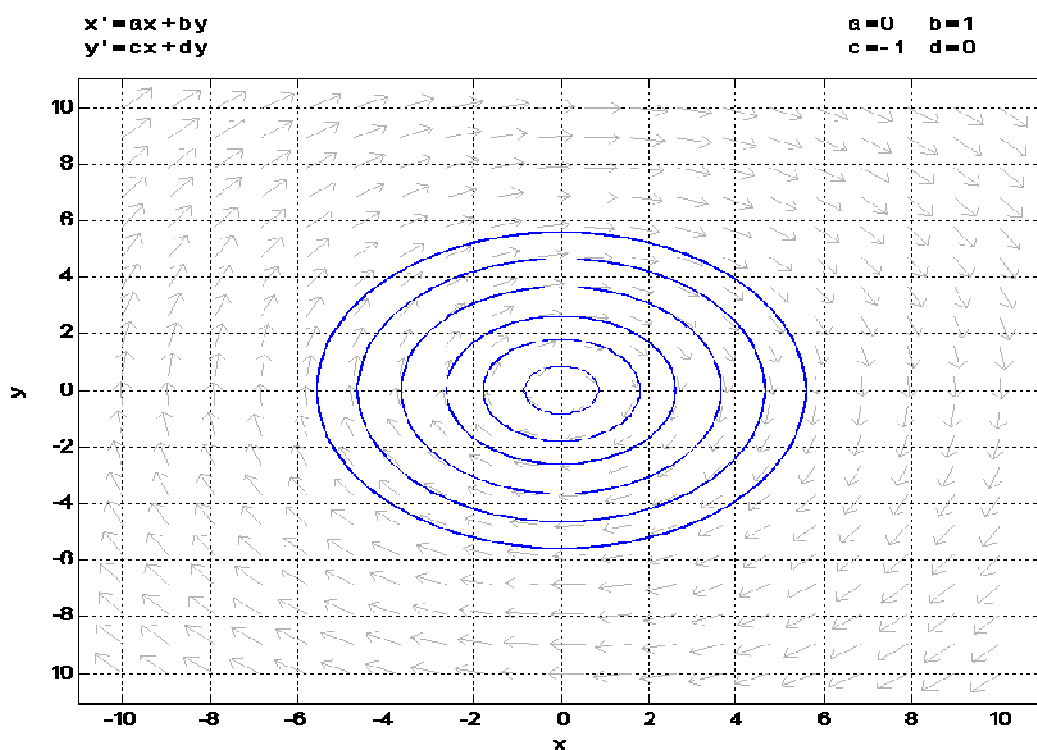
1. Sprott, J.C.: Dynamical Models of Love; Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences, Vol. **8**, No.3, July, 2004.
2. Sprott, J.C.: Dynamical Models of Happiness; Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences, Vol. **9**, No.1, January, 2005.
3. Interna skripta: Uvod u matematičke metode u inženjerstvu
4. R. J. Sternberg. *Love Is a Story: A New Theory of Relationships*. Oxford University Press, USA, 1999.
5. S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics And Chaos With Applications To Physics, Biology, Chemistry And Engineering*. Perseus Books, 1994

## 12. PRILOG

Prilog1.: Slučaj bez utjecaja vlastitih osjećaja u kojem je prikazano usmjerenje trajektorija;  
Narcis i ljubavnik:  $b > 0$  i  $c < 0$ , vrijednost parametara  $a=0$ ,  $b=1$  i  $c=-1$ ,  $d=0$ .

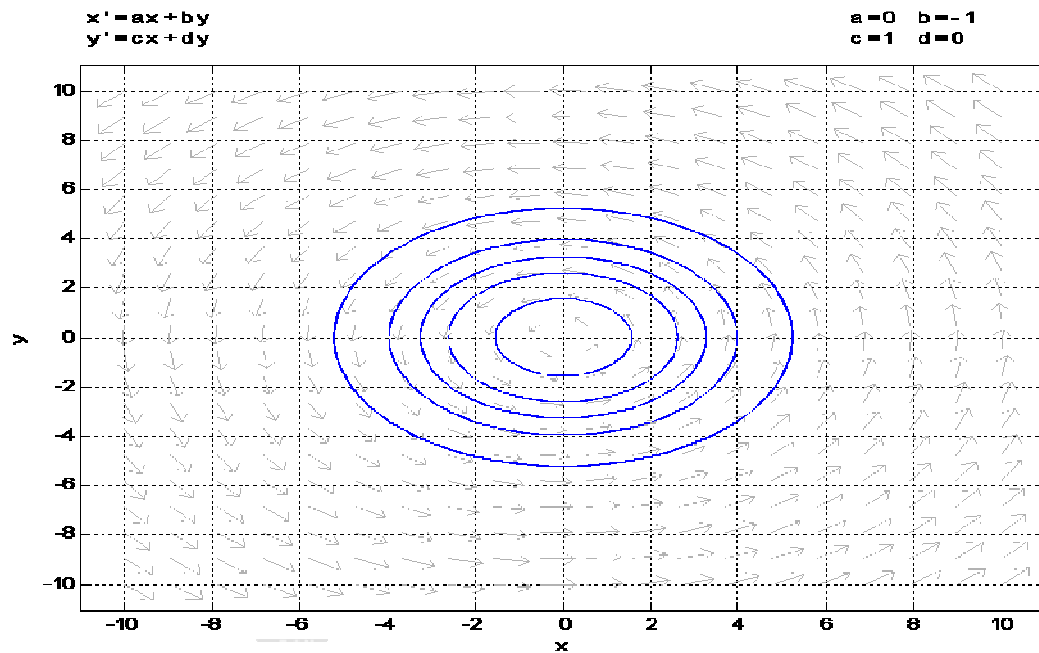
Prilog2.: Slučaj bez utjecaja vlastitih osjećaja u kojem je prikazano usmjerenje trajektorija;  
Narcis i ljubavnik:  $b < 0$  i  $c > 0$  uzimamo vrijednost parametara  $a=0$ ,  $b=-1$ ,  $c=1$ ,  $d=0$ .

Prilog1.



Slika 29. Narcis i ljubavnik:  $b > 0$  i  $c < 0$ , vrijednost parametara  $a=0$ ,  $b=1$  i  $c=-1$ ,  $d=0$ .

Prilog 2.



Slika 30. Narcis i ljubavnik:  $b < 0$  i  $c > 0$  uzimamo vrijednost parametara  $a=0$ ,  $b=-1$ ,  $c=1$ ,  $d=0$ .