FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE
SVEUČILIŠNI DIPLOMSKI STUDIJ PRIMIJENJENA KEMIJA
ZAVOD ZA MATEMATIKU

JEDNODIMENZIONALNA TOPLINSKA JEDNADŽBA

Voditelj kolegija: dr. sc. Ivica Gusić, red. prof.

Studenti: Tomislav Suhina, Leo Mandić

Zagreb, srpanj 2011.

SADRŽAJ

1. PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE – OSNOVNI POJMOVI

Parcijalna diferencijalna jednadžba (*partial differential equation*, PDE) jest jednadžba koja uključuje jednu ili više parcijalnih derivacija (nepoznate) funkcije, primjerice *u*, koja ovisi o dvije ili više varijabli, često o vremenu *t* i jednoj ili više varijabli prostora. Red najviše derivacije se naziva redom parcijalne diferencijalne jednadžbe. U primjenama su najvažnije PDE drugog stupnja.

Kao i za obične diferencijalne jednadžbe, i za PDE se kaže da je linearna ako je prvog reda i u zavisnoj varijabli i u njezinim parcijalnim derivacijama. Ako svaki član takve jednadžbe sadrži ili zavisnu varijablu ili jednu od njenih derivacija, za jednadžbu se kaže da je homogena. U suprotnom je nehomogena.

Važne parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda su:

JEDNODIMENZIONALNA VALNA JEDNADŽBA: $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1.1)$$

JEDNODIMENZIONALNA TOPLINSKA JEDNADŽBA: $$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1.2)$$

DVODIMENZIONALNA LAPLACEOVA JEDNADŽBA: $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (1.3)$$

DVODIMENZIONALNA POISSONOVA JEDNADŽBA: $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y) \qquad (1.4)$$

DVODIMENZIONALNA VALNA JEDNADŽBA: $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (1.5)$$

DVODIMENZIONALNA LAPLACEOVA JEDNADŽBA: $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (1.6)$$

Ovdje je *c* pozitivna konstanta, *t* je vrijeme, *x*, *y* i *z* su Kartezijeve koordinate, a dimenzija je broj tih koordinata u jednadžbi.

Rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe u nekom području *R* prostora nezavisnih varijabli jest funkcija koja ima sve parcijalne derivacije koje se pojavljuju u PDE u nekoj domeni *D* koja sadrži *R*, te zadovoljava PDE bilo gdje u *R*.

Često se zahtijeva da je funkcija neprekidna na rubovima *R*, ima te derivacije unutar *R*, te da zadovoljava PDE unutar *R*. Postavljanjem da *R* leži u *D* pojednostavljuje se situacija s obzirom na derivacije na granici samog područja *R*, pa je isto i na granici kao i unutar *R*.

Općenito, parcijalne diferencijalne jednadžbe imaju vrlo velik broj različitih rješenja. Primjera radi, rješenja jednadžbe (1.3) su sljedeća:

$$u = x^2 + y^2$$

$$u = e^x \cos y$$

$$u = \sinh x \cosh y$$

$$u = \ln (x^2 + y^2)$$

Jedinstveno rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe, koje ima veze s odgovarajućim fizikalnim problemom, može se dobiti korištenjem dodatnih uvjeta koji proizlaze iz problema. To može biti uvjet da rješenje *u* poprima dane vrijednosti na rubu područja *R* (granični uvjeti), ili pak, ako je vrijeme *t* jedna od varijabli, *u* (ili $u_t = {\partial u}/{\partial t}$ ili oboje) mogu biti propisani za $t = 0$ (početni uvjeti).

2. JEDNODIMENZIONALNA TOPLINSKA JEDNADŽBA – RJEŠAVANJE FOURIEROVIM REDOVIMA

(Izlaganje prema knjizi [1])

Toplinska jednadžba u najopćenitijem obliku glasi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u, \qquad c^2 = \frac{K}{\sigma\rho} \tag{2.1}$$

Jednadžba daje temperaturu $u(x, y, z, t)$ u tijelu sačinjenom od homogenog materijala. U ovom slučaju je c^2 toplinska difuzivnost, K je toplinska vodljivost, σ specifična toplina, te ρ kao gustoća materijala od kojeg je tijelo sačinjeno. $\nabla^2 u$ je laplasijan veličine u, a može se napisati i kao:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{2.2}$$

Jednadžba (2.1) naziva se i difuzijskom jednadžbom.

Jedna od najvažnijih primjena jest ona u kojoj se razmatra temperatura u dugačkom i tankom metalnom štapu ili žici konstantnog poprečnog presjeka i homogenosti materijala. Neka je štap orijentiran duž x-osi i lateralno (bočno) savršeno izoliran tako da toplina teče samo u smjeru osi x (slika 1.).

Slika 1. Štap koji se razmatra.

Tada *u* ovisi samo o *x* i vremenu *t*, pa trodimenzionalna toplinska jednadžba (2.1) prelazi u jednodimenzionalnu toplinsku jednadžbu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.3}$$

Iako se ova jednadžba ne razlikuje puno od valne jednadžbe (1.1), no njihova rješenja su poprilično različita.

Jednadžba (2.3) se može riješiti. U ovom slučaju će biti razmotreno njezino rješavanje za neke važne tipove rubnih i početnih uvjeta. Za početak se razmatra slučaj kad je na rubovima štapa ($x = 0$ i $x = L$) temperatura jednaka nuli, pa imamo rubne uvjete:

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad \forall\ t \geq 0 \tag{2.4}$$

Nadalje, početna temperatura u štapu na položaju *x* pri vremenu $t = 0$ dana je i iznosi $f(x)$, pa postoji i početni uvjet:

$$u(x,0) = f(x) \tag{2.5}$$

Dakle, zbog jednadžbe (2.4) vrijedi $f(0) = 0$ i $f(L) = 0$.

Može se odrediti rješenje $u(x,t)$ jednadžbe (2.3) poštujući uvjete (2.4) i (2.5). Dovoljan je jedan početni uvjet, za razliku od valne jednadžbe gdje su potrebna dva.

Prvi korak je dobivanje dvije obične diferencijalne jednadžbe iz jednadžbe (2.3). Supstitucija umnoška $u(x,t) = F(x)G(t)$ u (2.3) daje $F\dot{G} = c^2F''G$, gdje je $\dot{G} = {dG}/{dt}$ i $F'' = {d^2F}/{dx^2}$. Nakon dijeljenja sa c^2FG, separacijom varijabli se dobije:

$$\frac{\dot{G}}{c^2G} = \frac{F''}{F} \tag{2.6}$$

Lijeva strana ovisi samo o *t*, a desna samo o *x*, stoga obje strane moraju biti jednake konstanti *k*. Za *k* veći ili jednak nuli jedino rješenje *u* jest jednako nuli. Za negativni $k = -p^2$ jednadžba (2.6) glasi:

$$\frac{\dot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = -p^2$$

Množenjem s nazivnicima dobiju se dvije obične diferencijalne jednadžbe:

$$F'' + p^2 F = 0 \tag{2.7}$$

$$\dot{G} + c^2 p^2 G = 0 \tag{2.8}$$

Drugi korak je zadovoljavanje rubnih uvjeta (2.4). Opće rješenje jednadžbe (2.7) jest:

$$F(x) = A\cos px + B\sin px \tag{2.9}$$

Iz rubnih uvjeta (2.4) slijedi da je:

$$u(0,t) = F(0)G(t) = 0 \qquad i \qquad u(L,t) = F(L)G(t) = 0$$

Budući da bi $G \equiv 0$ (to jest, $G(t) = 0$ za sve t) dalo za posljedicu $u \equiv 0$, potrebno je $F(0) = 0$ i $F(L) = 0$. Dobije se $F(0) = A = 0$ i $F(L) = B \sin pL = 0$, s tim da je $B \neq 0$ da se izbjegne $F \equiv 0$. Stoga je:

$$\sin pL = 0 \quad \rightarrow \quad p = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Postavljajući $B = 1$, dobiju se sljedeća rješenja jednadžbe (2.7) koja zadovoljavaju (2.4):

$$F_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Slijedi rješavanje jednadžbe (2.8). Za $p = \frac{n\pi}{L}$, (2.8) postaje:

$$\dot{G} + \lambda_n{}^2 G = 0, \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$$

Opće rješenje takve jednadžbe glasi (B_n je konstanta):

$$G_n(t) = B_n\, e^{-\lambda_n{}^2 t} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Funkcije kao rješenja toplinske jednadžbe, uz zadovoljavanje rubnih uvjeta, glase:

$$u_n(x,t) = F_n(x) G_n(t) = B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\lambda_n{}^2 t} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.10}$$

To su vlastite funkcije problema s odgovarajućim vlastitim vrijednostima (eigenvrijednostima) $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$.

Treći korak je rješenje cijelog problema uz pomoć Fourierovih nizova. Da bi se dobilo rješenje koje će, osim rubnih uvjeta, zadovoljavati i početni uvjet (2.5), razmatra se red sastavljen od funkcija $u_n(x, t)$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\lambda_n{}^2 t} \tag{2.11}$$

Traže se konstante B_n tako da $u(x, t)$ zadovoljava i početne uvjete (lako se provjeri da $u(x, t)$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu i rubne uvjete).

Iz (2.11) i (2.4) dobije se:

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

Prema tome, da bi funkcija (2.11) zadovoljavala (2.5), brojevi B_n moraju biti koeficijenti Fourierovog sinusoidnog reda. Stoga vrijedi:

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (2.12)$$

To proizlazi iz teorije [1, str. 555]

Rješenje stoga glasi:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right)\sin\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\lambda_n{}^2 t} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Ovo rješenje dobiva se uz pretpostavku da je $f(x)$ kontinuirana po dijelovima na intervalu $0 \leq x \leq L$ i da ima jednostrane derivacije u svim nutarnjim točkama tog intervala – pod tim pretpostavkama red (2.11) s koeficijentima (2.12) rješenje je fizikalnog problema.

Zbog eksponencijalnog faktora, svi se članovi u (2.11) približavaju nuli kako vrijeme teži beskonačnosti.

3. JEDNODIMENZIONALNA TOPLINSKA JEDNADŽBA – RJEŠAVANJE FOURIEROVIM INTEGRALIMA I TRANSFORMACIJAMA

U prethodnom odjeljku diskutirana je jednodimenzionalna toplinska jednadžba za slučaj kada imamo štap konačne duljine. U slučaju štapa beskonačnih duljina (odnosno vrlo dugačkih štapova), Fourierove redove potrebno je zamijeniti Fourierovim integralima.

Za primjer upotrebe integrala zamislimo da imamo beskonačno dugačak štap koji se iz beskonačnosti proteže u beskonačnost (izoliran je kao i ona u prethodnom slučaju). Sada nemamo rubnih uvjeta, imamo samo početni uvjet:

$$u(x,0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty \tag{3.1}$$

gdje je *f(x)* zadana početna temperatura štapa, odnosno žice. Da bi riješili ovaj problem, separiramo varijable:

$$u(x,t) = F(x)G(t) \tag{3.2}$$

Analognim postupkom kao prije, dobivamo dvije jednadžbe:

$$F'' + p^2F = 0 \tag{3.3}$$

$$G' + c^2p^2G = 0 \tag{3.4}$$

Njihovim rješavanjem dobivamo sljedeće izraze (općenita rješenja):

$$F(x) = A\cos px + B\sin px \tag{3.5}$$

$$G(t) = e^{-c^2p^2t} \tag{3.6}$$

Ovdje A i B predstavljaju proizvoljne konstante. Kao konačno općenito rješenje (2.3) dobivamo:

$$u(x,t;p) = FG = (A\cos px + B\sin px)e^{-c^2p^2t} \tag{3.7}$$

Ovdje smo bili prisiljeni uzeti negativnu separacijsku konstantu ($k = -p^2$) jer bi u protivnom funkcija (3.7) bila rastuća, što nema fizikalnog smisla.

Upotreba Fourierovih integrala

S obzirom da se za $f(x)$ u (3.2) ne pretpostavlja periodičnost, ne upotrebljavaju se Fourierovi redovi, već Fourierovi integrali [1, str. 563]. Nadalje, A i B u (3.7) su proizvoljni pa ih možemo smatrati funkcijama od p i pisati $A = f(p)$ i $B = B(p)$. Budući da je toplinska jednadžba

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{dx^2} \tag{3.8}$$

linearna i homogena jednadžba,

$$u(x,t) = \int_0^\infty u(x,t;p)dp = \int_0^\infty \left[A(p)\cos px + B(p)\sin px\right]e^{-c^2p^2t}dp \tag{3.9}$$

je rješenje (3.8), uz uvjet da ovaj integral postoji i može se dva puta diferencirati s obzirom na x i jednom s obzirom na t.

Određivanje $A(p)$ i $B(p)$ iz početnog uvjeta. Iz (3.9) i (3.1) možemo dobiti:

$$u(x,0) = \int_0^\infty \left[A(p)\cos px + B(p)\sin px\right]dp = f(x) \tag{3.10}$$

Ovo daje $A(p)$ i $B(p)$ u zavisnosti o $f(x)$. Zaista, primjenom izraza:

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv \, dv \tag{3.11}$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv \, dv \tag{3.12}$$

možemo dobiti:

$$A(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos pv \, dv \tag{3.13}$$

$$B(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin pv \, dv \tag{3.14}$$

Fourierov integral (3.10) s ovim $A(p)$ i $B(p)$ može se napisati u obliku:

$$u(x,0) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(px - pv) dv \right] dp \tag{3.15}$$

Na sličan način, izraz (3.9) postaje

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos(px - pv) e^{-c^2 p^2 t} dv \right] dp \tag{3.16}$$

Ako pretpostavimo da možemo promijeniti redosljed integracije, dobivamo:

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \left[\int_{0}^{\infty} e^{-c^2 p^2 t} \cos(px - pv) dp \right] dv \tag{3.17}$$

Sada je moguće izračunati unutarnji integral upotrebom formule:

$$\int_0^\infty e^{-s^2} \cos 2bs\; ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2} \tag{3.18}$$

Ovo poprima oblik našeg unutarnjeg integrala ako za p uzmemo $p = s/(c\sqrt{t})$ kao novu integracijsku varijablu i upotrijebimo:

$$b = \frac{x-v}{2c\sqrt{t}} \tag{3.19}$$

Tada je $2bs = (x-v)p$ i $ds = c\sqrt{p}dp$ pa izraz (3.18) poprima oblik:

$$\int_0^\infty e^{-c^2p^2t} \cos(px - pv)dp = \frac{\sqrt{\pi}}{2c\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}\right] \tag{3.20}$$

Stavljanjem ovog izraza u (3.17) dobijemo:

$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \exp\left[-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}\right] dv \tag{3.21}$$

Ako uzmemo $z = (v-x)/(2c\sqrt{t})$ kao alternativnu varijablu integracije, dobivamo alternativni oblik jednadžbe:

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + 2cz\sqrt{t}) e^{-z^2} dz \tag{3.22}$$

Ova funkcija predstavlja rješenje za naš slučaj.

4. PRIMJERI (MATHEMATICA)

Na sljedećim slikama je prikazano rješenje toplinske jednadžbe za jednodimenzionalan štap. Štap je na početku uronjen u kupelj temperature 100 °C i savršeno je izoliran, osim na krajevima, gdje se temperatura drži konstantnom na 0 °C. Radi se o Sturm – Liouvilleovom problemu graničnih vrijednosti za jednodimenzionalnu toplinsku jednadžbu:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u\ (x,t)}{\partial x^2} = 0,$$

s graničnim uvjetima $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$ i $u(x, 0) = f(x)$, gdje je t vrijeme, x udaljenost duž štapa, L je duljina štapa, a $f(x)$ je u ovom slučaju 100 (konstantna funkcija).

Rješenje ima oblik (funkcija (2.11)):

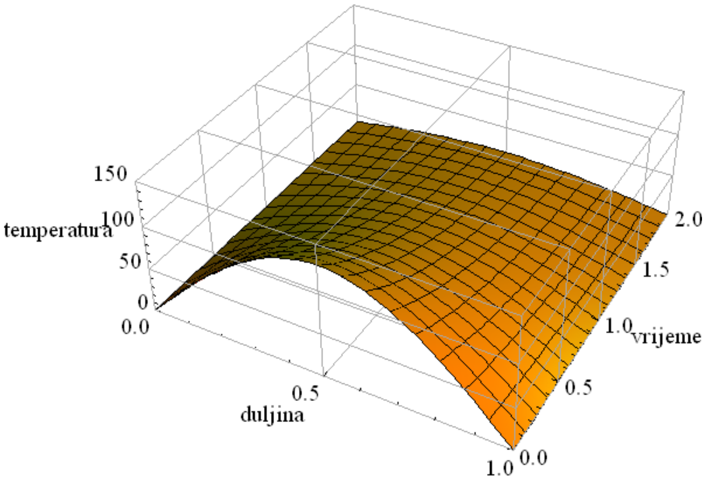
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}$$

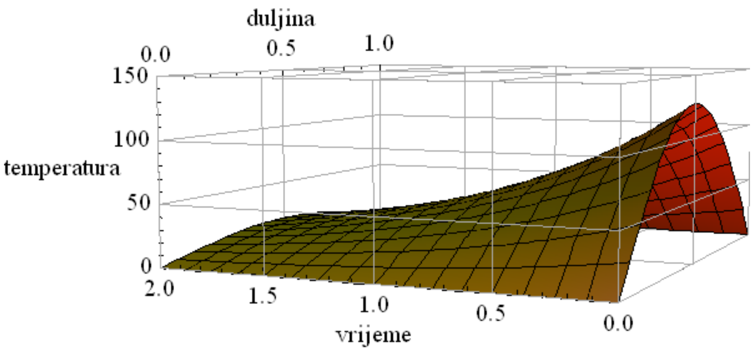
gdje je c^2 parametar provodljivosti (proizlazi iz gustoće, toplinske provodljivosti i specifične topline štapa) i:

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx.$$

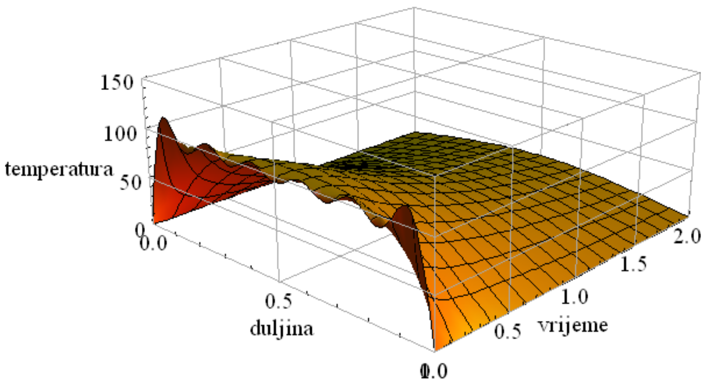
Ukoliko se povećava broj članova n, rješenje se poboljšava za male vrijednosti vremena t. Kako vrijeme teži beskonačnosti (konačno stanje), tako cijeli štap poprima temperaturu 0 °C (dolazi do hlađenja štapa). Mijenjajući parametar provodljivosti c^2, može se pratiti učinak toplinskih svojstava.

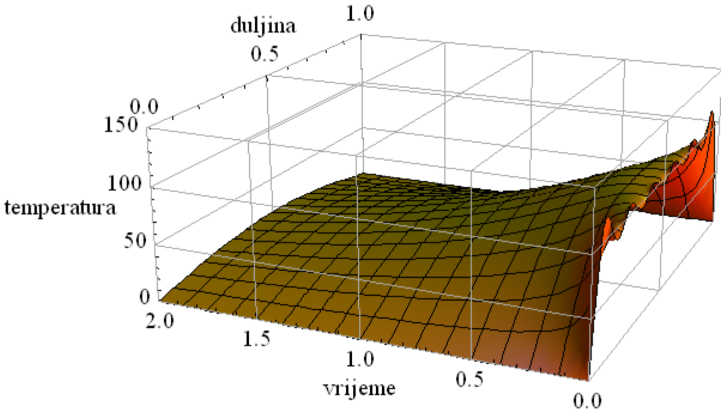
Prvi slučaj → $c^2 = 0.1$ i $n = 1$ (slučaj kada Fourierov red (2.11) ima jedan član)



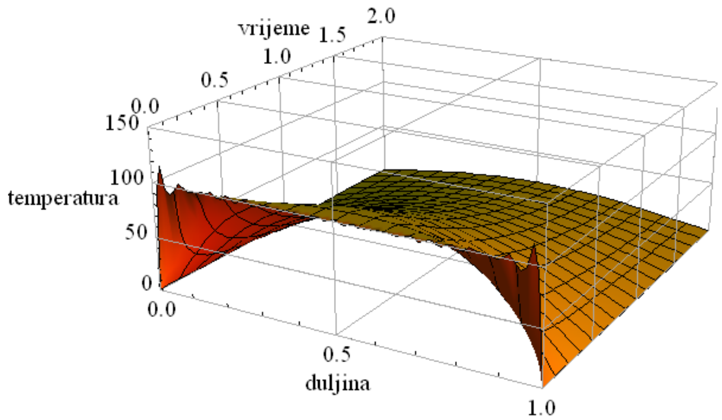


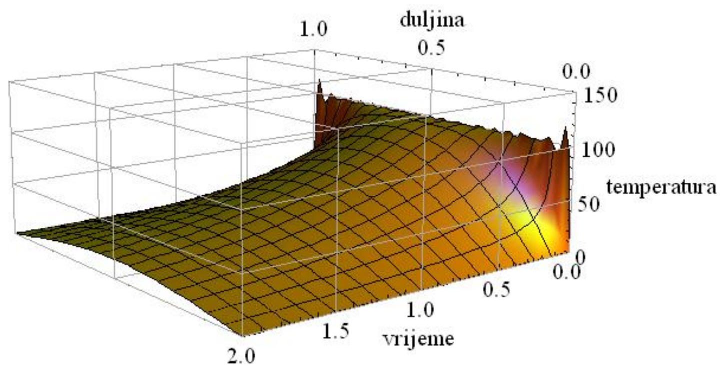
Drugi slučaj → $c^2 = 0.1$ i $n = 11$ (slučaj kada Fourierov red (2.11) ima 11 članova)





Treći slučaj → c^2 = 0.1 i n = 41 (slučaj kada Fourierov red (2.11) ima 41 član)

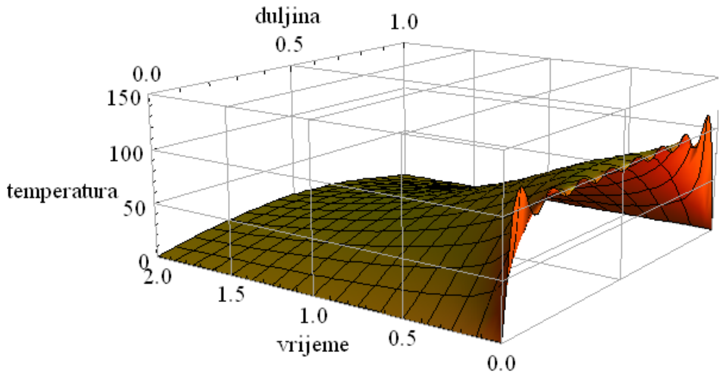


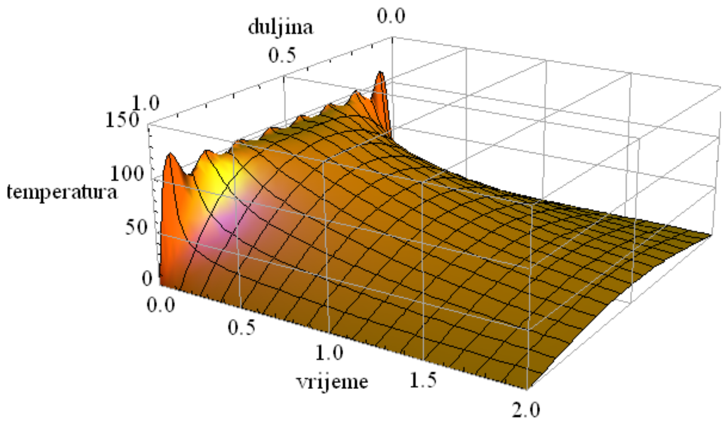


Kako se povećava broj članova, tako se rješenje doista poboljšava (zbog povećanja broja članova n Fourierovog reda (2.11)) za konstantan c^2 kad je vrijeme maleno. Vidljivo je da je temperatura duž cijelog štapa u trećem slučaju najbolje opisana i blizu je 100 °C duž cijelog štapa, dok prvi slučaj, s druge strane, pokazuje da centralni dio štapa ima temperaturu oko 120 °C, što nije realno.

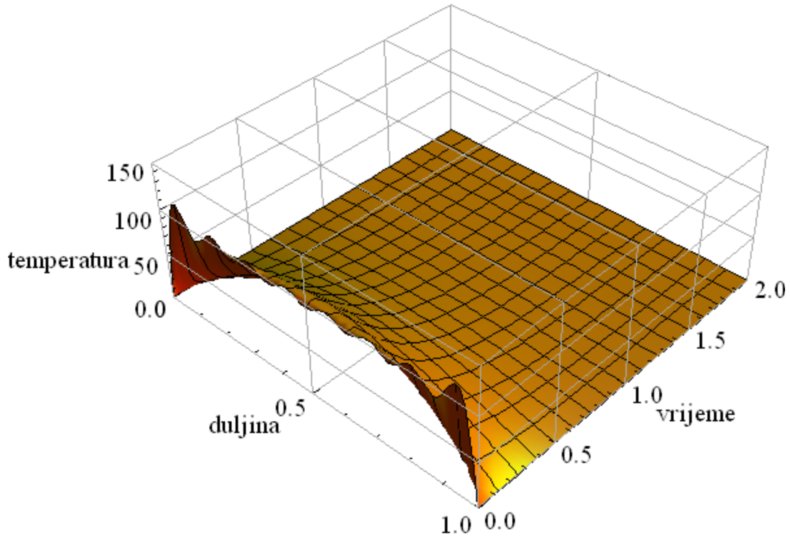
Sad ćemo razmotriti promjenu parametra c^2 uz konstantan n.

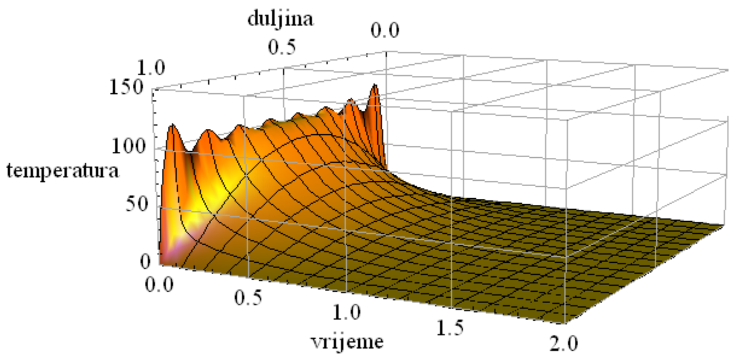
Četvrti slučaj → c^2 = 0.1 i n = 15



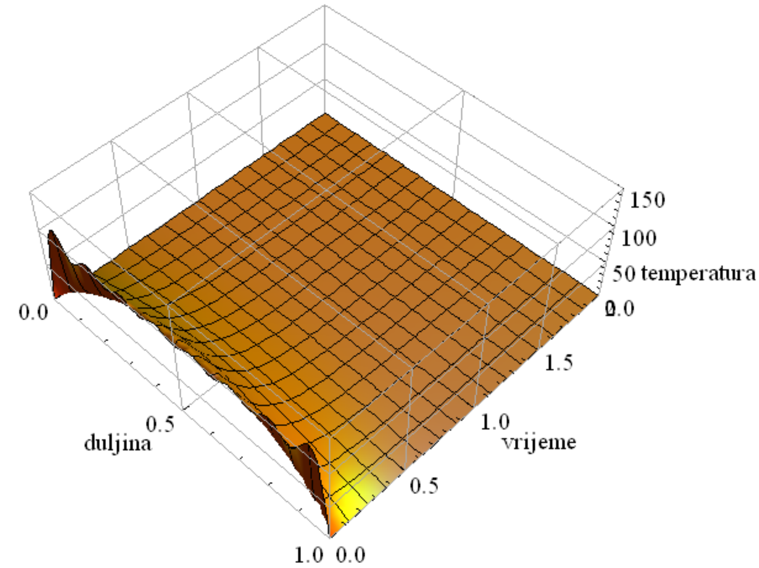


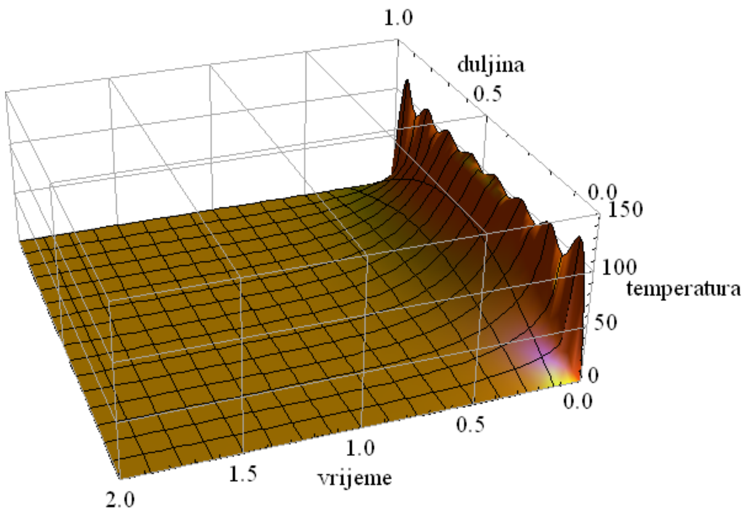
Peti slučaj → $c^2 = 0.3$ i $n = 15$





Šesti slučaj → c^2 = 0.5 i n = 15





Dakle, povećavanjem konstante c^2 dolazi do bržeg hlađenja štapa, to jest, eksponencijalni članovi brže teže nuli kako vrijeme teži beskonačnosti.

$u_n(x,t) = \frac{400Sin\left[\frac{n\pi x}{l}\right]}{(n\pi)} e^{-k\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}$ je n-ti član funkcije koja predstavlja rješenje ovog problema. U ovom slučaju imamo da je $B_n = {400}/{n\pi}$. Sinusoidni član pokazuje ovisnost temperature o položaju x, dok eksponencijalni dio pokazuje ovisnost temperature o vremenu t.

Izvorišni kod u programu Mathematica:

```
Manipulate[Module[{l, f}, l = 1; f[x_, t_]:
= NSum[400Sin[nπx/l] / ((nπ)e^(k(nπ/l)^2 t)), {n, 1, m, 2}]; Plot3D[f[x, t], {x, 0,1}, {t, 0,2}, FaceGrids
→ All, PlotRange → {{0,1}, {0,2}, {0,150}}, PlotStyle
→ Directive[Orange, Specularity[White, 30]], PlotPoints
→ ControlActive[4,20], AxesLabel → {"duljina", "vrijeme", "temperatura"}, ImageSize
→ {800,800}]], {{k, 0.1, "Parametar provodljivosti k"},0.01,0.5, Appearance
→ "Labeled"}, {{m, 1, "Broj članova n"},1,47,2, Appearance
→ "Labeled"}, TrackedSymbols :→ {k, m}]
```

Vrijedi $k = c^2$.

Plot3D[f, {x, x_{min}, x_{max}}, {y, y_{min}, y_{max}}] je naredba koja, u ovom slučaju, generira graf temperature (f) kao funkcije položaja x i vremena t, s tim da položaj i vrijeme imaju definirane minimalne i maksimalne vrijednosti ($x_{min} = 0$, $x_{max} = 1$, $t_{min} = y_{min} = 0$, $t_{max} = y_{max} = 2$).

NSum[f, {i, i_{min}, i_{max}}] je funkcija koja daje numeričku aproksimaciju sume $\sum_{i=imin}^{imax} f$, a NSum[f, {i, i_{min}, i_{max}, di}] pritom koristi korak di u sumiranju (u ovom slučaju di = 2). U našem primjeru sumira se po n od $n_{\text{min}} = i_{\text{min}} = 1$ do $n_{\text{max}} = i_{\text{max}} = m$.

5. ZAKLJUČAK

Parcijalne diferencijalne jednadžbe su modeli za različite fizikalne i geometrijske probleme. Pojavljuju se kada nepoznate funkcije, to jest rješenja ovise o dvije ili više varijabli, uobičajeno o vremenu i o jednoj ili više prostornih varijabli. Većina problema u dinamici, prijenosu topline, elektromagnetskoj teoriji i kvantnoj mehanici zahtijevaju parcijalne diferencijalne jednadžbe. Može se reći da je primjena parcijalnih diferencijalnih jednadžbi neusporediva u odnosu na obične diferencijalne jednadžbe.

Jedna od takvih jednadžbi jest i jednodimenzionalna toplinska jednadžba, a njezina rješenja nam opisuju prijenos topline duž jednodimenzionalnog tijela u vremenu. Jednadžba se rješava uz određene uvjete, te se kao rješenja (u idealnom slučaju) dobiju funkcije koje daju egzaktnu ovisnost temperature o vremenu i koordinati apscise. Njezina važna primjena je proučavanje prijenosa topline kroz metalni štap u ovisnosti o vremenu, položaju, ali i svojstvima materijala štapa.

6. LITERATURA

1. Kreyszig, E., Advanced Engineering Mathematics, 9th Edition, John Wiley and Sons, Inc., 2006., 535. – 536., 552. – 554. i 562. – 564. str.
2. http://demonstrations.wolfram.com/HeatTransferAlongARod/