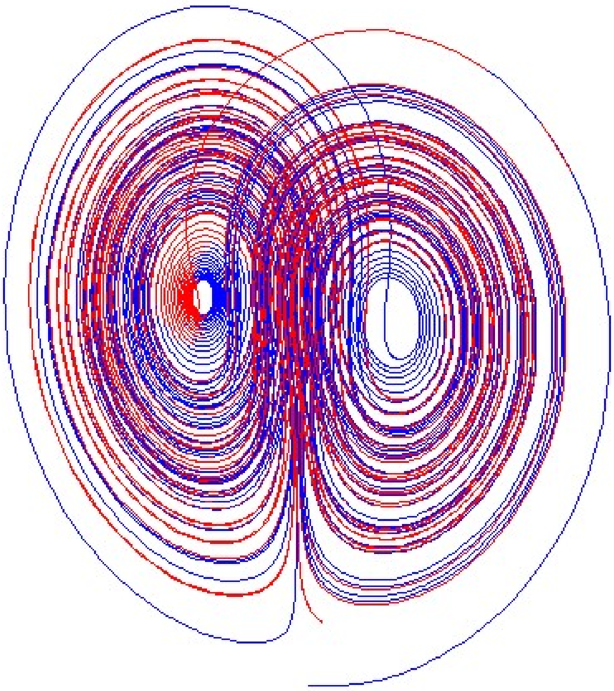
SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE
ZAVOD ZA MATEMATIKU

KAOS I LORENZOV SUSTAV



STUDENTICA: Helena Vučić

SMJER: Primijenjena kemija – modul : Specifični materijali i napredna tehnologije

MENTOR: prof. dr. sc. Ivica Gusić

Zagreb, srpanj 2011.

Sadržaj

UVOD

Znanstvenici su u prošlosti uvijek tražili formule i matematičke modele koji im egzaktno mogu dati rezultate nekog procesa, tj. predvidjeti slijedeće stanje nekog sustava u budućnosti – takav sustav je bio determiniran. To je bilo moguće kod sustava s malo varijabli, malo stupnjeva slobode: znajući početne vrijednosti varijabli koje su potrebne u nekoj jednadžbi možemo dobiti točno rješenje te jednadžbe. Međutim, većina sustava u prirodi ima jako puno ulaznih varijabli i velike stupnjeve slobode koje su znanstvenici pojednostavnjivali (ignorirajući neke faktore i efekte) ili su ih jednostavno izbjegavali zbog kompleksnosti njihovog računa.

Unatoč velikim naporima znanstvenika u istraživanjima zakonitosti prirode i velikim uspjesima na tim područjima, mnogi znanstveni problemi, ostajali su gotovo potpuno nerazjašnjeni. Osobito se to odnosilo na neke aspekte nepravilnih gibanja, kao što su klimatske pojave, turbulentne pojave u tekućinama, nelinearni učinci u elektroničkim krugovima, varijacije brojnosti pojedinih biljnih i životinjskih vrsta, nelinearna epidemiologija nekih zaraznih ili kroničnih nezaraznih bolesti, nelinearni socijalni, ekonomski ili politički fenomeni. Nepravilna strana prirode, isprekidana i neuređena uvijek je bila zagonetka za znanost.

Tada se razvija novi dio fizike, tj. kvantne mehanike **-** teorija (determinističkog) kaosa koja opisuje ponašanje nekih nelinearnih dinamičkih sustava koji se pod određenim uvjetima ponašaju na prividno nepredvidljiv način. Cilj teorije kaosa je, pronaći temeljni poredak u, naizgled, nasumičnim podacima. Teorija kaosa definira nove metodološke granice, istražuje tajni red prirode u kojem pravilnost (red) i nepravilnost (kaos) postoje jedan pored drugog. Kaos probija granice između znanstvenih disciplina. Radi se o znanosti o ukupnoj prirodi sustava koja postavlja snažne tvrdnje o općem ponašanju složenosti.

1. TEORIJA DETERMINISTIČKOG KAOSA

Po općeprihvaćenoj definiciji, teorija determinističkog kaosa je kvalitativno proučavanje nestabilnog neperiodnog ponašanja u determinističkim nelinearnim dinamičkim sustavima.

Nestabilno ponašanje je ono kod kojeg je za prijelaz između periodnog i neperiodnog, pa čak i između vrsta neperiodnog ponašanja, potrebna vrlo mala promjena u sustavu. Kao primjer nestabilnosti možemo uzeti atmosferske promjene (leptirov učinak).
Neperiodno ponašanje označava da nijedan parametar sustava ne prolazi kroz periodičke promjene vlastitih vrijednosti, tj. da se niti jedno stanje sustava ne ponavlja u potpunosti. I ovdje možemo, primjera radi, spomenuti meteorološke prilike. Na primjer, promatrajući dnevne temperature tijekom godine, uočavamo da su, općenito, ljetni dani topliji od zimskih, ali se svejedno temperature nikada potpuno ne ponavljaju. Kaotični sustavi nisu u svim mogućim stanjima kaotični, samim time teorija kaosa ne proučava samo kaotična stanja dinamičkih sustava, nego sva stanja sustava koji mogu u određenim uvjetima biti kaotični.
U kaosu postoje pravilnosti, tj. periodična stanja i upravo je to određeno pojmom "*determinističko*". To znači da teorija kaosa proučava samo one sustave koji u svom kaosu pokazuju neke pravilnosti, koje se mogu matematički i numerički opisati. Primjerice, Brownovo gibanje je također kaos, ali ne deterministički, jer je to gibanje posve "slučajno".
Nelinearni sustav je onaj sustav čiji model je opisan nelinearnim jednadžbama. Nelinearnost zakona koji sustavom vladaju preduvjet je nastanka determinističkog kaosa u njemu, kao i ostalih pojava vezanih za kaos.
Dinamički sustav je onaj koji doživljava promjene stanja u vremenu.

Teorija kaosa je veliko matematičko-fizikalno područje složenih jednadžbi kojima se opisuje neko zbivanje u prirodi i temelji se na proučavanju područja nelinearne. U nelinearnim sustavima i neznatne promjene parametara vode iznenadnim i dramatičnim promjenama i u kvalitativnom i kvantitativnom smislu. Nelinearni članovi jedan su od uvjeta da bi sustav mogao postati kaotičan. To je predvidio još početkom 20. stoljeća Poincaré. Kada tome dodamo još i ekstremnu osjetljivost na početne uvjete, moguće je da i najjednostavniji sustavi pokažu nepredvidiva svojstva.
Teoriju kaosa možemo podijeliti na područje determinističkog kaosa i na područje kvantno-mehaničkog kaosa. Procesi koji spadaju u deterministički kaos mogu se opisati nekom jednadžbom, dok se oni iz kvantno-mehaničkog mogu opisati, samo vjerojatnosnim izrazom.

Primjeri determinističkog kaosa jesu populacijska jednadžba i jednostavno njihalo, a primjeri stohastičkih procesa, Brownovo gibanje, bacanje igraćih kockica, atmosferske promjene, ponašanje dima cigarete, difuzija, itd. Brownovo gibanje spada u kvantno-mehanički kaos, tj. u stohastičke procese, a kod takvih procesa se primjenjuju zakoni vjerojatnosti, što više ne spada u domenu determinizma. Sva moguća rješenja tih procesa popunjavaju vjerojatnosni prostor, jer vrijednost sljedećeg broja je potpuno neovisna o vrijednosti prethodnog. Karakteristika tih procesa je velik broj slučajnih varijabli, čije su veze toliko složene da ih je nemoguće izraziti analitički.

Teorija kaosa opisuje ponašanje nekog nelinearnog dinamičkog sustava koji pod određenim uvjetima izvodi fenomen poznat kao kaos.

Karakteristike kaotičnog sustava su:

- osjetljivost na početne uvjete, tzv. efekt leptira (*butterfly effect*)
- sustav će s vremenom popuniti sav dostupan prostor (trajektorije sustava iscrtaju sav dostupan prostor i nikad se ne ponavljaju);
- periodne orbite sustava su jako guste (nema prevelikih odstupanja od prethodne putanje).

Bitno je da se takvi sustavi uvijek vraćaju, privlače nekim stabilnim vrijednostima. Krenuvši od početnih uvjeta, izračun u kaosu se nastavlja postupkom iteracije. To znači da rezultate koje dobijemo uvrštavanjem početnih vrijednosti u izraz jesu ulazni podaci za novi krug proračuna tog istog izraza (npr. $x_1=f(x_0)$, $x_2=f(x_1)$, $x_3=f(x_2)$ itd.). Kada vrijednosti koje dobivamo računom teže nekoj vrijednosti (broju, točki, krivulji...), kažemo da smo dobili atraktor periode. Atraktor može biti točka, krivulja, ploha... Ponekad te vrijednosti teže prema više različitih vrijednosti pa govorimo o atraktorima viših perioda. Može se dogoditi i to da atraktor nema nikakvu periodičnost, da se izračuni ne približavaju nekoj određenoj vrijednosti, već su naizgled nasumice razbacani u prostoru i nemaju definirani jasan oblik. Tada govorimo o kaotičnom ili čudnom atraktoru. Najpoznatiji je Lorentzov atraktor.

Kaotične sustave možemo ugrubo podijeliti na kontinuirane i diskontinuirane.

Kontinuiran ("fluidan", neisprekidan) je onaj sustav koji pokazuju "glatke" promjene kroz vrijeme, tj. u proizvoljno malenom vremenskom periodu dolazi do promjene parametara (osim, naravno, u slučaju kada sustav miruje). Svi takvi sustavi su opisani diferencijalnim jednadžbama, i intuitivno su najbliži stvarnim uvjetima u prirodi.

Diskontinuiran (diskretan, isprekidan, skokovit) je onaj sustav kod kojeg nema glatke promjene parametara, jer se te promjene ne događaju stalno, nego u diskretnim vremenskim intervalima. Ovakvi sustavi su češći u prirodi nego što bi se to moglo pomisliti, posebice u biološkom svijetu, a opisuju se iteracijskim jednadžbama.

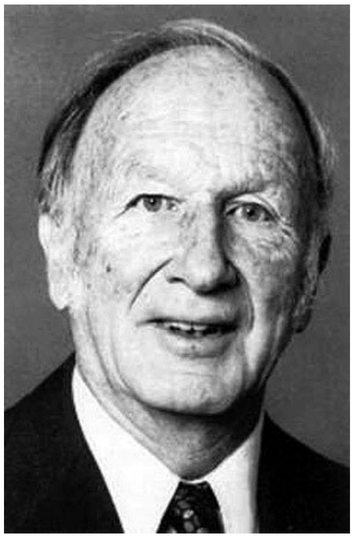
Razvojem teorije kaosa počelo je preispitivanje fizikalnih modela. Postavilo se pitanje koliko su sustavi kaotični i postoji li stabilan sustav. Istraživanjem kaosa i njegovih učinaka otkrilo se da sustavi mogu prelaziti iz kaotičnih u regularne i obrnuto.

U svojem izvornom obliku teorija kaosa bila je utemeljena na zakonitostima fundamentalne fizike, ali teorija kaosa pokazuje neka univerzalna svojstva, tako da se, uz izvjesne modifikacije, može primijeniti i na široko područje društvenih znanosti i na mnoga druga disciplinarna područja. Analizom nelinearnih dinamičkih jednadžbi matematičari su uspjeli dublje prodrijeti u složenu matematičku strukturu kaotičnih pojava. Fiziolozi su pronašli začuđujući red u nepravilnim otkucajima ljudskog srca, ekolozi su prepoznali zakonitosti iznenadnih povećanja i smanjenja raznih bioloških populacija, ekonomisti su uvidjeli da su se velike ekonomske krize i depresije ipak javljale u nekim logičnim vremenskim razmacima, politolozi su otkrili velike nepravilnosti i nezakonitosti u klasičnim anketama javnog mnijenja itd.

2. LORENZOV SUSTAV

Prvi pravi istraživač teorije kaosa bio je meteorolog Edward Lorenz, koji je 1960-ih godina na Tehnološkom institutu u Massachusettsu radio na problemu predviđanja vremena. Bavio se diferencijalnim modelom oblaka i zračnih struja iz čega je proizašao jedan od najpoznatijih kaotičnih sustava, Lorenzov sustav poznatiji pod imenom "leptirova krila".

Lorenz je ustvrdio da je nemoguće točno predvidjeti vrijeme. On je opisao atmosferu kao sustav fluida i postavio tri diferencijalne jednadžbe, koje su trebale opisivati uvjete u atmosferi, a time i predviđati vrijeme. Iako su mnogi bili skeptični glede te ideje, ona se pokazala uspješnom, a dokaz za to je mehanička analogija kruga konvekcije – kružno gibanje vrućeg fluida koji se podiže i okreće kao vodenično kolo.



Slika 1- Edward Norton Lorenz (1917. - 2008.)
meteorolog i matematičar -"otac teorije kaosa"

Činilo se da ove njegove jednadžbe opisuju potpuno nasumično ponašanje, ali kada bi dao ispisati graf, krivulja koju bi dobio uvijek je bila dvostruka spirala. Ranije su bile poznate samo dvije vrste poretka: stalno stanje, u kojem se varijable nisu nikada mijenjale i periodično ponašanje, u kojem sustav oblikuje krug, beskonačno se ponavljajući. Lorenzove jednadžbe su definitivno slijedile neki poredak – uvijek su opisivale spiralu.

Lorenz nije bio prvi koji je otkrio ovo neobično ponašanje, ali je bio među prvima koji su ga krenuli detaljnije proučavati. Osim što je otkrio da jedan savršeno predvidljiv sustav generira potpuni kaos, Lorenz je napravio i korak više. Ne samo da je stoljećima poznat *red* u obliku dobrih starih diferencijalnih jednadžbi generirao kaos nego je unutar kaosa generirao se red. Taj red je bio sve samo ne deterministički.

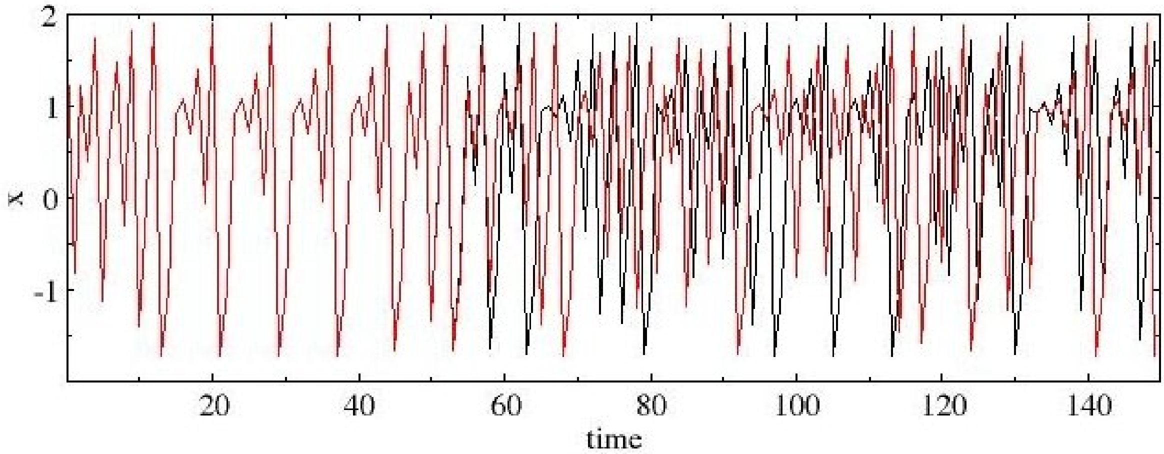
Teorijska istraživanja ranijih autora, dakle istraživanja za koja su dovoljni olovka i papir, ukazala su na neke važne osobine nelinearnih sustava – primjerice na mogućnost da je ponašanje tih sustava silno ovisno o početnim uvjetima kojima su izloženi. No nitko od Lorenzovih prethodnika nije uspio odrediti konkretna neperiodička rješenja nelinearnih diferencijalnih jednadžbi. Lorenzova je zasluga da je iskoristio elektroničko računalo kako bi numeričkim putem došao do takvih rješenja i, još više, uspio ih grafički prikazati, čime ih je učinio razumljivima širokom krugu znanstvenika. Tako su, zahvaljujući Lorenzu, neperiodičke promjene postale procesi kojima su se znanstvenici počeli baviti. Lorenzov članak iz 1963. odmah je pobudio zanimanje meteorologa te je postupno doveo do izrade tzv. ansambla prognoza – dakle skupa prognoza koje su dobivene istim modelom uz različite, namjerno promijenjene početne uvjete. Tako se može vidjeti, prema rasapu prognoza, kolika je njihova pouzdanost. Nakon desetak godina Lorenzova su otkrića počela privlačiti pozornost i šireg kruga znanstvenika – matematičara, fizičara, kemičara, biologa, inženjera, ekonomista... Tada se široko udomaćio termin deterministički kaos koji znači da uzročno posljedične veze u sustavima mogu biti potpuno matematički, dakle deterministički opisane, a da se sustavi ipak ponašaju nepredvidivo.

2.1. Lorenzov atraktor – efekt leptirovih krila

Lorenz je bio prvi koji je uočio da male promjene u dinamičnom sustavu, kao što je klima, "mogu imati velike i često neočekivane posljedice". Shvatio je da mora postojati veza između nesklonosti ponavljanja vremenskih prilika i nemogućnosti prognostičara da ih predvide – veza između neperiodičnosti i nepredvidivosti.

Lorenz je kreirao računalni program sa skupom od 12 jednadžbi kako bi modelirao promjene vremena. Međutim, umjesto dugoročno točne vremenske prognoze, otkrio je uznemirujuću činjenicu, da gomilanje podataka i varijabli, poput brzine vjetra, tlaka zraka, vlage, temperature i atmosferskih promjena, neće povećati točnost dugoročne vremenske prognoze. Shvatio je da će, koliko god on podataka prikupio, dugoročnija vremenska prognoza uvijek biti netočna. Razlog je, zaključio je, u tome što su dinamički sustavi poput vremena sastavljeni od previše međusobno povezanih varijabli ili međudjelujućih elemenata koji su krajnje osjetljivi na početne uvjete.

Jednoga dana 1961. godine želio je ponovno provjeriti određenu vremensku prognozu, te je, kako bi uštedio vrijeme, započeo račun u sredini simulacije umjesto od početka. Nakon obrade podataka, prognoza vremena izgledala je drugačije. Umjesto jednakog rezultata kao prije, sekvenca je značajno divergirala.



Slika 2 - Rješenja Lorenzovog programa printana u ovisnosti o vremenu; odskakanju sustava ukazuje na osjetljivost na početne uvjete

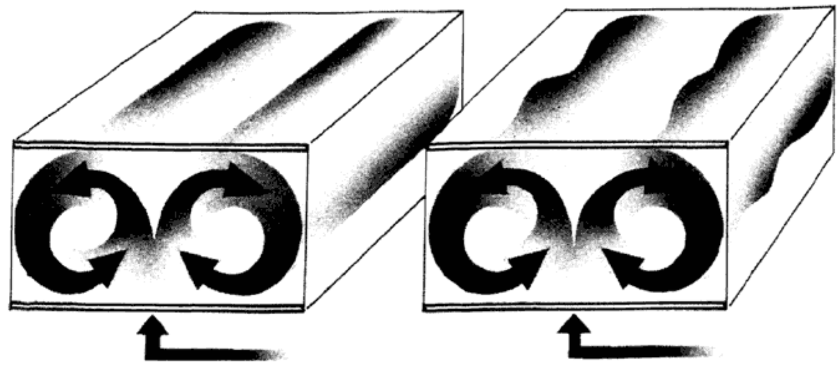
Na kraju je shvatio što se dogodilo. Pri prvoj simulaciji u računalo je pohranio brojeve do šest decimala, a pri ponovnom pokušaju utipkao je samo prve tri decimale. Prema svim konvencionalnim idejama toga vremena trebao je dobiti prognozu izrazito blisku prvobitnoj. Ipak, na kraju je prognoza izgledala izrazito drugačije od originala. Time je dokazao kako pokretanje računalne simulacije s početnim vrijednostima samo malo promijenjenim od prvobitnih uzrokuje vremensku prognozu izrazito drukčijom od početne, što znači da u složenim, nelinearnim sustavima, mala promjena u vrijednosti početnih parametara može uzrokovati velike promjene u vrijednosti rezultata.

U znanosti, kako i u životu, poznato je da lanac događaja može imati kriznu točku koja će uvećati sitne promjene. Kaos znači da se takve točke nalaze posvuda, tj. da prevladavaju.. Lorenz je dokazao da su dinamički sustavi doista određeni svojim uzrocima. Kad bismo uistinu bili u mogućnosti znati apsolutno točno sve uzroke, mogli bismo predvidjeti budućnost tih sustava. No broj utjecaja koji utječu na neki dinamičan sustav, i koje je otkrio Lorenz, zapravo je vrlo velik, tj. takvi su sustavi osjetljivi toliko da na njih može utjecati i nešto naoko sasvim beznačajno.

Lorenz je smatrao da sustav od 12 jednadžbi koje je koristio za modeliranje promjene vremena. treba pojednostaviti i učiniti razumljivijim. Nadahnuće je pronašao u posebnoj vrsti kretanja fluida – podizanju vrućeg plina ili tekućine, poznatog kao konvekcija. Lorenzova konvekcija bio je prvi kaotični sustav koji je sustavno istraživan upotrebom pomoću računala. Model konvekcije predstavlja nelinearan sustav koji je teško zbrajati i uglavnom je nerješljiv.

U dinamici fluida sve se do tada svodilo na jednu jednadžbu, Navier-Stokesovu, koja povezuje brzinu, tlak, gustoću i viskozitet fluida.

Model se sastojao od fluida u zatvorenoj kutiji sa glatkim unutarnjim stranicama, čije se dno konstantno grije (tako da se održi na istoj temperaturi), i čiji se vrh isto tako hladi. Razlika u temperaturi između vrućeg dna i hladnog vrha upravlja tokom. Pri malim temperaturnim razlikama, sustav ostaje miran i stabilan pri čemu se toplina kreće prema vrhu, ne prevladavajući prirodnu sklonost fluida da ostane miran. U kutiji se formiraju dva strujna valjka, koji rotiraju u suprotnim smjerovima, tako da se jedan dio fluida uzgonom uzdiže (to je onaj dio bliže unutrašnjosti, dakle topliji dio), a drugi dio pada (hladniji dio uz stranice posude). Bilo koje kretanje koje se pojavljuje nasumce, prestat će i sustav će se vratiti u stabilno stanje.
Međutim, kada se razlika temperature poveća, stvorit će se novi oblik ponašanja. Kako fluid na dnu postaje vrući, počinje se širiti pri čemu postaje rjeđi. Zbog toga postaje lakši dovoljno da nadvlada trenje, te se počinje gibati prema površini. U kutiji se stvara valjkasto kotrljanje kod kojeg se vrući fluid uspinje uz jednu stranicu, dok se hladni fluid spušta uz drugu, opisujući krug. Takvo ponašanje fluida može se susresti i u prirodi. Takve konvekcijske ćelije nastaju npr. prilikom zagrijavanja pustinjskog tla kad kotrljajući zrak formira stjenovite oblike, gore u oblacima ili dolje u pijesku.
Ukoliko se još više poveća razlika u temperaturi, ponašanje postaje sve složenije. Dolazi do nestabilnosti i lelujanja strujnih valjaka, pri čemu se valjci fluida gube, i zamjenjuju ih nepravilnosti i turbulencije, tj. kaos.



Slika 3 - konvekcijski valjci u fluidu. Lijeva slika prikazuje pravilno ponašanje, desna pak lelujanje valjaka, odnosno kaos. (strelice označavaju dovod topline)

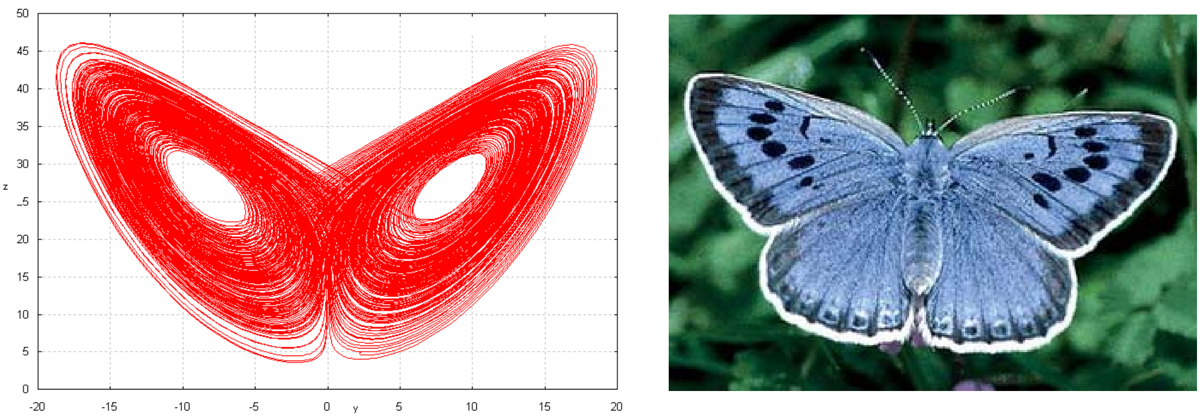
Na temelju takve prirode ponašanja konvekcije fluida, Lorenz je postavio sustav od 3 diferencijalne jednadžbe:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

gdje je σ Prandtlov broj i ρ Rayleighjev broj. Svi su $\sigma, \rho, \beta > 0$, ali je obično $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$ dok ρ varira. Sustav ispoljava kaotično ponašanje za $\rho = 28$, a za druge vrijednosti od ρ prikazuje čvoraste periodičke orbite.

Iako Lorenzove jednadžbe, zbog jednostavnosti, nisu opisale potpunu složene konvekciju fluida (opisan je samo jedan oblik konvekcije, kružno gibanje vrućeg fluida koje se podiže i okreće kao vodenično kolo, *poglavlje 2.2*), ukazale su na postojanje parnjake u stvarnim sustavima.

Zamislimo da se cijelo stanje Lorenzovog modela u jednom trenutku može reprezentirati jednom jedinom točkom u 3D Kartezijevom sustavu. Ako bismo sada promatrali kroz vrijeme kako sustav evoluira i svake sekunde bilježili po jednu točku, te točke bi se počele pojavljivati potpuno slučajno u prostoru. Međutim, ako bismo to radili duže vrijeme počela bi se oblikovati do tada neviđena i neobična krivulja koja izgleda kao na sl. 4.



Slika 4 – Lorenzov atraktor nalik krilima leptira

Krivulja je danas poznata kao *Lorenzov atraktor***.** Jedna je od mnogih kasnije otkrivenih kaotičnih atraktora. Beskonačno je dugačka, ekstremno složena; iako se čini da teži tome da se zgusne u jednu jedinu crtu, zapravo nikada samu sebe ne presijeca. Teško bi je bilo moguće vidjeti bez generiranja računalom. Ona ima fraktalna svojstva, to je fraktal Hausdorffove dimenzije između 2 i 3. Grassberger je 1983. procjenio njegovu Hausdorffovu dimenziju na 2.06 ± 0.01 i korelacijsku dimenziju na 2.05 ± 0.01.

Tu finu ovisnost o početnim uvjetima istraživači kaosa nazvali su *efekt leptirovih krila* (*butterfly effect*). Razlika među početnim točkama dviju krivulja toliko je malena da se može usporediti sa zamahom leptirovih krila. Ovaj fenomen temelji se na ideji da beskonačno male promjene, kao što je lepet krila insekta, mogu voditi do ogromnih posljedica. Zamah krila jednog leptira danas može napraviti neznatnu promjenu u atmosferi, ali ono što će atmosfera s tim učiniti tokom vremena, razlikuje se od onoga što bi bila napravila da tog zamaha nije bilo. Možda se katastrofalan potres u Indoneziji, koji se trebao dogoditi, ne dogodi, a odigra se nešto što se nije trebalo dogoditi. Ovaj fenomen, čest u teoriji kaosa, nazivamo i osjetna ovisnost o početnim uvjetima. Takvu malu količinu razlika u mjerenjima možemo smatrati eksperimentalnom bukom, pozadinskom bukom ili netočnošću opreme.

Izraz "efekt leptira" udomaćio se nakon Lorenzovog znanstvenog rada iz 1972. godine pod naslovom "Predvidljivost: Može li zamah leptirovih krila u Brazilu pokrenuti tornado u Teksasu?".

2.1.1. Lorenzove jednadžbe

U sustavu Lorenzovih jednadžbi koje opisuje konvekciju fluida

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

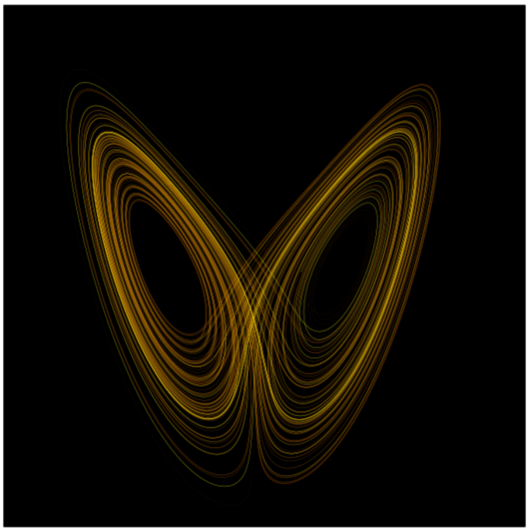
varijabla x je proporcionalan intenzitetu konvekcije, y razlici temperature, a z razlici linearnog i stvarnog vertikalnog temperaturnog profila.

Prandtlov broj je σ, ρ predstavlja Rayleighlijev, a b je geometrijski faktor.

U Lorenzovim jednadžbama očituje se svojstvo simetrije. Ukoliko se u tim jednadžbama zamijeni *(x, y)* sa (-x, *-y),* jednadžbe ostaju iste. Stoga, ako su *(x (t) , y(t), z(t))* rješenja, onda su rješenja isto i *(-x(t),- y(t), z (t)).* Drugim riječima, sva su rješenja, također simetrična ili imaju svog simetričnog para.

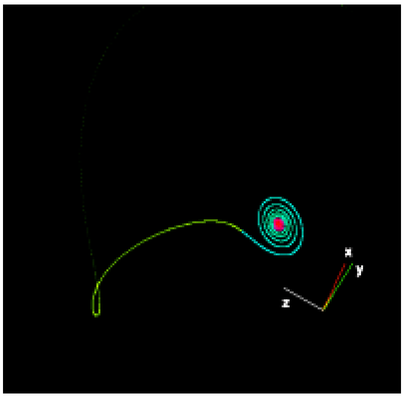
Sa tehničkog gledišta, sustav je nelinearan, trodimenzionalan i deterministički. Sistem pronalazi primjenu u laserima, dinamima i specifičnim vodenicama.

Rješenje Lorenzovog sustava se može prikazati i u dvije *(y(t), z(t))* ili tri dimenzije (*x(t), y(t), z(t))*. U oba dva slučaja dobiva se slika koja prikazuje kako se rješenje mijenja u vremenu, prikazujući ga za svaki trenutak kao točku u trodimenzijskom koordinatnom sustavu. Na slikama su vidljiva dva područja gdje se trajektorije približavaju zamišljenim rupama, međutim dolazi do toga da se tu trajektorije međusobno udaljavaju počevši od najmanjeg radijusa prema većem na jednom krilu i prelazi se na drugo krilo te se tako to ponavlja u beskonačnost ali nikada po istom putu samih trajektorija.

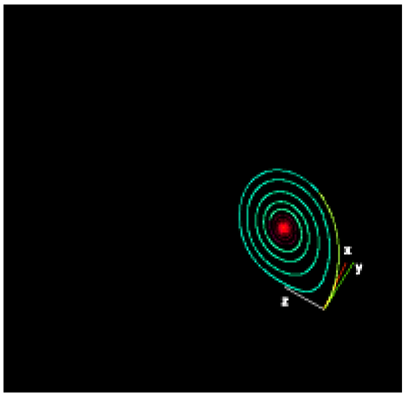


Slika 5 - Prikaz trajektorije Lorenzovog sustava za vrijednosti ρ=28, σ = 10, b = 8/3

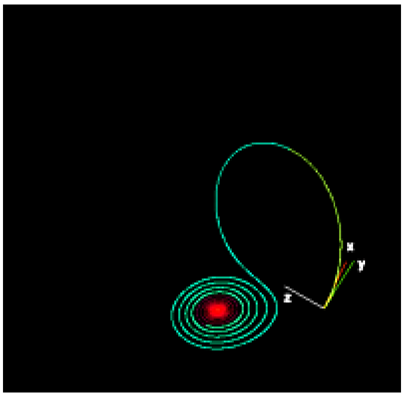
Za male vrijednosti ρ, sustav je stabilan i završava u jednu od dvije fiksne točke atraktora (slika a, b, c) Kada je ρ veći od 24.74, fiksne točke postaju repulzori koji odbijaju trajektorije na vrlo složen način, evolvirajući bez presijecanja same sebe.



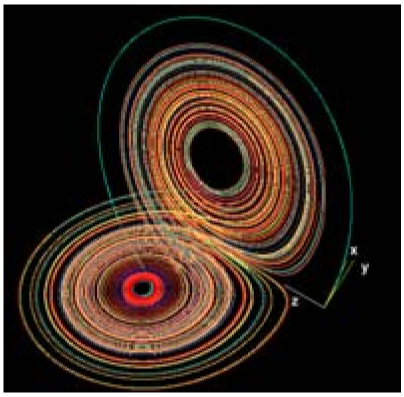
ρ=14, σ=10, β=8/3



ρ=13, σ=10, β=8/3



ρ=15, σ=10, β=8/3



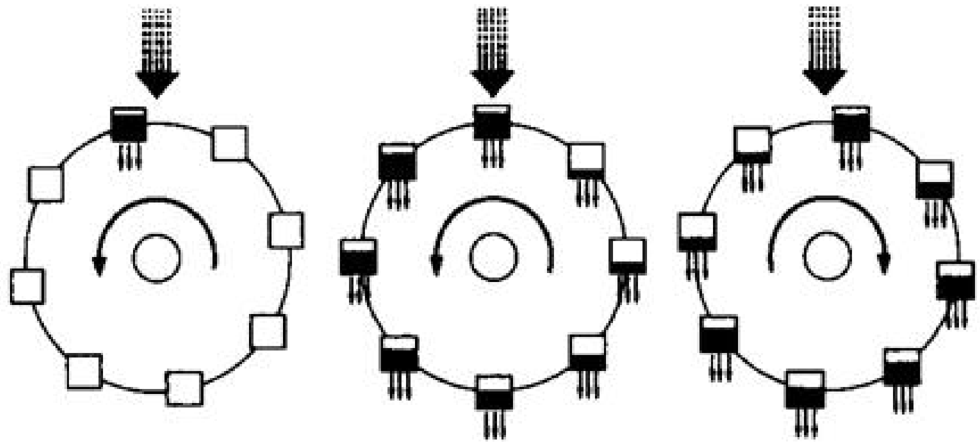
ρ=28, σ=10, β=8/3

Slika 6 - Ovisnost Lorenzovog atraktora o različitim vrijednostima Rayleighjevog broja

2.2. Lorenzovo vodenično kolo

Prvi znameniti sustav kaosa koji je otkrio Edward Lorenz odgovara mehaničkom uređaju, vodeničnom kolu koji pokazuje izuzetno složeno djelovanje. Ovaj sustav točno opisuju Lorenzove jednadžbe.

Vrtnja vodeničnog kola ima ponešto zajedničkog s rotirajućim valjcima fluida u procesu konvekcije. Oba sustava stalno se pokreću – vodom ili toplinom i oba rasipaju energiju. Fluid gubi toplinu, a vjedra gube vodu. U oba sustava dugoročno ponašanje ovisi o snazi pokretačke energije.



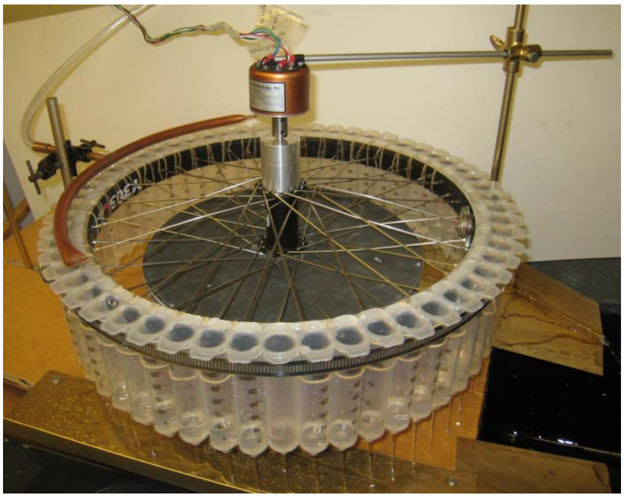
a) b) c)

Slika 7 - Prikaz vodeničnog kola

Na vrhu voda stalno kapa u spremnike obješene na rubu kola. Svaki spremnik ima rupicu, pa voda iz njega istječe. Ako je tok vode polagan, spremnik na vrhu nikad se ne puni dovoljno brzo da nadvlada trenje kola, pa se kolo ne pokreće. Ako je, pak, tok brži, težina najvišeg vjedra počinje okretati kolo (slika 7 a). Vrtnja može postati stalna, odnosno vodenično kolo prelazi u stanje jednolike vrtnje (slika 7 b). Kod još bržeg toka (slika 7 c), okretanje može postati kaotično zbog nelinearnih učinaka ugrađenih u sustav. Kod jako brzog toka teški se spremnici kreću do dna i uspinju na drugoj strani, pa kolo može početi usporavati, zaustaviti se i promijeniti smjer vrtnje, krećući se najprije u jednom, a potom u drugom smjeru. Za određeni tok ovo kretanja postaje još kaotičnije, te nije moguće predvidjeti gibanja kola.

Dok vjedra prolaze ispod mlaza vode, o brzini okretanja ovisi koliko će se napuniti. Ako se kolo brzo okreće, malo je vremena za punjenje. Također, ako se kolo brzo okreće, vjedra mogu krenuti na drugu stranu prije negoli se dospiju isprazniti. Kao rezultat, teška vjedra na strani koja se okreće prema gore mogu uzrokovati usporavanje okretanja, a potom i gibanje u suprotnom smjeru. Lorenz je na kraju ustanovio da tijekom dugog razdoblja, okretanje mijenja smjer mnogo puta, a da pri tome nikad ne postane ravnomjerno niti se ponovi u bilo kojem predvidljivom obliku.

Vodeničko kolo predstavlja grubo pojednostavljeni model rotacije zraka u stupcu. Kontakt s tlom zagrijava zrak, te ga diže. Zrak se na određenoj visini u atmosferi polako hladi, postaje gušći i pada. Te dvije struje zraka trebaju kružiti jedna oko druge, te klizanjem izazvati rotaciju. Vodeničko kolo je obrnuti model tog procesa. Voda u svakom vjedru označava toplinu u tom zračnom džepu. Vjedro pokupi vodu kada je zrak u blizini tla (vrha kotača), i sve kante stalno, ali polako, gube vodu, što odgovara gubitku topline zraka kroz zračenje. Topliji zrak, se gura prema gore, što odgovara kanti s vodom koja ide prema dolje.



Slika 8 – Različite realne izvedbe Lorenzovog vodeničnog kola

3. PRIMJERI KAOTIČNIH SUSTAVA

3.1. Lorenzov atraktor

Rješenje Lorenzovog sustava tri navedenih diferencijalnih jednadžbi izvedeno je pomoću *Matlaba*.

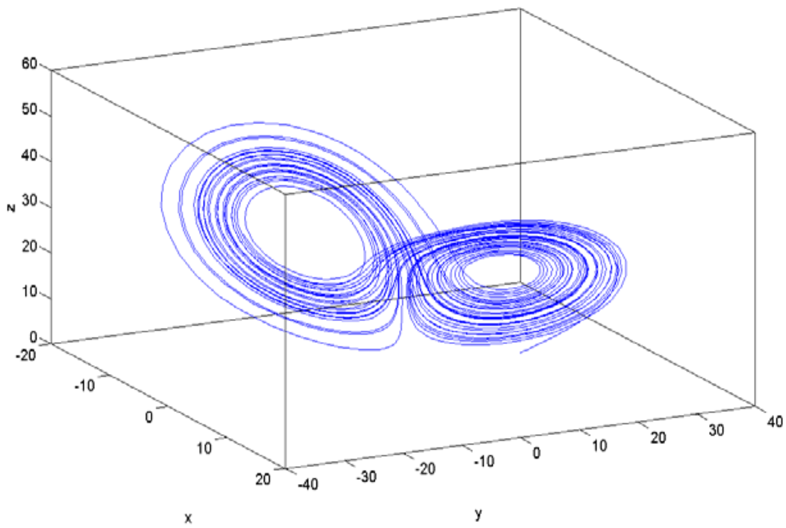
$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

Sustav jednadžbi se numerički integrira, te se rezultat ispisuje u trodimenzionalnom obliku.

```
global SIGMA R B
SIGMA=10.;  R=28.;    B=8./3.;

% početni uvjeti
x0=[10 10 10];

% vrijeme
t0=0; tf=40;

% integracija ode45 funkcijom
 [tout, xout] = ode45('lorenzf', [t0, tf], x0);

% plotanje odaziva
figure(1);
hp=plot3(xout(:,1), xout(:,2), xout(:,3),'LineWidth',1.5);
set(hp,'LineWidth',0.1);
box on;
xlabel('x','FontSize',14);
ylabel('y','FontSize',14);
zlabel('z','FontSize',14);

axis([-20 20 -40 40 0 60]);

set(gca,'CameraPosition',[200 -200 200],'FontSize',14);
```

Lorenzova funkcija:

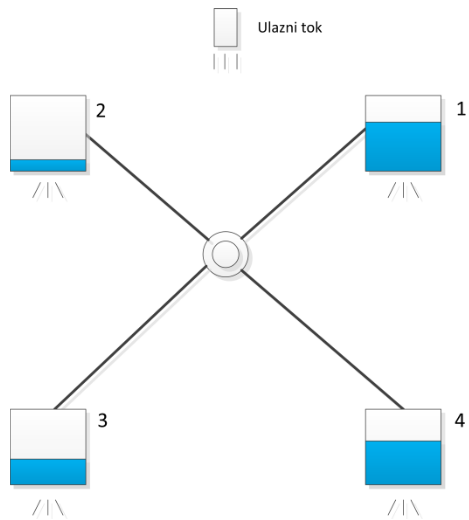
```
function u = lorenzf(t,x)
global SIGMA R B

u = [SIGMA*(x(2)-x(1)), x(1)*(R - x(3)) - x(2), x(1)*x(2) - B*x(3)]';
```



Slika 9 – Dobiveni Lorenzov atraktor

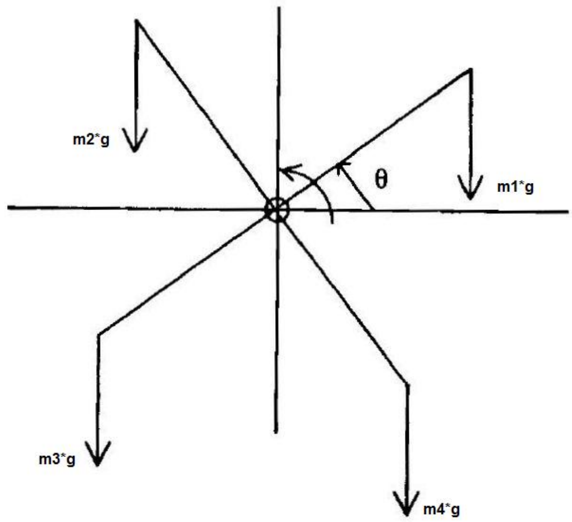
3.2. Vodenično kolo

Izrađen je matematički model vodeničnog kola s četiri kante prikazan na slici 10.



Slika 10 – Shematski prikaz Lorenzovog vodeničnog kola

Matematički model sustava možemo rastaviti na tri dijela koja se odnose na dinamiku rotacije, trenje vodeničnog kola i razinu tekućine u posudama.



Slika 11 – Djelovanje momenata na vodeničko kolo

Dinamika rotacije opisana je jednadžbom ravnoteže momenata oko točke rotacije.

$$J\dot{\omega} = \sum_{i=1}^{4} M_i + M_{tr}$$

Moment koji uzrokuje težina posude jednak je vektorskom umnošku kraka i sile koje djeluju na zadanu točku rotacije. Za momente vodeničnog kola slijede izrazi:

$$M_1 = -L \cdot m_1 \cdot g \cdot cos(\theta)$$

$$M_2 = L \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$M_3 = L \cdot m_3 \cdot g \cdot \cos(\theta)$$

$$M_4 = -L \cdot m_4 \cdot g \cdot \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

gdje je:

- L – duljina kraka vodeničkog kola
- m_i – masa i-te posude
- g – akceleracija sile teže
- θ – kut zakreta vodeničnog kola prema referentnom koordinatnom sustavu

M_{tr} označava moment trenja kojeg možemo podijeliti na suho i viskozno trenje. Suho trenje se javlja između osovine i vodeničkog kola, a ovisi o koeficijentu trenje i sili pritiska. Sila pritiska jednaka je zbroju masa svih posuda na kolu. Iz čega slijedi sila suhog trenja:

$$F_{st} = \mu \cdot m_{uk} \cdot g$$

$$m_{uk} = \sum_{i=1}^{4} m_i$$

Gdje je μ koeficijent trenja u rasponu [0 1], a g akceleracija sile teže. Moment koje uzrokuje suho trenje ovisi o polumjeru osovine D_s, a njegov smjer suprotan je od smjera rotacije kola. Moment suhog trenja jednak je:

$$M_{st} = -sgn(\theta) \cdot \mu \cdot m_{uk} \cdot g \cdot \frac{D_s}{2}$$

Moment trenja koji se javlja uslijed djelovanja viskoznog trenja jednak je:

$$M_v = -K_v \cdot \dot{\theta}$$

$$K_v = 2J \cdot \zeta$$

Gdje je ζ koeficijent viskoznog trenja u rasponu [0 1]. Ukupno moment uslijed djelovanja trenja jednak je zbroju momenata suhog i viskoznog trenja.

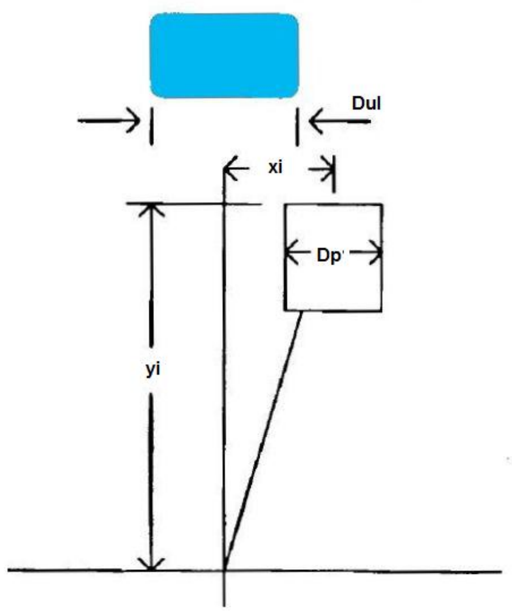
$$M_{uk} = M_{st} + M_v$$

Za sustav potrebno je još opisati model posude na vodeničnom kolu. Iz jednadžbe ravnoteže tekućina u posudi slijedi da je promjena tekućine u posudi jednaka razlici ulaznih i izlaznih tokova. Za jednu posudu vrijedi jednadžba:

$$\rho A_k \frac{dh_i}{dt} = Q_{ui} - Q_{ii}$$

Posuda se puni kada se nalazi na vrhu vodeničnog kola, a punjenje posude ovisi o ulaznom toku i položaju posude. Slika 12 prikazuje položaj posude i ulaznog toga gdje je:

- D_u – širina ulaznog toka
- D_p – širini posude



Slika 12 – Model punjenja posuda

Iz slike su postavljeni uvjeti za punjenje posude. Posuda se puni kada je *y* koordinata pozitivna i nalazi se ispod ulaznog toka. Tok kojim se puni posuda proporcionalan je poklapanju ulaznog toka i otvora posude. Priliko modeliranja obuhvaćene su dvije mogućnosti, kada je posuda djelomično ispod ulaznog toka, te kada je posuda potpuno ispod ulaznog toka. Iz razmatranja sustava postavljeni su sljedeću uvjeti:

```
if((yi> 0)&&(|xi|<(Dul+Dp)/2))
if(|xi|)>((Dul-Dk)/2))
qui = qu*(0.5*(Dul+Dp)-|xi|)/Dul;
else
qui = qu*Dk/Dul;
end
else
qui = 0;
end
```

Iz Bernollijeve jednadžbe

$$p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = const.$$

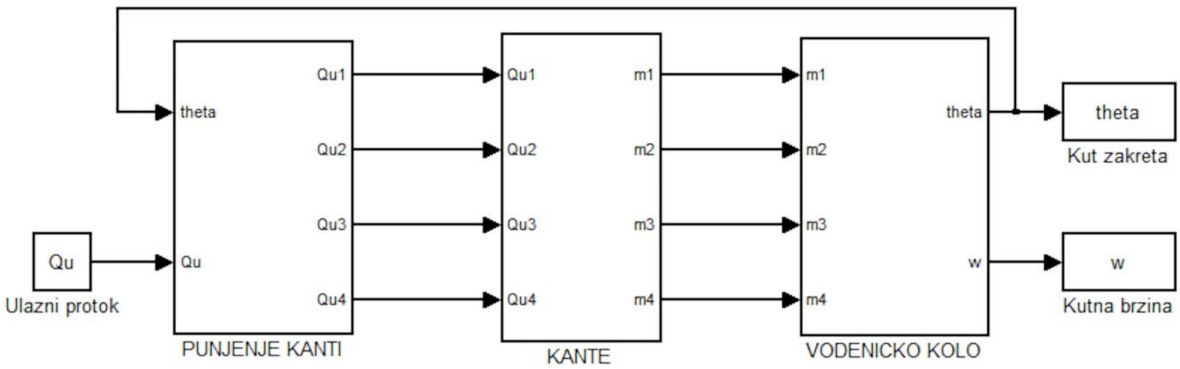
određen je izraz za izlazni tok i glasi:

$$Q_{ii} = \rho A_i \sqrt{2gh_i}$$

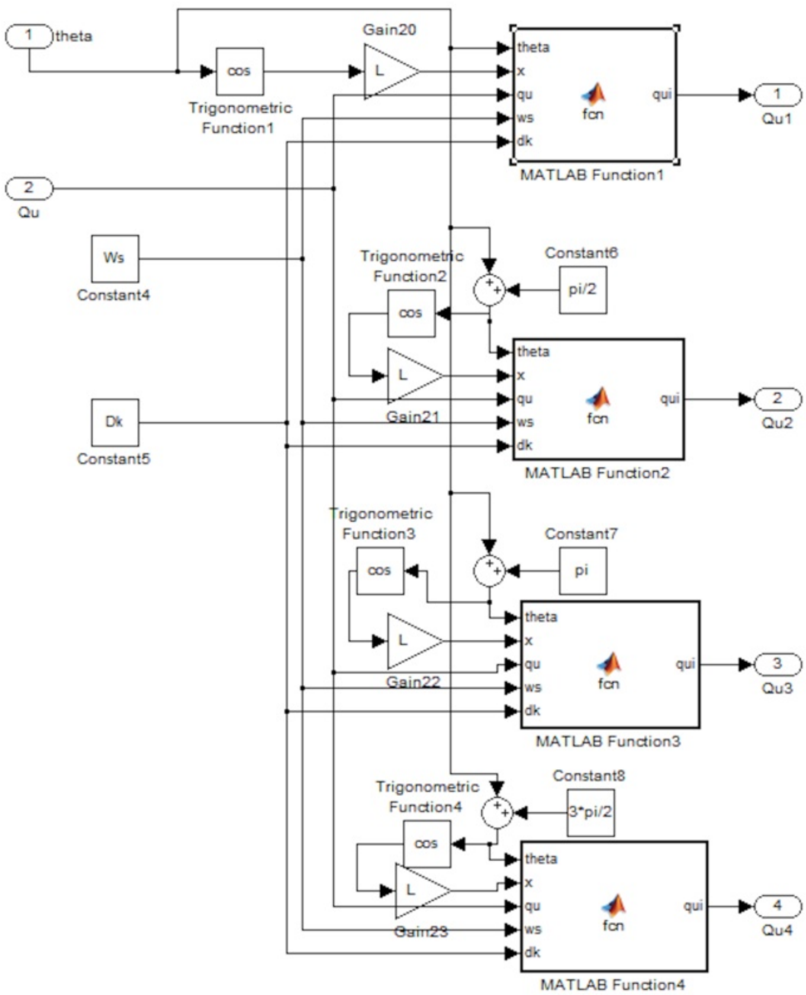
Gdje je:

- ρ – gustoća tekućine u posudi
- A_i – površina poprečnog presjeka izlazne pukotine na posudi

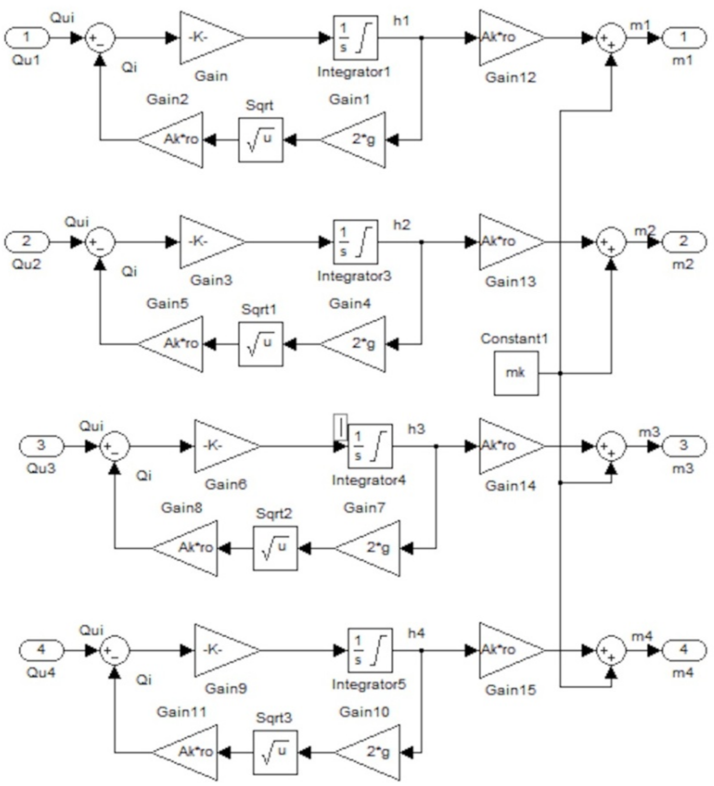
Na temelju prethodnih jednadžbi izrađen je simulacijski model koristeći *Matlab Simulink* programski paket.



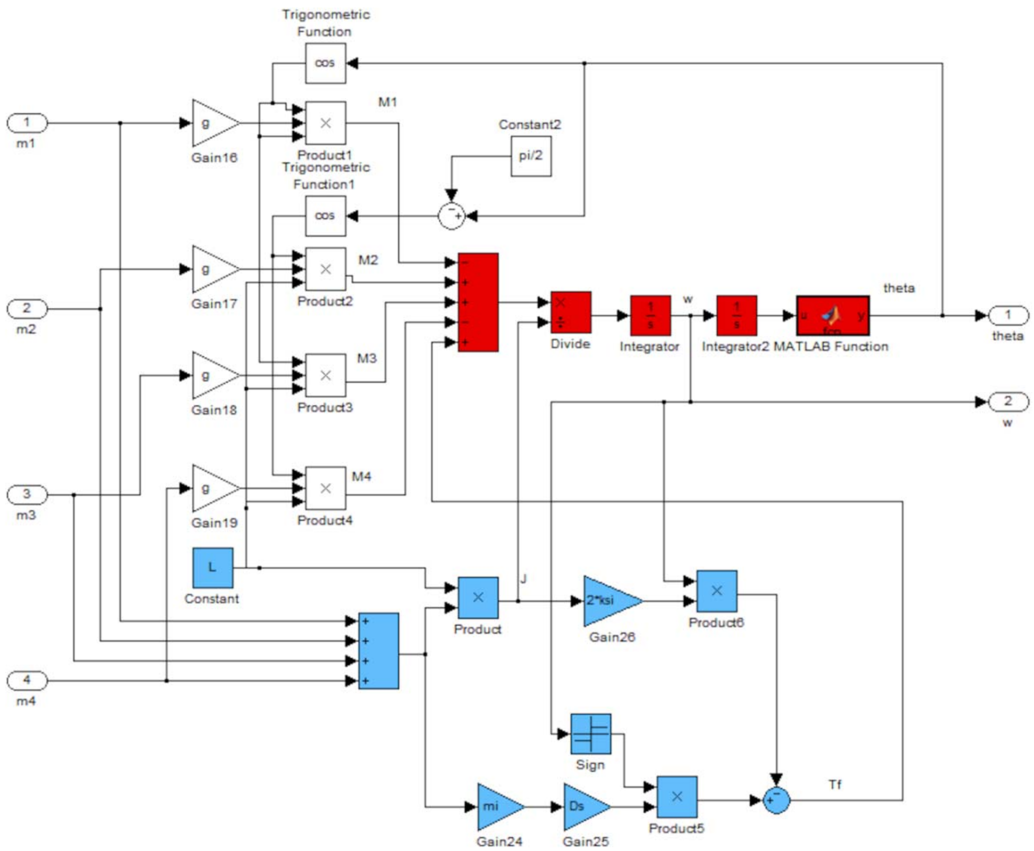
Slika 13 – Simulink model vodeničnog kola



Slika 14 – Modeliranje *Simulink* bloka "Punjenje kanti"



Slika 15 – Modeliranje *Simulink* bloka "Kante"



Slika 16 – Modeliranje *Simulink* bloka "Vodeničko kolo"

Parametri sustava su:

$\rho = 1000$ [kg/m^3]

$g = 9.81$ [m/s^2]

$L = 0.1$ [m]

$D_S = 0.01$ [m]

$\mu = 0.2$

$\zeta = 0.04$

$D_{ul}= 0.02$ [m]

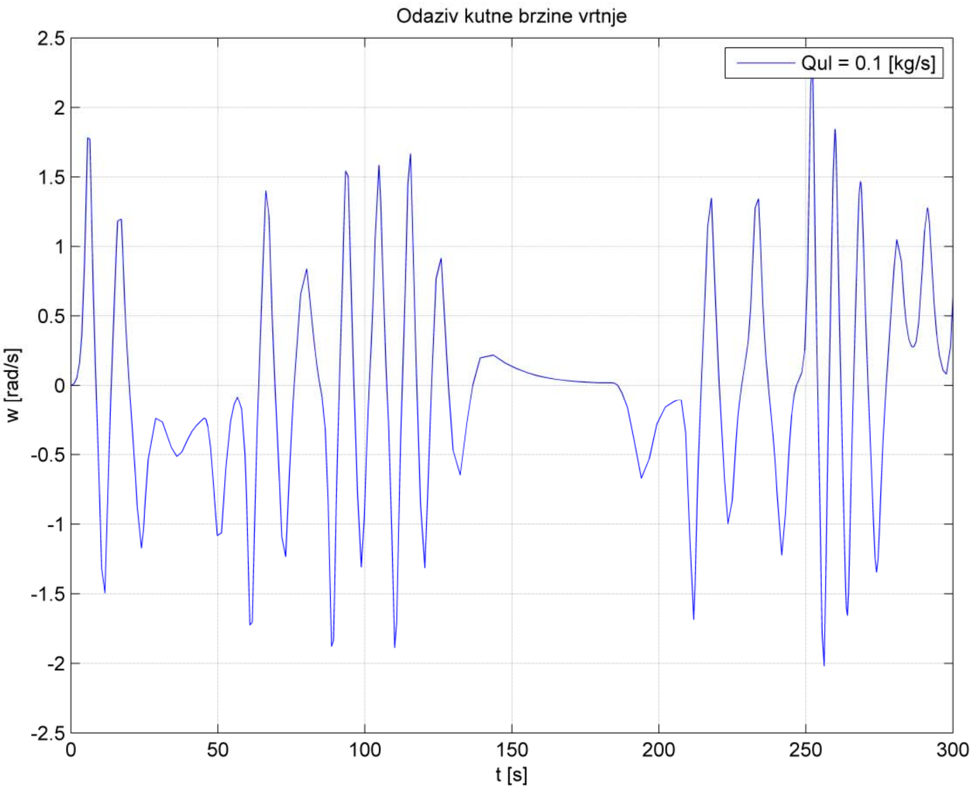
$D_p = 0.01$ [m]

$m_p = 0.2$ [kg]

Početni uvjeti sustava su prazne posude, a kut zakreta i kutna brzina je jednaka:

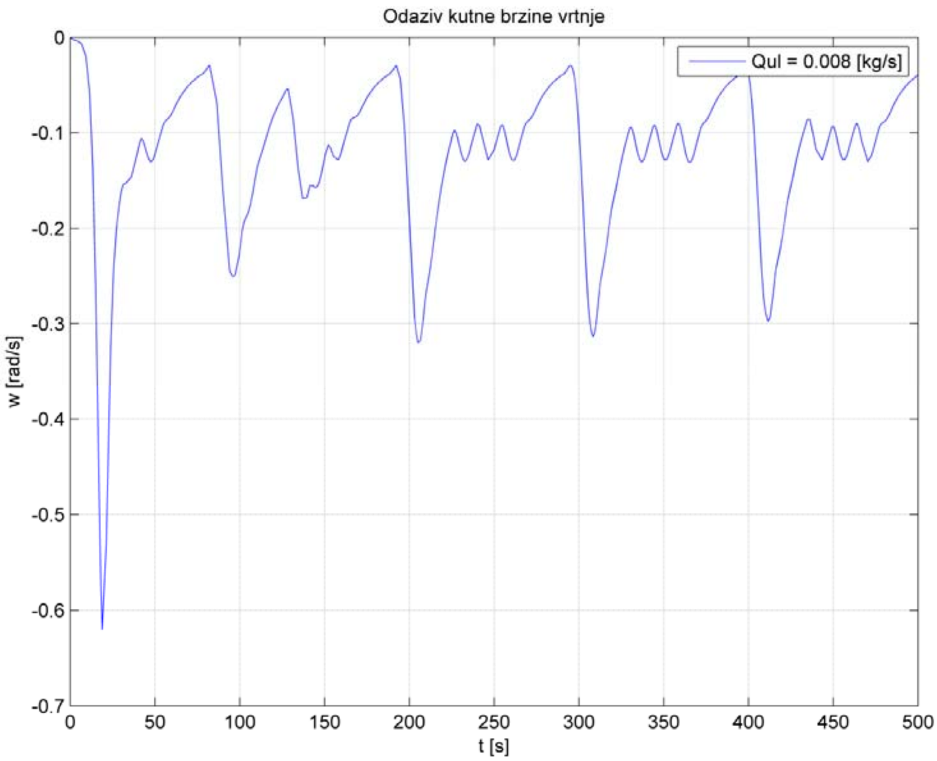
$\theta(0) = 2°$

$\omega(0) = 0.$



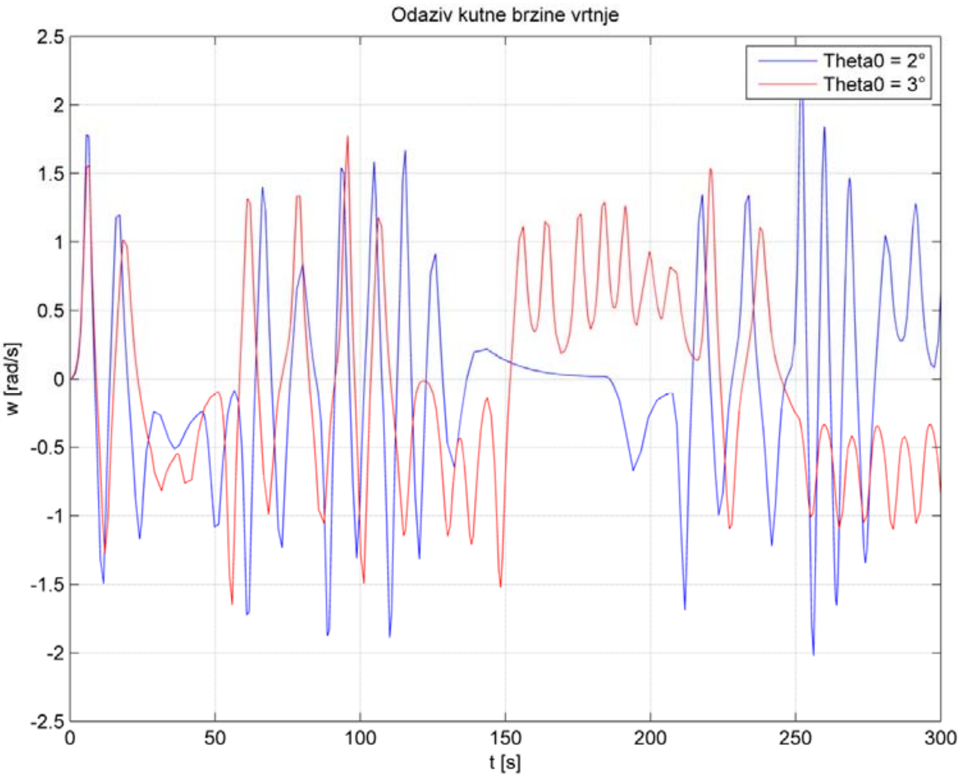
Slika 17 – Odaziv kutne brzine vrtnje

Slika 17 prikazuje odaziv kutne brzine vrtnje iz kojeg možemo uočiti kaotično ponašanje sustava. Naime, promjene brzine nisu pravilne, te nije moguće predvidjeti njezino buduće ponašanja. Za razliku od ovakvog kaotičnog ponašanja, slika 18 prikazuje odaziv kutne brzine vrtnje kod malog ulaznog protoka. Iz odaziva možemo uočiti početno ustaljivanje koje prelazi u pravilan i periodični odaziv brzine. Usporedbom ova dva odaziva možemo zaključiti da se sustav vodeničnog kola kaotično ponaša za određene vrijednosti ulaznog toka.



Slika 18 – Odaziv kutne brzine vrtnje pri malom ulaznom toku

Slika 19 prikazuje odazive brzine vrtnje za različite početne uvjete vrijednosti kuta. Razlika početnih uvjeta iznosi 1˚, te možemo uočiti da, iako sustav kreće iz početnih točaka, jako male razlike odstupanja u odazivu vrlo brzo nastupaju. Nakon 25 s promatrana dva odaziva su sasvim drugačija i ne poklapaju se.



Slika 19 – Odaziv kutne brzine vrtnje za različite početne kuteve

4. PRIMJENA TEORIJE KAOSA

Lorenzova pretpostavka da dugoročna prognoza nema budućnosti pokazala se točnom. S obzirom na složenost sila i procesa koji utječu na oblikovanje vremena, i danas je nemoguće predvidjeti atmosferske prilike dalje od kratkog vremenskog razdoblja. Najsnažnije računalo za prognoziranje vremena na svijetu procesira 400 milijuna operacija svake sekunde (podaci od 2004. godine). Ako se u njega svakoga dana unese 100 milijuna različitih vremenskih mjera iz raznih krajeva svijeta, i takvo snažno računalo može izvesti prognozu samo za deset dana. Pa ipak, nakon dva do tri dana te prognoze postaju upitne, a nakon šest ili sedam dana postaju potpuno neodgovarajuće.

Teorijom kaosa povezana su sva polja znanosti i života. U biologiji se prati populacija vrsta, u društvu kretanje dionica na burzi, ponašanje masa, utjecaj pojedinca na svjetska zbivanja, u meteorologiji opisivanje atmosferskih pojava, turbulencija fluida...

4.1. U tehnici i inženjerstvu

U tehnici se teorija kaosa koristi i poznatija je kao teorija katastrofa. Njome se na taj način istražuju i opisuju, s ciljem otklanjanja, neželjene vibracije avionskih krila, opasna ljuljanja brodova, vibracije mostova, itd. Fraktali su također i osnova računalne grafike.

4.2. U medicini i biologiji

Ljudsko tijelo je primjer složenog dinamičkog sustava i stoga je kamen kušnje svake složenosti. Nijedan predmet proučavanja ne nudi takva kontraritmička gibanja u mjerilima od makroskopskih do mikroskopskih. Nijedan fizikalni sustav nije podložan tako čudesnoj vrsti redukcionizma gdje svaki organ ima vlastiti mikroustroj.

Teorija kaosa se uspješno primjenjuje u medicini. To se može vidjeti na prikazu rada srca i prijelazu iz kaotičnog u regularni sustav i obrnuto. Istraživači sve više proučavaju ljudski organizam kao mjesto gibanja i oscilacija, razvijajući novi način promatranja njegovih raznolikih ritmova. Također je dokazano da je kaos u mozgu bitan u procesu mišljenja. Naime, pojavu shizofrenije karakterizira smanjenje razine kaosa u nervnim procesima. Vjeruje se da upravo zahvaljujući kaosu organizam može prilagodljivije i učinkovitije reagirati na poremećaje. Također se, zbog fraktalne građe unutarnjih organa, razmišlja o tome mogu li se pomoću fraktalne dimenzije pojedinih organa dijagnosticirati bolesti. Fraktalnost se također smatra općim svojstvom morfogeneze.

Također se proučava kaos u respiracijskom sustavu, mehanizmi povratne veze u nadzoru staničnih krvnih elemenata, onkolozi traže periodičnost u nepravilnosti staničnog rasta.

Teorije kaosa, također, daje rješenje problema koji se javlja u ekologiji u predviđanju biološke populacije. Jednadžba koja prati rast populacije vrste bi bila jednostavna kad bi populacija rasla linearno, ali utjecaj grabežljivaca i ograničeni izvori hrane utječu na netočnost same jednadžbe. Moguće je smjestiti varijable unutar određenog raspona, ali nemoguće ih je kontrolirati u tolikoj mjeri da sa sigurnošću možemo predvidjeti konačan rezultat.

4.3. U društvenim znanostima

Teorija determinističkog kaosa u društvenim znanostima isprva se počela primjenjivati u politologiji i to u sklopu ispitivanja senzibiliteta javnog mnijenja u tijeku predizbornih kampanja u SAD-u. Danas su izbori izvrstan primjer kaosa odnosno efekta leptirovih krila gdje su razlozi zbog kojih birač glasuje za neku stranku ili pojedinca vrlo osjetljivi i promjenjivi. Teorijom kaosa bave se i sociolozi koji proučavaju anomalije koje izazivaju znanstvene revolucije. Teoretičari kaosa tvrde da se te anomalije mogu protumačiti kao deterministički kaotični transferi koje dovode u fokus novu paradigmu.

Teorija determinističkog kaosa sve se više rabi i u mnogim drugim aplikativnim sociološkim znanostima. Primjenom specijalnih analitičkih postupaka za mjerenje kaosa istraživači su dokazali prisutnost kaotičnih režima i u okviru obiteljskog sustavnog pristupa u tijeku liječenja alkoholizma pojedinih članova obitelji. U posljednje vrijeme brojna se istraživanja vrše i u primjeni teorije determinističkog kaosa u kompleksnom metodskom pristupu u proučavanju ponašanja neke zajednice u tijeku kriznih ili katastrofičnih događaja koji mogu pokrenuti kaotičnu dinamiku (npr. poznata zbivanja 11. rujna 2001. u New Yorku). Cilj znanstvenika je bolje pružanje stručne pomoći zajednici kako cijeli sustav te zajednice ne bi došao do stanja potpune reorganizacije i anarhije. Mnogi teoretičari iz društvenih i politoloških znanosti drže da je teorija kaosa pogodna za istraživanje i evaluaciju prakse u tim disciplinama jer nudi brojne mogućnosti dubljeg razumijevanja načina na koji se socijalni i politički sustavi mijenjaju i razvijaju u skladu s kaotičnim okruženjem. Teorija kaosa također ima veliku vrijednost za istraživače i praktičare, jer se pomoću specifičnih metoda i tehnika kvantifikacije kaosa u društvenim i politološkim znanostima te u mnogim aplikativnim disciplinama, mogu s većom točnošću predvidjeti kretanja sustava te ublažiti njegove negativne učinke.

4.4. U ekonomiji

Do sada su različite nepravilnosti varijabli, kao što su BDP, zapošljavanje, kamate, devizni tečajevi ili burzovni indeksi općenito bile pripisivane nasumičnim šokovima. Mogućnost objašnjenja takvih događanja i determiniranja, makar jednostavnih determinističkih kaotičnih modela, kako bi se mogle predvidjeti takve pojave, privukla je pažnju brojnih ekonomskih teoretičara.

Posebno zanimljiv aspekt primjene teorije kaosa jesu financije: istovjetni modeli primjenjuju se u fizici i ekonomskom prognoziranju. Burzu dionica možemo definirati kao dinamički sustav socio-ekonomskog ponašanja: to je visokodimenzijski kaos s velikim brojem različitih parametara, a zbog činjenice da burzovne transakcije nisu dovoljno dugo stacionarne, još nitko nije uspio identificirati pripadni kaotični atraktor.

Tržišta vrijednosnih papira također se mogu opisati kao nelinearni, dinamički sustavi. Efekt leptirovih krila snažno i brzo djeluje i na globalnom tržištu vrijednosnih papira. Internet je omogućio da svaka i mala promjena burzovnih indeksa na tokijskoj burzi gotovo istodobno izaziva promjene na burzi u New Yorku.

5. ZAKLJUČAK

Kaos se rabi u opisivanju prividno kompleksnog ponašanja sustava za koje pretpostavljamo da su jednostavni. Kaos se javlja kada je neki sustav vrlo osjetljiv na početna stanja. Početna stanja predstavljaju determinirane vrijednosti mjera pri nekom zadanom početnom vremenu. Kaos je ne samo teorija već i metoda, ne samo skup uvjerenja već i način provođenja znanosti.

Posebno značenje teorije kaosa je u njezinoj interdisciplinarnosti. Svojom univerzalnošću kaos prožima raznorodne discipline i polja ljudskog djelovanja: od dinamike fluida i prognoze vremena, preko anatomije, proučavanja srčanih aritmija, biljnih i životinjskih populacija, sve do fluktuacija cijena dionica na burzama. Teorija kaosa otvorila je nove filozofske vidike, tjerajući nas na preispitivanje stavova o determinizmu zbivanja, odnosu znanstvenih i religijskih spoznaja, o evoluciji i slobodi volje, društvenim i političkim revolucijama, te ulozi pojedinca u povijesti. Često naoko nevažne činjenice iz jednog područja predstavljaju ključ rješenja u nekom drugom području.

Kaos nam daje jedan novi pogled na svijet koji nas okružuje. Međutim iz te iste teorije proizlazi i konačno ograničenje naše spoznaje. Naime, što god učinili i kako god preciznim učinimo naša računala, ona će uvijek biti ograničena određenom memorijom. Na taj način početni uvjeti nikada neće biti apsolutno točno uneseni, a time niti zbivanja biti predvidiva. Uvijek će postojati mjesto za kaos. Iz toga proizlazi da će budućnost zauvijek ostati skrivena i nepredvidiva. Ona će uvijek nepoznata čekati dolazeće generacije da je otkrivaju i svojom težnjom napretku i novim znanstvenim spoznajama učine boljom no što je to ona sada.

6. LITERATURA

1. M. Pašić, *Uvod u matematičku teoriju kaosa za inženjere*, Skripta FER, Zagreb,2005. (5. poglavlje)
2. James Gleick, *Kaos-stvaranje nove znanosti*, 1991
3. M.W.Hirsch, S.Smale, R.L.Deveney, *Diferential equations, Dynamical Systemsand an Introduction to Chaos* (14. poglavlje)
4. Steven H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and Chaos*, Perseus Books Publishing, New York, 1994
5. M. Kolaković, I. Vrankić, Teorija kaosa, *Zbornik Ekonomskog fakulteta* u Zagrebu, godina 2, broj 1, 2004
6. Mirko Orlić, Edward N. Lorenz – znanstvenik koji je zbunio Nobelove komitete, *Priroda*, vol 98, 2008
7. J.Mendelson, E. Blumenthal, Chaos Theory and Fractals,
8. J. Louis Tylee, Chaos in a Real System, *Simulation,* 64: 3, 176-183, 1995
9. Hendrik Richter, Controling the Lorenz system: combining global and local schemes, *Chaos, Solitions and Fractals* 12 (2001) 2375 – 2380
10. GoranKrstačić, Nelinearna dinamika i "teorija kaosa" u kardiologiji, *Medix*, godina 10, dvobroj 54/55,2004
11. Neki internet linkovi:
    a. http://www.tnellen.com/alt/chaos.html
    b. http://www.ace.gatech.edu/experiments2/2413/lorenz/fall02/
    c. http://www.hypertextbook.com/chaos/
    d. http://www.math.cornell.edu/
    e. http://ib.cnea.gov.ar/thelerg/melon/doc/
    f. http://www.inet.hr/~ivnakic/kaos/index.htm
    g. http://www.zvjezdarnica.com
    h. http://elgrunon.wordpress.com