SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA
I TEHNOLOGIJE
ZAVOD ZA MATEMATIKU

Uvod u matematičke metode u inženjerstvu

SEMINARSKI RAD

Fraktali

VODITELJI:
Dr. sc. Ivica Gusić
Dr. sc. Miroslav Jerković

STUDENTI:
Brdar Katarina
Dobrinić Mateja
Joskić Robert

Zagreb, lipanj 2012.

SADRŽAJ:

1. FRAKTALI

Fraktali su geometrijski objekti čija je fraktalna dimenzija strogo veća od topološke dimenzije. Drugim riječima, to su objekti koji daju jednaku razinu detalja neovisno o razlučivosti koju koristimo. Fraktale je moguće uvećavati beskonačno mnogo puta, a da se pri svakom novom povećanju vide neki detalji koji prije povećanja nisu bili vidljivi, i da količina novih detalja uvijek bude otprilike jednaka.

Osnovna svojstva fraktala:

1) *Samo-sličnost* - svojstvo objekta da sliči sam sebi bez obzira koji dio promatrali i koliko ga puta uvećavali.

2) *Fraktalna dimenzija* - vrijednost koja nam daje uvid u to u kojoj mjeri neki fraktal ispunjava prostor u kojem se nalazi. Za razliku od fraktalne dimenzije euklidska dimenzija koristi se kako bi se izrazila linija (jedna dimenzija), površina (dvije dimenzije) i prostor (tri dimenzije) te može biti bilo koji prirodan broj ili nula: 0,1,2,3,4,5,… Nasuprot tome fraktalna dimenzija se koristi kako bi se izrazila **gustoća** kojom objekt ispunjava prostor odnosno koliko se novih dijelova pojavljuje pri povećanju rezolucije. Fraktalna dimenzija nije cijeli broj i u pravilu je veća od euklidske dimenzije.

   Primjer:
   Fraktalna dimenzija zapadne obale Engleske je 1,3 dok je Norveške obale 1,52 , dakle veće su od 1, što je euklidska dimenzija obale shvaćene kao krivulje. To također znači da Norveška ima razvodnjeniju obalu od Engleske. Samo se približno, eksperimerntalno, može govoriti o fraktalnoj dimenziji obale.

   Izraz po kojem se mjeri dimenzija je:

$$d=\log(n)/\log(s)$$

   gdje je : d – fraktalna dimenzija
   n - broj novih kopija objekta promatrano nakon uvećanja
   s – faktor uvećanja

Primjer:

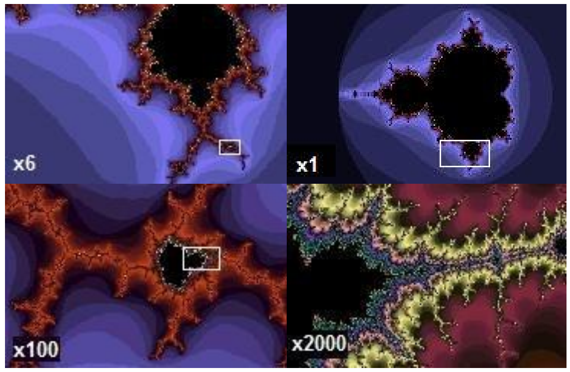
Cantorov skup C3 ima dim C3 = log2/log3 = 0.63..... < 1;

Kochina krivulja KK ima dimKK = log4/log3 = 1.2618..... > 1.

3) *Oblikovanje iteracijom* – svojstvo da se objekt generira nekim matematičkim ili geometrijskim postupkom, tako da se u osnovni (početni) objekt iterativno ugrađuju svojstva generatora.

1.1. Povijest fraktala

Fraktali su ljudima poznati od pamtivijeka, samo što ih kao takve nisu prepoznavali. Dokumentirani prikaz fraktala nalazimo već 1525. u "Priručniku za slikanje" Albrechta Dürera, gdje opisuje uzorke nastale korištenjem pentagona. To uvelike podsijeća na kasniji primjer fraktala Sierpińskog (poljski matematičar Wacław Franciszek Sierpiński). U 17. stoljeću Leibniz je definirao ponavljanje samosličnosti, međutim uzeo je u obzir da samo linija može biti sebi slična. Od tada sve do 19. stoljeća nije se pojavila slična definicija. Tek je 1872. Karl Weierstrass dao primjer funkcije kojom je definirao samosličnost. Međutim definicija je bila odveć apstraktna pa je Helge von Koch 1904. godine dao geometrijsku interpretaciju slične funkcije, koja je danas poznata kao *Kochova pahuljica*. Nedugo kasnije, 1915. je Waclaw Sierpinski kreirao svoj uzorak fraktala pomoću trokuta. Iz tog razdoblja dolaze fraktalni prikazi poput onih Henria Poincaréa, Felixa Kleina, Pierrea Fatoua, Gastona Julie i Georga Cantora. Svi su oni krajem 19. i početkom 20. stoljeća proučavali te fascinantne tvorevine dobivene iteracijom, ali bez računala nisu mogli uočit sav njihov značaj. Većina ih je smatrala krivuljama, a ne složenim geometrijskim objektima. Takvo poimanje tih zanimljivih sebi sličnih matematičkih objekata zadržalo se sve do kraja 20. stoljeća. Tada se za samosličnost počeo zanimati Benoit Mandelbrot. Nakon niza istraživanja i mjerenja dužine Britanske obale, temeljenih na ranijem radu Lewisa Fry Richardsona, Mandelbrot je napokon 1975. skovao riječ fraktal i definirao njeno značenje. Svoje otkriće potkrijepio je atraktivnim računalnim prikazima, koji su i danas najčešća predodžba fraktala.

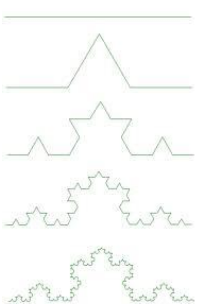


Slika 1. "Mandelbratovi skupovi" – najpoznatiji fraktalni skup koji je kreirao otkrivač fraktala Benoit Mandelbrot 1975.

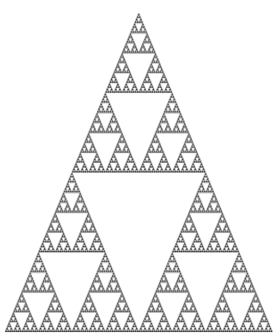
1.2. Podjela fraktala

1) Podjela prema stupnju samosličnosti

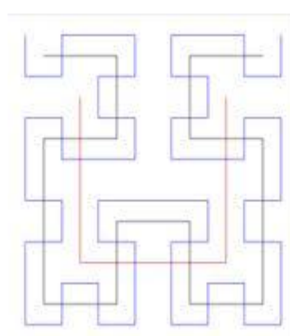
Potpuno samoslični fraktali - sadrže kopije sebe koje su slične cijelom fraktalu.



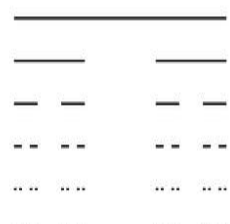
Slika 2. Kochova krivulja



Slika 3. Trokut Sierpińskog

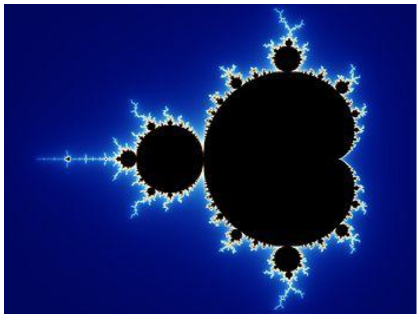
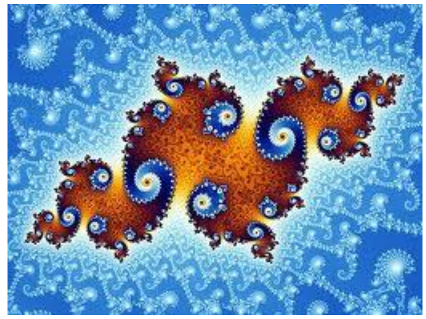


Slika 4. Hilbertova krivulja



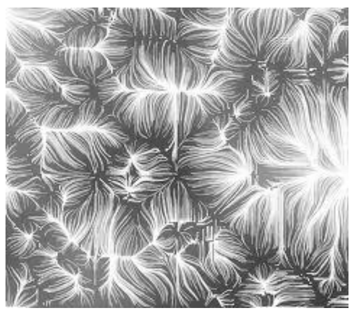
Slika 5. Cantorov skup

Kvazi samoslični fraktali - fraktal sadrži male kopije sebe koje nisu slične cijelom fraktalu, nego se pojavljuju u iskrivljenom obliku.

Slika 6. Mandelbrotov skup *Slika 7. Julijev skup*

Statistički samoslični fraktali - fraktal ne sadrži kopije samog sebe, ali neke njegove osobine (npr. fraktalna dimenzija) ostaju iste pri različitim mjerilima.



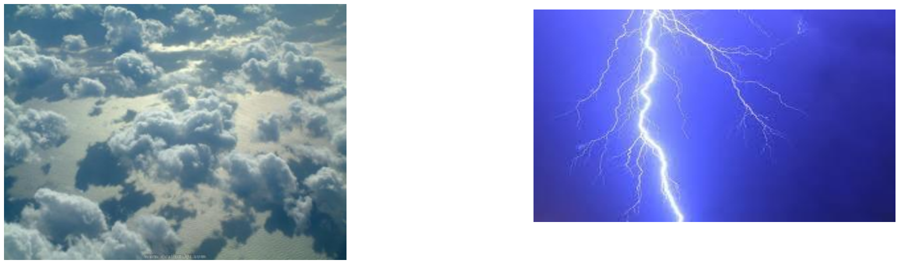
Slika 8. Perlinov šum

2) Podjela prema načinu nastanka

Iterativni fraktali - nastaju kopiranjem te rotiranjem i/ili translatiranjem kopije, te mogućim zamjenjivanjem nekog elementa kopijom.

Rekurzivni fraktali - određeni su rekurzivnom matematičkom formulom koja određuje pripada li određena točka prostora (npr. kompleksne ravnine) skupu ili ne.

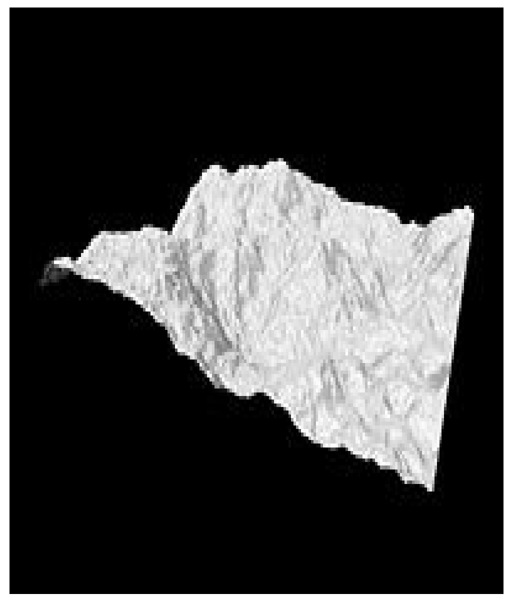
Slučajni (random) fraktali – posjeduju najmanji stupanj samosličnosti i nalazimo ih često u prirodi (obale, drveće, oblaci, munje,…).



Slika 9. Slučajni fraktali (oblaci i munje)

1.3. Primjena

Najjednostavniji primjer primjene fraktala u računalnoj grafici jest crtanje terena, posebice planina. Planina se može crtati tako da se horizontalno položenom trokutu svaki vrh povisi ili snizi za slučajno odabranu vrijednost. Tako dobivenom trokutu spoje se polovišta stranica te se tako dobivaju četiri nova trokuta. Srednjemu od njih (omeđen trima dužinama koje spajaju polovišta stranica prvotnog trokuta) povisimo ili snizimo vrhove kao i početnom trokutu, ali koristimo dvostruko manje vrijednosti. Postupak sada ponovimo za sva četiri trokuta. Planine se mogu napraviti i na drugi načine, kao što je npr. Perlingov šum.



Slika 10. Planina stvorena koristeći Perlinov šum

Pomoću sustava iteriranih funkcija u tri dimenzije moguće je kreirati raznoliko raslinje – grmove, drveće, busene trave i sl. Ako isto napravimo u trodimenzionalnom sustavu te na kraj svake "grančice" dodamo list, rezultati mogu biti zapanjujuće slični stvarnim pojavama u prirodi.

Slika 11. Raslinje stvoreno pomoću fraktala

Od manje važnih primjena tu je (naravno, vrlo ograničeno) predviđanje nekih stohastičkih procesa kao što su potresi; slaganje snopova optičkih vlakana, oponašanje rada neuronskih mreža za razvoj umjetne inteligencije itd. Za male uređaje kao što su mobiteli proizvode se antene u obliku fraktala koje zbog toga mogu koristiti širok spektar frekvencija ne zauzimajući mnogo mjesta.

1.4. Matematička konstrukcija fraktala

Primjenjuje se takozvana procedura IFS (iterated function sheme), a za nju je potrebno imati:

I – inicijator; G – generator; m – sličnosti S koje prevode inicijator u generator odnosno

$$G = S_1(I) \cup S_2(I) \cup \dots \dots S_{m-1}(I) \cup S_m(I) = \bigcup_{k=1}^{m} S_k(I) = S(I)$$

potom se formira niz skupova E_n na slijedeći način:

$E_1 = G, E_2 = S(E_1), \ldots \ldots, E_{n+1} = S(E_n)$

$$F = S(F) = \bigcup_{k=1}^{m} S_k(F),$$

gdje je F fraktalni skup koji dobivamo na kraju.

- IFS za Cantorov skup

inicijator je I=[0,1]   0______________________1

generator je E_1=G=   0_____1/3   2/3_____1

definiramo:

$E_{n+1} = S_1(E_n) \cup S_2(E_n)$

gdje su

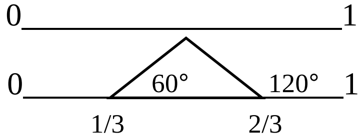
$S_1(x) = H_{1/3}(x) = \frac{1}{3}x, S_2(x) = T_{(2/3,0)} \cdot H_{1/3}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

Na kraju Cantorov skup F zadovoljava: $F = S_1(F) \cup S_2(F)$ i $F \approx E_n$ za dovoljno veliki n.

- IFS za Kochovu krivulju

inicijator je I=[0,1]   0______________________1

generator je G je



definiramo

$E_{n+1} = S_1(E_n) \cup S_2(E_n) \cup S_3(E_n) \cup S_4(E_n)$, gdje su:

$S_1(x,y) = H_{1/3}(x,y) = \frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y$

$S_2(x,y) = T_{(1/3,0)} \cdot R_{\pi/3} \cdot H_{1/3}(x,y) = \left(\frac{1}{6}x - \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y\right)$

$$S_3(x,y) = T_{(1/2,\sqrt{3}/6)} \cdot R_{-\pi/3} \cdot H_{1/3}(x,y) = \left(\frac{1}{6}x + \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$S_4(x,y) = T_{(2/3,0)} \cdot H_{1/3}(x,y) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y\right)$$

Na kraju Kochova krivulja F zadovoljava : $F = S_1(F) \cup S_2(F) \cup S_3(F) \cup S_4(F)$ i $F \approx E_n$ za dovoljno veliki n.

2. ZAKLJUČAK

U seminarskom radu obrađivala se tema fraktali. Tema je obrađena s teorijskog stajališta i u programu Matlab napravio se program za Kochovu krivulju i Cantorov skup.

Fraktali su objekti koji daju jednaku razinu detalja neovisno o razlučivosti koju koristimo, a njihova osnovna svojstva su samo-sličnost, fraktalna dimenzija i oblikovanje iteracijom. Moguća je njihova podjela prema stupnju samosličnosti i prema načinu nastanka.

U programu Matlab napravljena su dva programa koja prikazuju četiri stupnja iteracije rekurzivnim algoritmom, uključujući i nulti, za Kochovu krivulju i Cantorov skup. Pokretanjem programa inicijator se iterativno transformira u generator na temelju svojstava sličnosti (za Cantorov skup je to homotetija i translacija, a za Kochovu krivulju homotetija, translacija i rotacija) koja čuvaju oblike, a mijenjaju položaj i veličinu kutova, te nastaju fraktali.

3. PRILOG

ISPIS MATLAB-ovog KODA u *m-fileu*

Za Kochovu krivulju

```
function koch(level,mplot)

clc;



if(nargin ~= 2)
   level=5;
   mplot=1;
end


if(mplot==0)
   singleplot(level)
else
   multiplot(level)
end



%-------------------------------------------------------------
% Run single plot
%-------------------------------------------------------------

function singleplot(level,x1,y1,x2,y2)

figure(1)
clf;

x1=zeros(1,level);
y1=zeros(1,level);
x2=zeros(1,level);
y3=zeros(1,level);
x1(level)=0;
y1(level)=0;
x2(level)=1;
y2(level)=0;

subkoch(level,x1,y1,x2,y2);

xlim([-0.2,1.2]);
ylim([-0.2,1.2]);
title(sprintf('Cantor Fractal, level=%g',level));
set(gca,'XTickLabel',{''})
set(gca,'YTickLabel',{''})
```

```
set(gca,'XTick',[])
set(gca,'YTick',[])
%axis off;    % to remove the boxes
%set(findobj(gca,'Type','line'),'Color','k')   % black
%set(findobj(gca,'Type','line'),'LineWidth',2) % thick


%--------------------------------------------------------------
% Run multi-plot
%--------------------------------------------------------------

function multiplot(level,x1,y1,x2,y2)

figure(1)
clf;

for ilevel=1:level

subplot(level,1,ilevel)

x1=zeros(1,ilevel);
y1=zeros(1,ilevel);
x2=zeros(1,ilevel);
y3=zeros(1,ilevel);
x1(ilevel)=0;
y1(ilevel)=0;
x2(ilevel)=1;
y2(ilevel)=0;

subkoch(ilevel,x1,y1,x2,y2);

xlim([-0.2,1.2]);
ylim([-0.1,0.35]);
text(-0.1,0.03,sprintf('(%g)',ilevel),'fontsize',14);
%title(sprintf('Cantor Fractal, level=%g',level));
set(gca,'XTickLabel',{''})
set(gca,'YTickLabel',{''})
set(gca,'XTick',[])
set(gca,'YTick',[])
%axis off;    % to remove the boxes
%set(findobj(gca,'Type','line'),'Color','k')   % black
%set(findobj(gca,'Type','line'),'LineWidth',2) % thick

end


%--------------------------------------------------------------
% Compute / Draw the 4 segments
%--------------------------------------------------------------

function subkoch(k,x1,y1,x2,y2)

% k = iteration level
% A line is drawn when k = 1
```

```
if(k==1)
    plot([x1(k) x2(k)],[y1(k) y2(k)]);
    hold on;
else
    k=k-1;
    dx=x2(k+1)-x1(k+1);
    dy=y2(k+1)-y1(k+1);
    L=sqrt(dx^2+dy^2); % segment length
    r=sqrt(1/3^2 - 1/6^2);
    % left segment
    x1(k)=x1(k+1);
    y1(k)=y1(k+1);
    x2(k)=x1(k+1)+dx/3;
    y2(k)=y1(k+1)+dy/3;
    subkoch(k,x1,y1,x2,y2)
    % middle left segment
    x1(k)=x2(k);
    y1(k)=y2(k);
    x2(k)=0.5*(x1(k+1)+x2(k+1))-r*(y2(k+1)-y1(k+1));
    y2(k)=0.5*(y1(k+1)+y2(k+1))+r*(x2(k+1)-x1(k+1));
    subkoch(k,x1,y1,x2,y2)
    % middle right segment
    x1(k)=x2(k);
    y1(k)=y2(k);
    x2(k)=x2(k+1)-dx/3;
    y2(k)=y2(k+1)-dy/3;
    subkoch(k,x1,y1,x2,y2)
    % right segment
    x1(k)=x2(k);
    y1(k)=y2(k);
    x2(k)=x2(k+1);
    y2(k)=y2(k+1);
    subkoch(k,x1,y1,x2,y2)
end

return
```

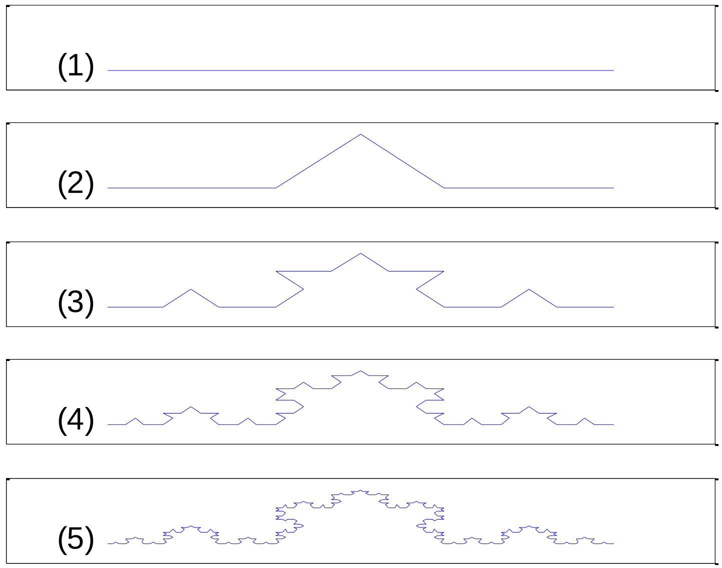
Za Cantorov skup

```
function cantor(level,mplot)

clc;



if(nargin ~= 2)
   level=5;
   mplot=1;
end
```

```
if(mplot==0)
   singleplot(level)
else
   multiplot(level)
end



%--------------------------------------------------------------
% Run single plot
%--------------------------------------------------------------

function singleplot(level)

figure(1)
clf;

a=zeros(1,level);
b=zeros(1,level);
a(level)=0;
b(level)=1;

subcantor(level,a,b);

xlim([-0.2,1.2]);
title(sprintf('Cantor Fractal, level=%g',level));
set(gca,'XTickLabel',{''})
set(gca,'YTickLabel',{''})
set(gca,'XTick',[])
set(gca,'YTick',[])
%axis off;    % to remove the boxes
%set(findobj(gca,'Type','line','Color','k')   % black
set(findobj(gca,'Type','line'),'LineWidth',2) % thick


%--------------------------------------------------------------
% Run multi-plot
%--------------------------------------------------------------

function multiplot(level)

figure(1)
clf;

for ilevel=1:level

subplot(level,1,ilevel)

a=zeros(1,ilevel);
b=zeros(1,ilevel);
a(ilevel)=0;
b(ilevel)=1;

subcantor(ilevel,a,b);
```

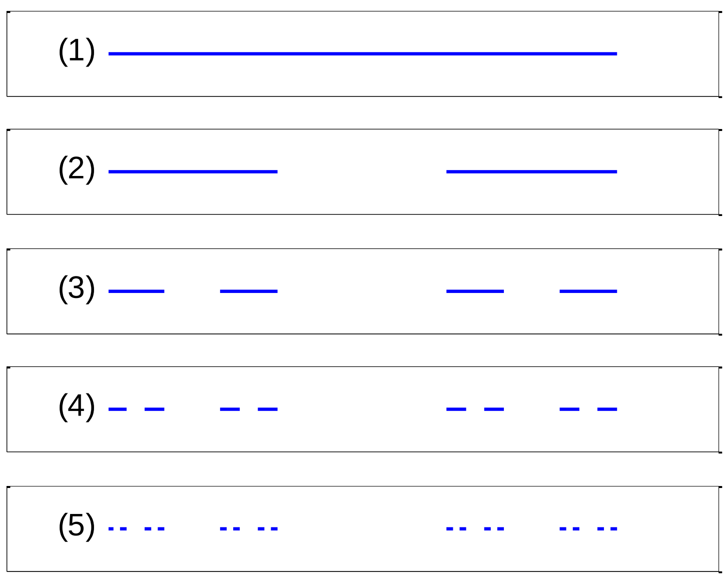
```
xlim([-0.2,1.2]);
text(-0.1,0.1,sprintf('(%g)',ilevel),'fontsize',14);
% title(sprintf('Cantor Fractal, level=%g',level));
set(gca,'XTickLabel',{''})
set(gca,'YTickLabel',{''})
set(gca,'XTick',[])
set(gca,'YTick',[])
%axis off;    % to remove the boxes
%set(findobj(gca,'Type','line','Color','k')   % black
set(findobj(gca,'Type','line'),'LineWidth',2) % thick

end


%-------------------------------------------------------------
% Compute / Draw the segments
%-------------------------------------------------------------

function subcantor(k,a,b)

% k=level

if(k==1)
    plot([a(k) b(k)],[0 0]);
    hold on;
else
    k=k-1;
    L=b(k+1)-a(k+1); % segment length
    % left segment
    a(k)=a(k+1);
    b(k)=a(k+1)+L/3;
    subcantor(k,a,b)
    % right segment
    a(k)=b(k+1)-L/3;
    b(k)=b(k+1);
    subcantor(k,a,b)
end

return
```

Ispis Matlab-ovog komandnog prozora (*command windowsa)* za pokrenut program za Kochovu krivulju.



Slika 3.1. Konstrukcija Kochove krivulje

Ispis Matlab-ovog komandnog prozora (*command windowsa)* za pokrenut program za Cantorov skup.



Slika 3.2. Konstrukcija Cantorovog skupa

4. LITERATURA

1. M. Pašić, Uvod u matematičku teoriju kaosa za inženjere, Skripta FER, Zagreb, 2005. (57.-83.)
2. http://hr.wikipedia.org/wiki/Fraktal
3. http://www.viva-fizika.org/fraktali-ii-deo/
4. http://elgrunon.wordpress.com/2007/03/25/kochova-pahuljica-cudoviste-zarobljeno-unutar-savrsenstva/