

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE
SVEUČILIŠNI DIPLOMSKI STUDIJ

DINAMIČKI MODEL LJUBAVI
MODEL ROMEO I JULIJA

Seminarski rad iz kolegija
Uvod u matematičke metode u inženjerstvu

Studenti:

Mateja Đud

Iva Simović

Zrinka Srdović

Mentor: dr. sc. Ivica Gusić,
red. prof

Zagreb, lipanj 2013.

SADRŽAJ

1. UVOD	1
2. DVIODIMENZIONALNI LINEARNI DINAMIČKI SUSTAVI.....	2
3. DINAMIČKI MODEL LJUBAVI	4
4. RJEŠAVANJE MODELA.....	5
5. JEDNAKI ROMANTIČNI STILOVI	7
5.1. Pohotnik i pohotnik	7
5.2. Narcis i narcis.....	9
5.3. Oprezan ljubavnik i oprezan ljubavnik.....	10
5.4. Pustinjak i pustinjak	14
6. SLUČAJEVI BEZ UTJECAJA VLASTITIH OSJEĆAJA	17
6.1. Dva ljubavnika ($b > 0, c > 0$).....	17
6.2. Dva narcisa ($b < 0, c < 0$)	19
6.3. Narcis i ljubavnik ($bc < 0$).....	20
7. LJUBAVNICI POTPUNE SUPROTNOSTI	23
7.1. Pohlepnik i pustinjak	23
7.2. Narcis i ljubavnik	28
8. OSTALE KOMBINACIJE LJUBAVI I RAVNODUŠNI ROMEO	33
8.1. Ljubavnik i pohlepnik	33
8.2. Ljubavnik i pustinjak.....	36
9. RAVNODUŠNI ROMEO	39
10. ZAKLJUČAK	42
11. LITERATURA.....	43

1. UVOD

Ljubav može opisivati snažan osjećaj kao zadovoljavanje osnovnih emocionalnih potreba te pruža najintenzivniji osjećaj bliskosti.¹ Postoji mnogo vrsta ljubavi, uključujući intimnost, strast i predanost (Sternberg 1986.) te se svaka vrsta sastoji od više različitih osjećaja. Osim druge osobe, može se voljeti sebe, život, čovječanstvo, itd. Međuljudska ljubav je odnos između dvije osobe veći od same naklonosti jedne prema drugoj te je usko vezana s međuljudskim odnosima (ljubav između članova obitelji, prijatelja...). Neuzvrćena ljubav se odnosi na one osjećaje ljubavi koji nisu uzvrćeni. Suprotno od ljubavi ne mora biti mržnja, ta dva osjećaja mogu postojati uzajamno te netko može istovremeno voljeti neke osobine partnera, a neke mrziti.

Nerealno je pretpostaviti da je nečija ljubav uzrokovana samo vlastitim osjećajima i osjećajima druge osobe, neovisno o drugim utjecajima, i da su parametri koji karakteriziraju međudnos nepromjenjivi te stoga isključuju mogućnost učenja i prilagođavanja. Općenito, ljubav je teško opisati matematički. Dinamički model ljubavi još je 1960. počeo opisivati Rapoport, a proučavali su ga i Radzicki (1993.) i Strogatz (1994.). Iako se dinamički modeli mogu u određenom smislu zamisliti kao priče koje pričaju o razvoju situacije tijekom vremena, iz ovakvog se opisa ljubavnih odnosa jasno može vidjeti njihova složenost kao i činjenica da na priču svakog pojedinca utječu različiti faktori i to različitim intenzitetom. Činjenica da svaka osoba može prepoznati više vrsta ljubavi također je navedena kao još jedan od problema kod modeliranja ljubavnih odnosa.² Cilj ovog rada je opisati složenost sustava koji modelira ljubavne odnose kroz proučavanje zamišljenih ljubavnika, Romea i Julije.

2. DVODIMENZIONALNI LINEARNI DINAMIČKI SUSTAVI

Svi tehnički proračuni temelje se na matematičkim formulacijama uzročno-posljedičnih veza koje su značajne s obzirom na svrhu proračuna. Skup matematičkih objekata koji apstraktno reproduciraju učinke neke uzročno-posljedične veze može se smatrati njenim *matematičkim modelom*.



Slika 1. Blok-dijagram dinamičkog sustava

Sustav je *dinamički* ako uzročno-posljedične veze između uzroka i posljedica unutar sustava sadrže *spremnike* u kojima se u nestacionarnim uvjetima odvijaju *procesi akumulacije*. U fizikalnim dinamičkim sustavima spremnike predstavljaju dijelovi prostora u kojima se akumuliraju veličine za koje vrijedi zakon očuvanja. *Stanje* dinamičkog sustava u svakom je trenutku vremena određeno stupnjem ispunjenosti svih njegovih spremnika veličinama koje se u njima akumuliraju.

Veličine koje neposredno ili posredno ovise o stanju sustava, a značajne su s obzirom na svrhu modeliranja nazivat će se izlaznim veličinama, odnosno *izlazima* modeliranog sustava. Veličine koje svojim djelovanjem na sustav uzrokuju promjene njegova stanja, a time i promjene izlaza, nazivat će se ulaznim veličinama, odnosno *ulazima* sustava.

Matematički model dinamičkog sustava može se shvatiti kao operator koji posredno, putem svojeg rješenja, definira preslikavanje promjena ulaza sustava u promjene izlaza. Budući da matematički model predstavlja matematičku formulaciju uzročnih veza između ulaza i izlaza dinamičkog sustava, modelirani sustav može se zamisliti kao materijalnu realizaciju takvog operatora.

Prikaz svojstava superpozicije i proporcionalnosti kao uvjeta linearnosti dinamičkog sustava bit će sažetiji ako promjenu ulaznog signala tijekom vremena nazovemo *pobudom*, a njome izazvanu promjenu izlaznog signala odzivom sustava na tu pobudu.

Pri proučavanju dinamičkih sustava važnu ulogu ima trajektorija točke $(x_0 ; y_0)$, sa svojstvom da postoji vrijeme t_0 tako da bude $x(t_0) = x_0$ i $y(t_0) = y_0$ (tj. putanja koja prolazi kroz zadani početni uvjet). Prema definiciji, to je skup svih $(x(t), y(t))$, gdje t prolazi svim vremenima (svim realnim brojevima). To je, dakle, skup svih stanja (život) tog dinamičkog sustava koji sadrže stanje (x_0, y_0) . Primjer takvog modela je dinamički model ljubavi. U jednodimenzionalnom problemu promatra se veličina x koja se mijenja u vremenu t . U praksi se puno češće susreću problemi u kojima sudjeluju dvije ili više međusobno zavisnih veličina koje se mijenjaju s vremenom, što znači da vrijednost jedne veličine utječe na vrijednost druge.

U općenitom, n -dimenzionalnom slučaju, dinamički sustav predstavljamo diferencijalnim jednadžbama.

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \quad (1)$$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \quad (2)$$

Rješenja ovog sustava mogu se zamisliti kao trajektorije u n -dimenzionalnom faznom prostoru s koordinatama x_1, \dots, x_n .

Analogno tome za dvodimenzionalni sustav slijedi:

$$x' = f(x, y, t) \quad (3)$$

$$y' = g(x, y, t) \quad (4)$$

Tu je $x' = \frac{dx}{dt}$ i $y' = \frac{dy}{dt}$, a f i g su funkcije triju varijabla koje opisuju brzinu promjene od x , odnosno y u ovisnosti o x , y i t . U svakom trenutku t načelno mogu se odrediti vrijednosti $x(t)$, $y(t)$ tih veličina. Također, moguće je procijeniti brzine njihovih promjena. To dovodi do vrlo važnog poopćenja običnih diferencijalnih jednadžba, odnosno do sustava običnih diferencijalnih jednadžba. Kada te brzine ovise samo o vrijednostima veličina x i y , a ne o promatranom vremenu, dobije se sljedeći autonomni sustav:

$$x' = f(x, y) \quad (5)$$

$$y' = g(x, y) \quad (6)$$

Cilj je riješiti takav sustav, tj. dobiti formule za $x(t)$, $y(t)$ za svaki t i tako opisati život ovog dinamičkog sustava. To općenito nije moguće, pa se pribjegava drugim metodama. Na

primjer, ako je poznato stanje dinamičkog sustavu u trenutku t_0 (tj. početni uvjeti $x(t_0) = x_0$ i $y(t_0) = y_0$) koriste se grafičke ili numeričke metode kojima se mogu približno odrediti $x(t)$ i $y(t)$ za svaki t . Za dobivanje približnih rješenja neophodne su suvremene kompjutorske tehnike.³

3. DINAMIČKI MODEL LJUBAVI

Model privlačnosti među dvijema osobama jednostavno se može prikazati pomoću dvije linearne jednadžbe:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= aR + bJ \\ \frac{dJ}{dt} &= cR + dJ \end{aligned} \tag{7}$$

gdje je $R(t)$ Romeova ljubav prema Juliji u vremenu t , a $J(t)$ Julijina ljubav prema Romeu. Parametri a i b predstavljaju Romeov *romantični stil*, dok parametri c i d opisuju Julijin *romantični stil*. Parametar a govori koliko Romeovi osjećaji utječu na njega, dok b opisuje koliko na njega utječu Julijini osjećaji. Parametar c i d opisuju isto s Julijina gledišta. Može se reći da što su koeficijenti a odnosno d manji, to su Romeo odnosno Julija *inertniji* u smislu promjene osjećaja. Koeficijenti b i c , s druge strane, opisuju u kojoj mjeri osjećaji partnera utječu na osjećaje pojedinog od ljubavnika.

Za Romea se mogu definirati četiri različita romantična stila:

1. **Gorljivi udvarač (pohotnik)** $a > 0$, $b > 0$, *Romeo je ohrabren i svojim i Julijinim osjećajima,*
2. **Narcis** $a > 0$, $b < 0$, *Romeo hoće više od onoga što osjeća, ali se istodobno povlači pri povećanju Julijinih osjećaja,*
3. **Oprezni udvarač** $a < 0$, $b > 0$, *Romeo se boji svojih osjećaja ali je ohrabren Julijinim,*
4. **Pustinjak** $a < 0$, $b < 0$ *Romeo bježi i od svojih i od Julijinih osjećaja.*

Na taj način dobivamo 16 mogućih različitih tipova veza Romea i Julije.

Sustav jednadžbi (7) ima jednu stacionarnu točku kada je $R = J = 0$, a označava ravnodušnost (ravnotežu) između Romea i Julije. Ravnoteža se dobije iz sustava: $dR/dt=0$, $dJ/dt=0$. Inače, to je jedina stacionarna točka ako je determinanta sustava $ad-bc$ različita od 0.²

U daljnjem tekstu, navedene *romantične stilove* (pohlepnik, narcis, oprezni ljubavnik, pustinjač) i njihove međusobne utjecaje prikazat ćemo grafički, pomoću modela u programskom paketu *Matlab R2010b*.

4. RJEŠAVANJE MODELA

Model je rješavan u programskom paketu Matlab R2010b. Posebno je zadana funkcija u zasebnoj M datoteci, što izgleda ovako:

```
function [r,j,t] = Romeo_Juliet(a,b,c,d,t,r0,j0)
DR=['Dr = ',num2str(a),'*r + (',num2str(b),'*j)'];
DJ=['Dj = ',num2str(c),'*r + (',num2str(d),'*j)'];
R0=['r(0) = ',num2str(r0)];
J0=['j(0) = ',num2str(j0)];
[r, j] = dsolve(DR,DJ,R0,J0);

r=subs(r);
j=subs(j);
```

Zatim zadanu funkciju pozivamo u novu skriptu gdje definiramo početne uvjete, te parametre a, b, c, d, i uvjete ispisa traktorija. Odnosno istovremeno tražimo rješenja za više različitih početnih uvjeta:

```
a=0;
b=0;
c=-1;
d=2;
t=0:0.1:10;
Graph_lim=5;

figure (1)
for r0=-2:0.2:2
j0=0;
[r, j]=rij(a,b,c,d,t,r0,j0);
plot(r,j), hold on, grid on;
end
```

```

for j0=-2:0.2:2
r0=0;
[r, j]=rij(a,b,c,d,t,r0,j0);
plot(r,j,'g'), hold on, grid on;
end

axis([-Graph_lim Graph_lim -Graph_lim Graph_lim])
xlabel('Romeo')
ylabel('Julia')
figure (2);
plot (t, r, '--', t, j, '-')
xlabel('vrijeme')
ylabel('Romeo i Julia')
legend('Romeo', 'Julia')

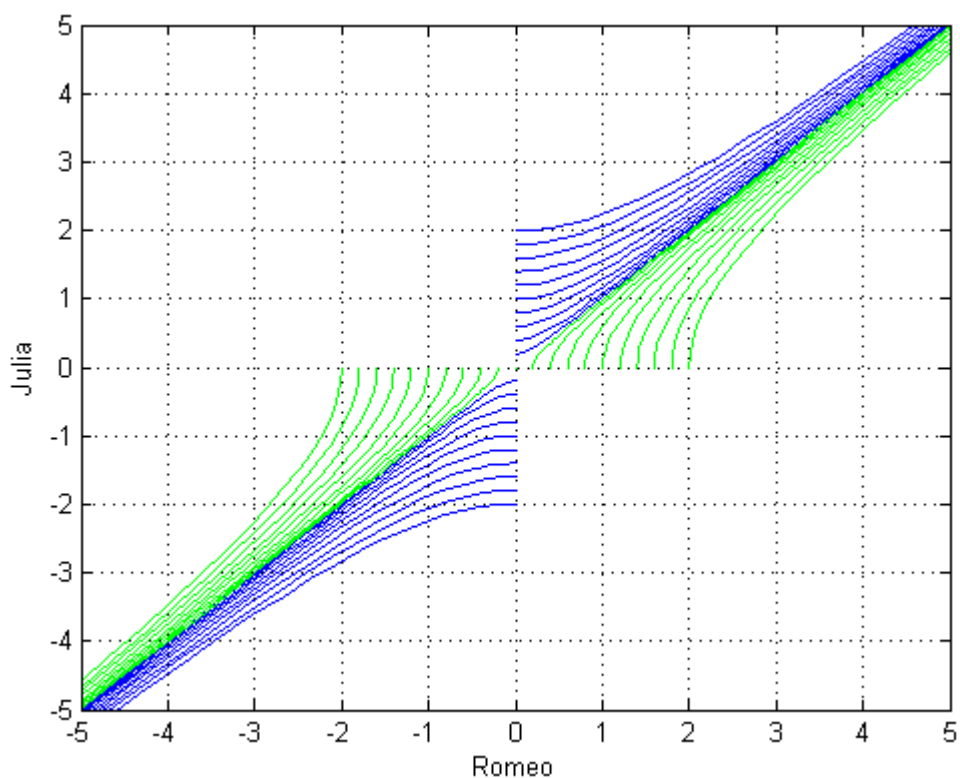
```

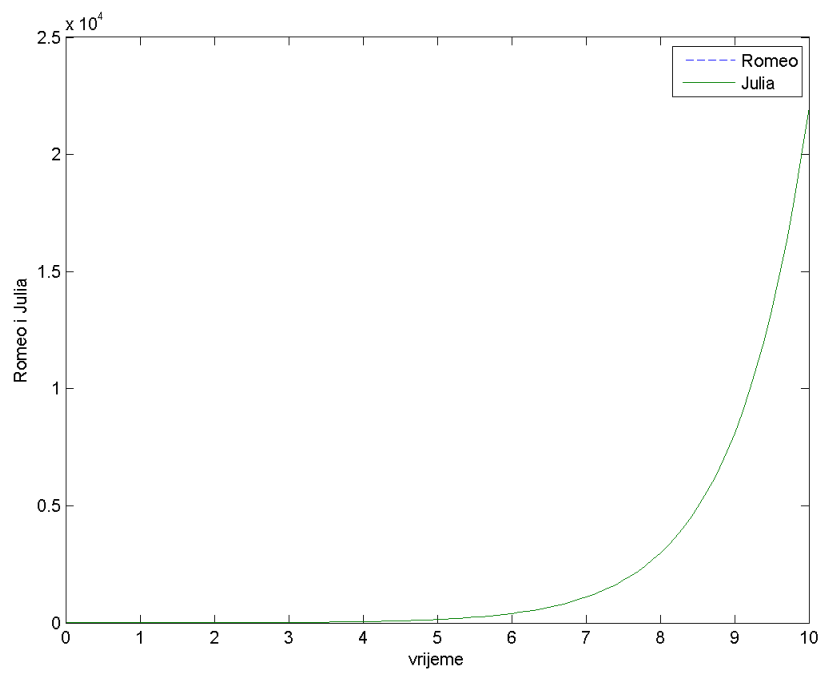
U daljnjem tekstu biti će prikazani odnosi između dvaju partnera (Romea i Julije) kad oni imaju jednake *romantične stilove*.

5. JEDNAKI ROMANTIČNI STILOVI

5.1. Pohotnik i pohotnik

Slučaj kad su Romeo i Julija ohrabreni vlastitim i međusobnim osjećajima. Odabrane vrijednosti parametara su: $a=0$, $b=1$, $c=1$, $d=0$. (Slika 2.) Bez obzira na omjer intenziteta osjećaja ovaj odnos će uvijek završiti tako da se ili oboje beskonačno (jako) vole (I kvadrant) ili beskonačno mrze (III kvadrant), a to pak ovisi o početnim uvjetima, tj. kakav je bio njihov odnos na početku veze.

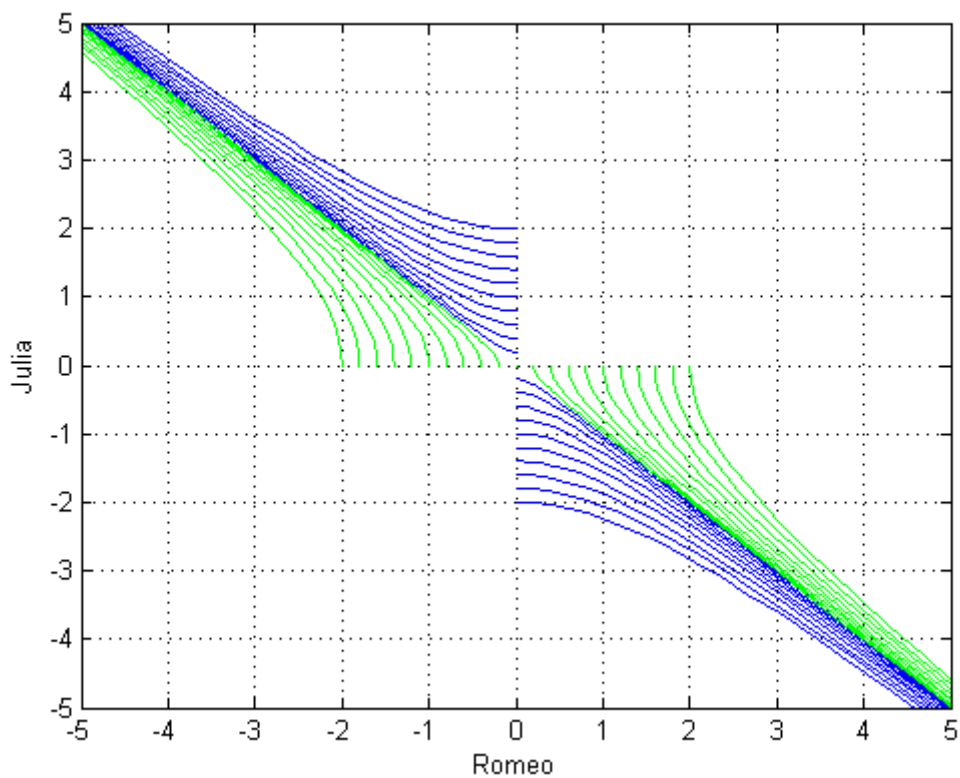


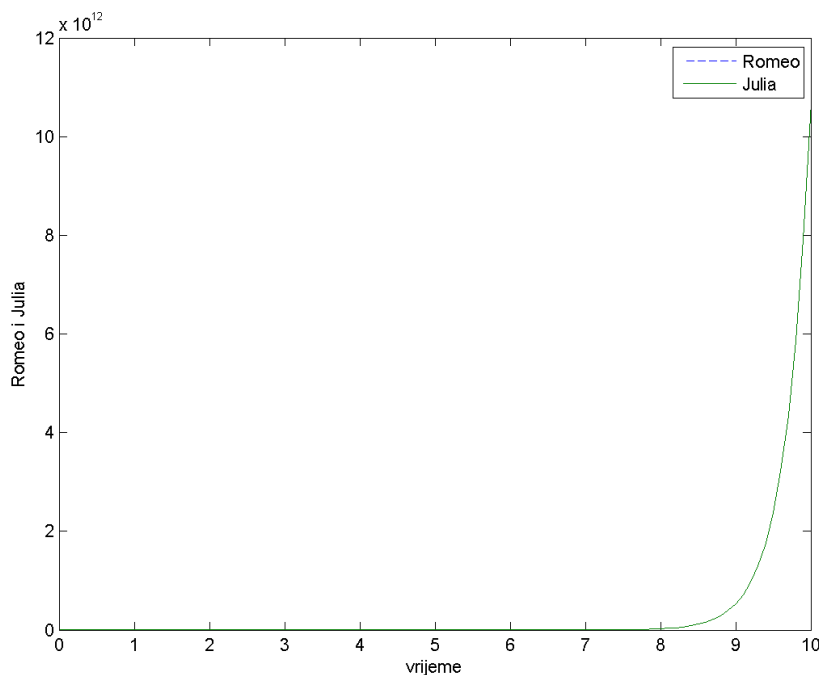


Slika 2. Odnos pohotnika i pohotnika i prikaz promjene velicina x i y tj. odnosa Romea i Julije u ovisnosti o vremenu

5.2. Narcis i narcis

Romeo i Julija su ohrabreni vlastitim osjećajima, ali što Julija više ohrabruje Romea (II kvadrant) on je sve manje voli, odnosno što se više Romeo udvara Juliji ona je sve manje zainteresirana za njega (IV kvadrant). Ovakav odnos će uvijek rezultirati situacijom u kojoj jedno od njih bude beskonačno zaljubljeno, a drugo beskonačno mrzi. Odabrani parametri u ovom slučaju su $a=0$, $b=-1$, $c=-1$, $d=0$. (Slika 3).



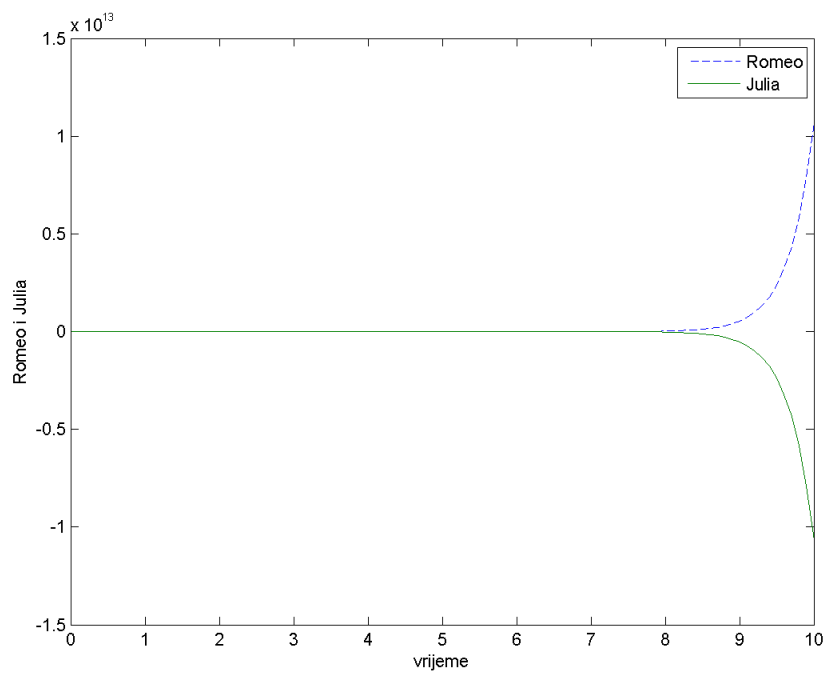
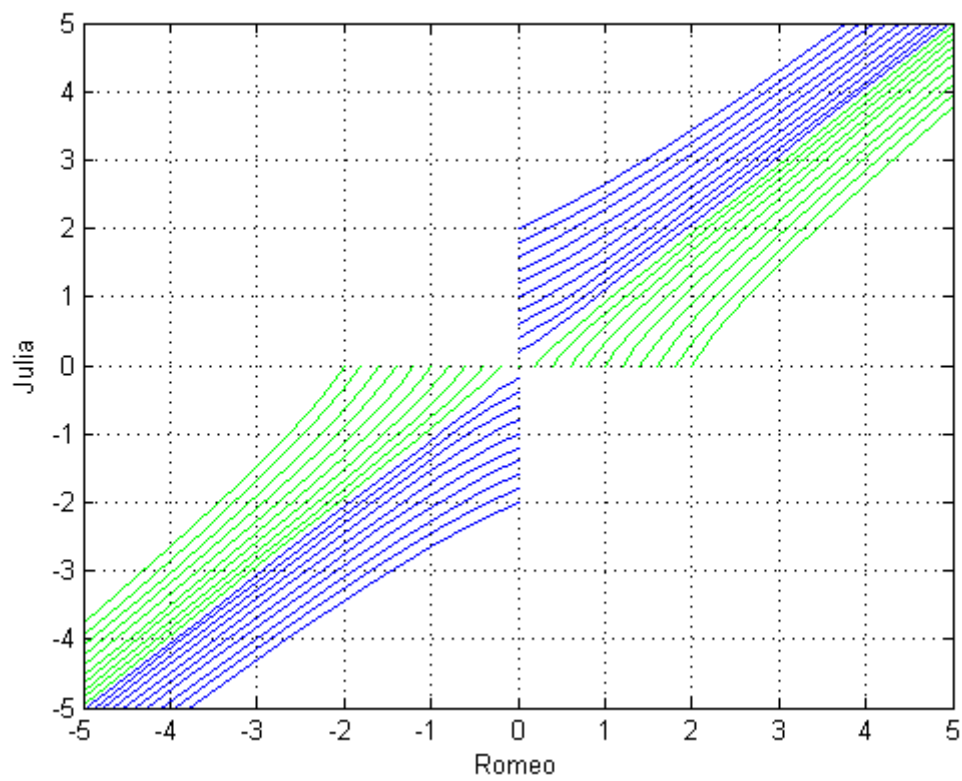


Slika 3. Odnos narcisa i narcisa i prikaz promjene velicina x i y tj. odnosa Romea i Julije u ovisnosti o vremenu

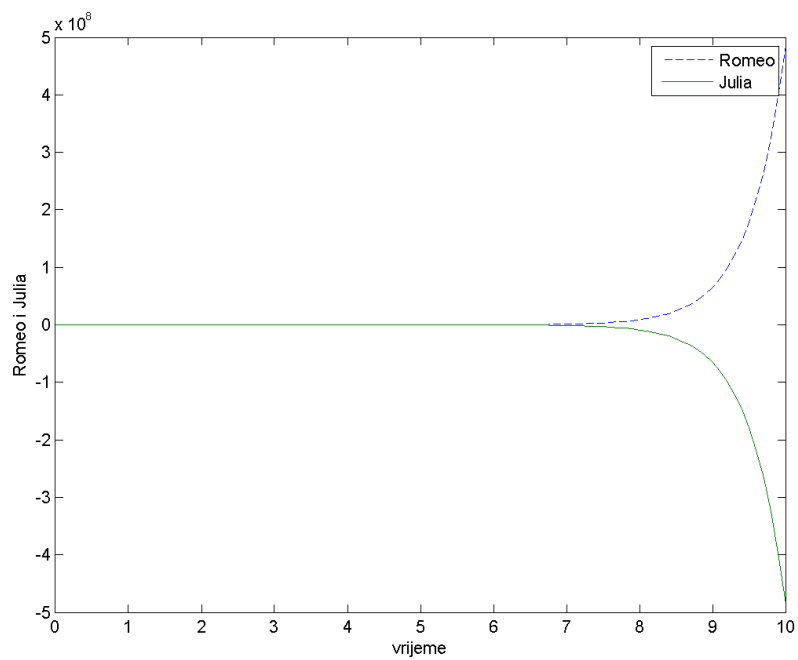
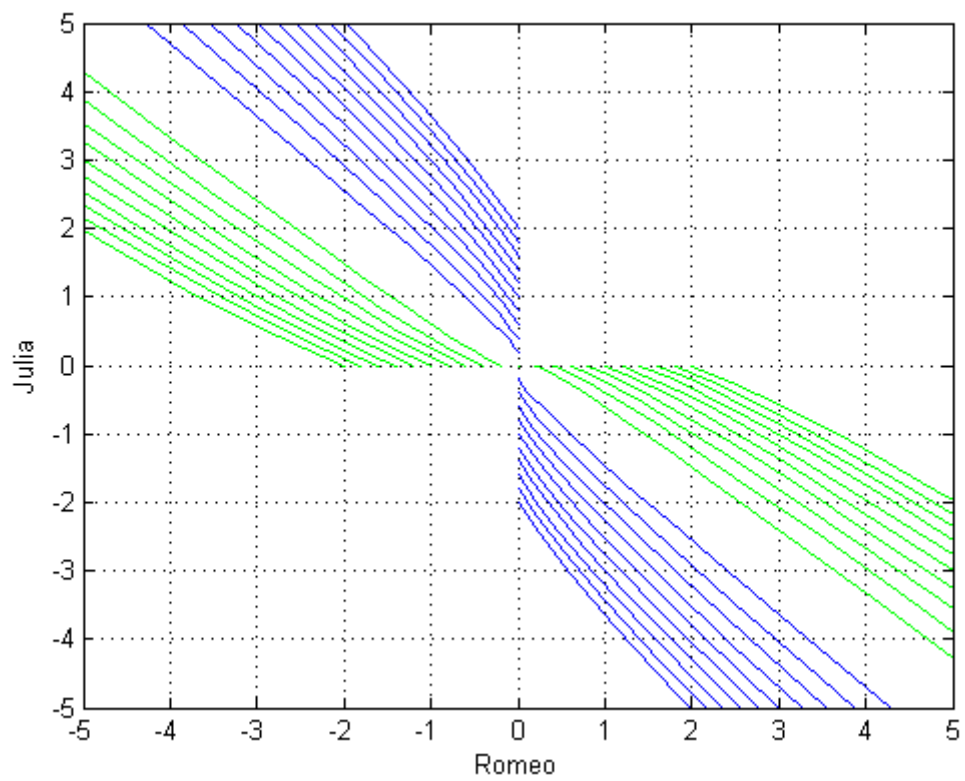
5.3. Oprezan ljubavnik i oprezan ljubavnik

I Romeo i Julija su ohrabreni osjećajima onog drugog, ali se ne žele ozbiljno vezati pa se zbog toga udaljavaju od vlastitih osjećaja. Rezultat odnosa ovisi o tome odgovaraju li Romeo i Julija više na osjećaje onog drugoga, $|a| < |b|$, ili su i jednom i drugom važniji njihovi vlastiti osjećaji, $|a| > |b|$. U prvom slučaju rezultat je beskonačna ljubava (I kvadrant) ili mržnja (III kvadrant), što ovisi o početnim uvjetima, jer Romeo i Julija ipak odgovaraju na osjećaje onog drugog (*Slika 4*). U tom slučaju $a=1$, $b=2$, $c=2$, $d=1$. U drugom slučaju u kojem je $a=2$, $b=-1$, $c=-1$, $d=2$, doći će do međusobne apatije u kojoj ni Romeo ni Julija neće imati nikakve osjećaje prema onom drugom (*Slika 5*). Ukoliko Romeo i

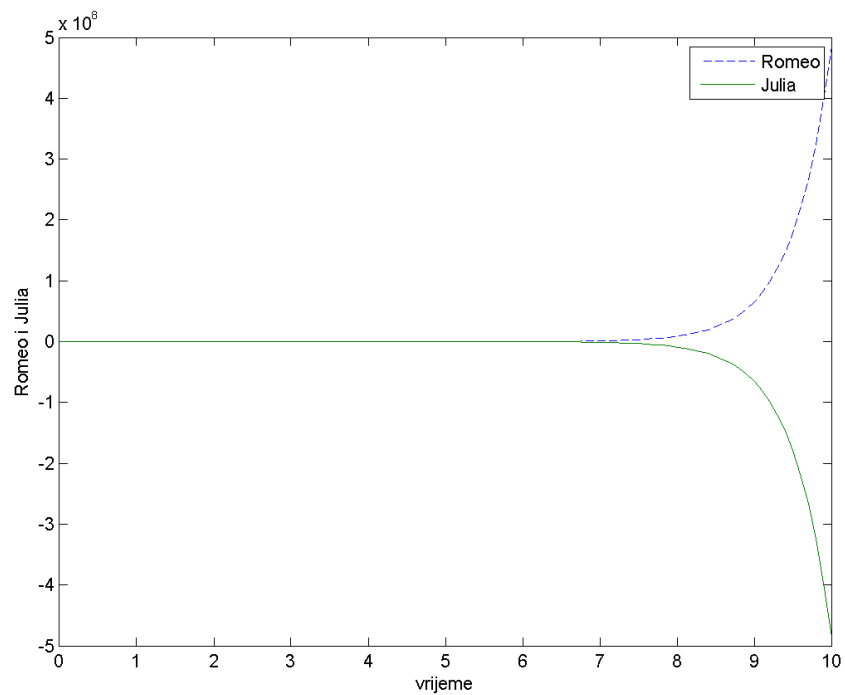
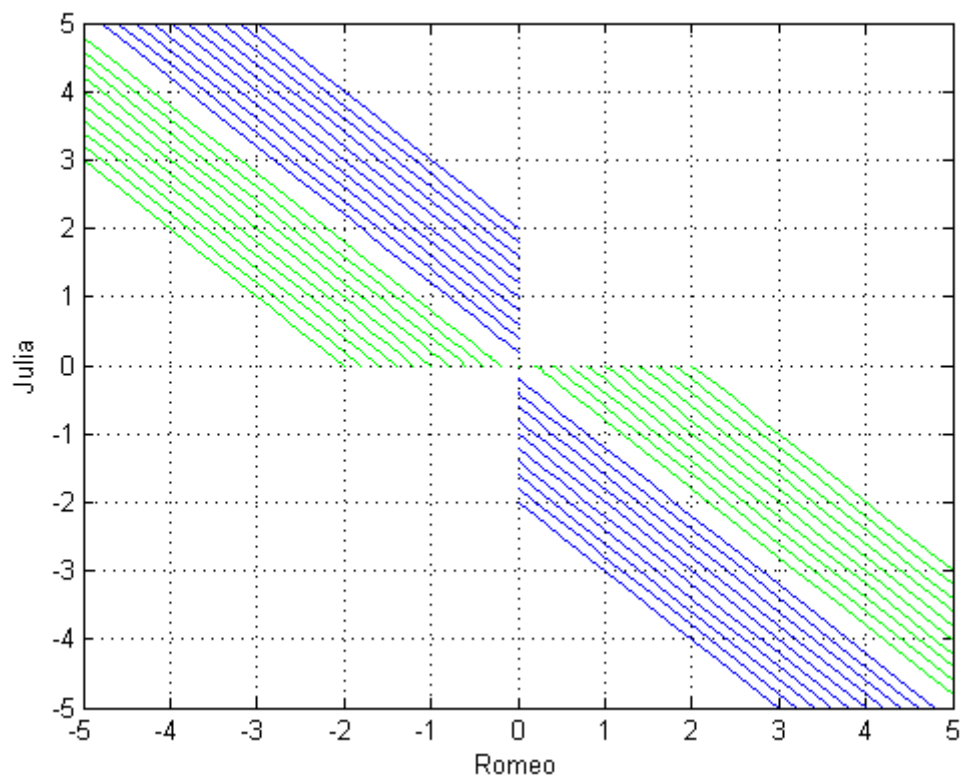
Julija jednako odgovaraju na vlastite osjećaje kao i osjećaje onog drugog, $|a| = |b|$, tada će njihov odnos rezultirati jednim nepromjenjivim stanjem u kojem se Romeo i Julija ili vole ili mrze. Za taj slučaj uzeti su sljedeći parametri: $a=1$, $b=-1$, $c=-1$, $d=1$ (*Slika 6*). Isto će se dogoditi ukoliko vrijedi da je $|a| = |c|$ i $|b| = |d|$.



Slika 4. Odnos opreznog ljubavnika i opreznog ljubavnika u slučaju kad odgovaraju na osjećaje onog drugog



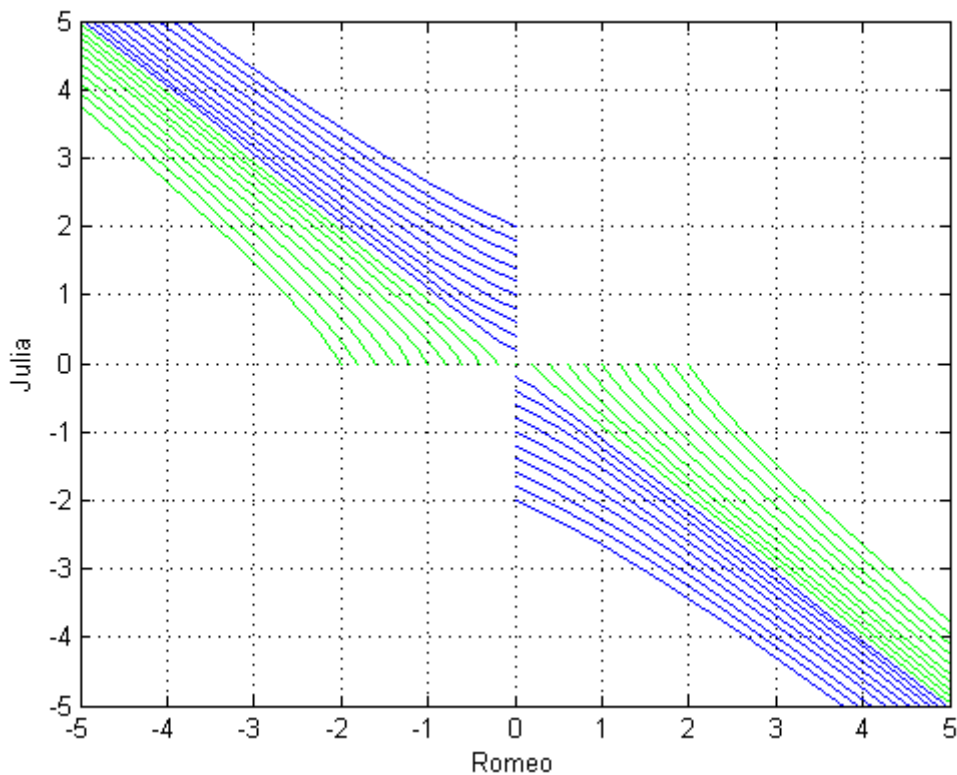
Slika 5. Odnos opreznog ljubavnika i opreznog ljubavnika u slučaju kad vlada međusobna ravnodušnost

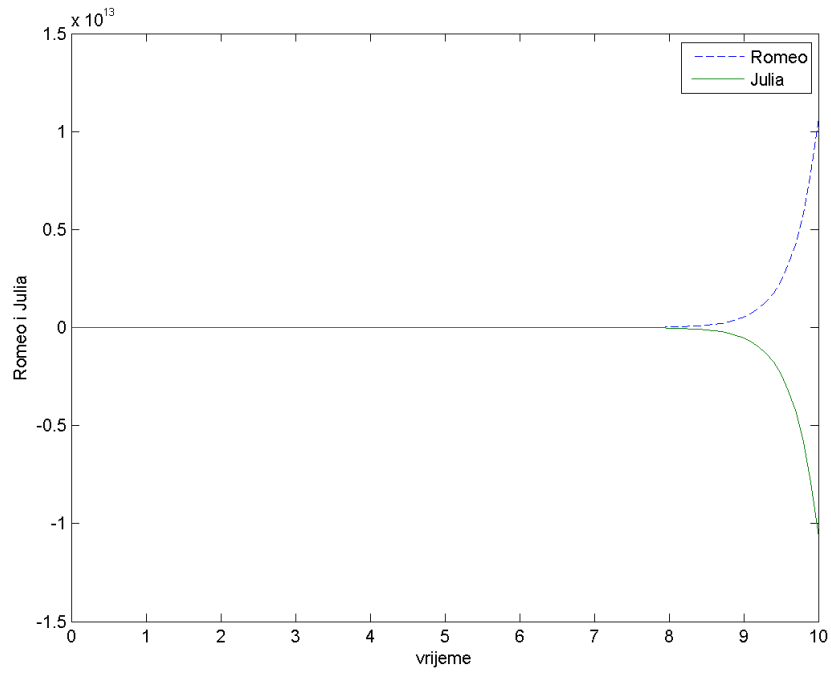


Slika 6. Odnos opreznog ljubavnika i opreznog ljubavnika u slučaju kad vlada nepromjenjivo stanje

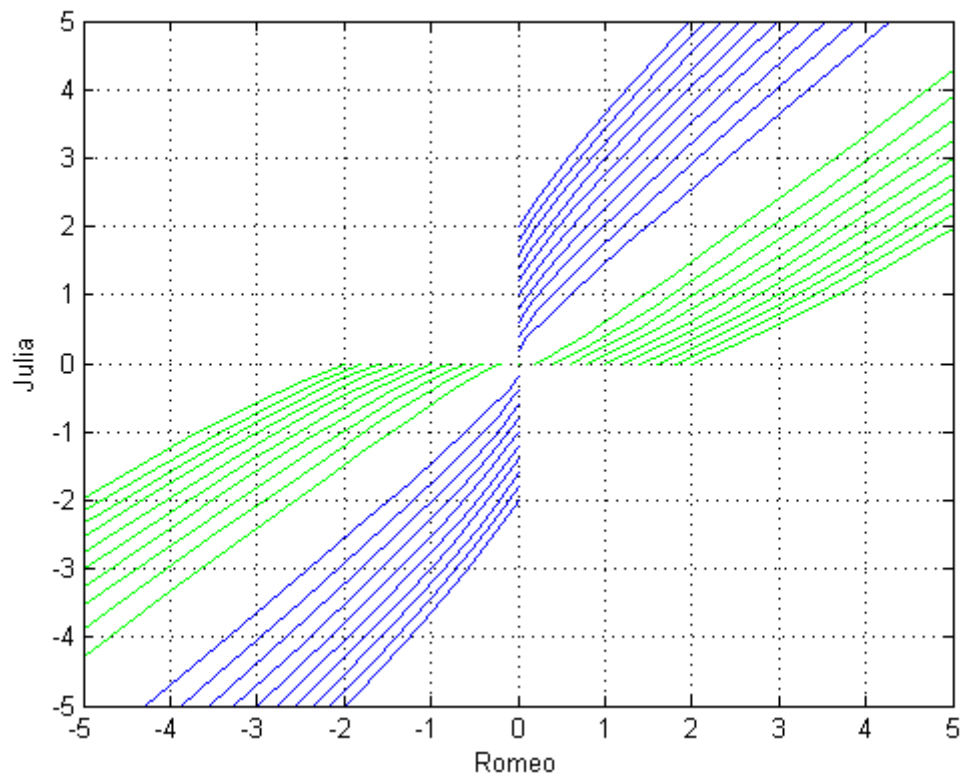
5.4. Pustinjak i pustinjak

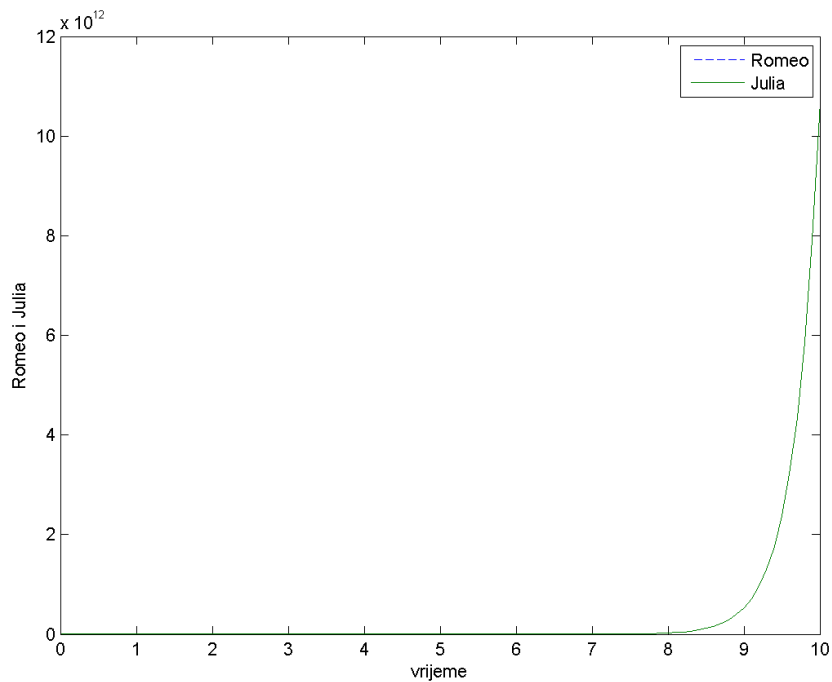
Ako su i Romeo i Julija pustinjaci tada će rezultat njihovog odnosa biti tako da je jedno od njih beskonačno zaljubljeno dok ga ono drugo beskonačno mrzi, ukoliko Romeo i Julija više odgovaraju na osjećaje onog drugog nego na svoje osjećaje, $|a| < |b|$ (Slika 7). Parametri za taj slučaj su: $a=1, b=-2, c=-2, d=1$. Ako je pak $|a| > |b|$, dolazi do međusobne apatije (Slika 8), $a=2, b=1, c=1, d=2$. U slučaju kada Romeo i Julija jednako odgovaraju na vlastite osjećaje kao i osjećaje onog drugog, $|a| = |b|$, tada će njihov odnos rezultirati jednim nepromjenjivim stanjem u kojem je jedno od njih zaljubljeno, a drugo mrzi (Slika 9), a parametri su $a=1, b=1, c=1, d=1$. Isto će se dogoditi ukoliko vrijedi da je $|a| = |c|$ i $|b| = |d|$.



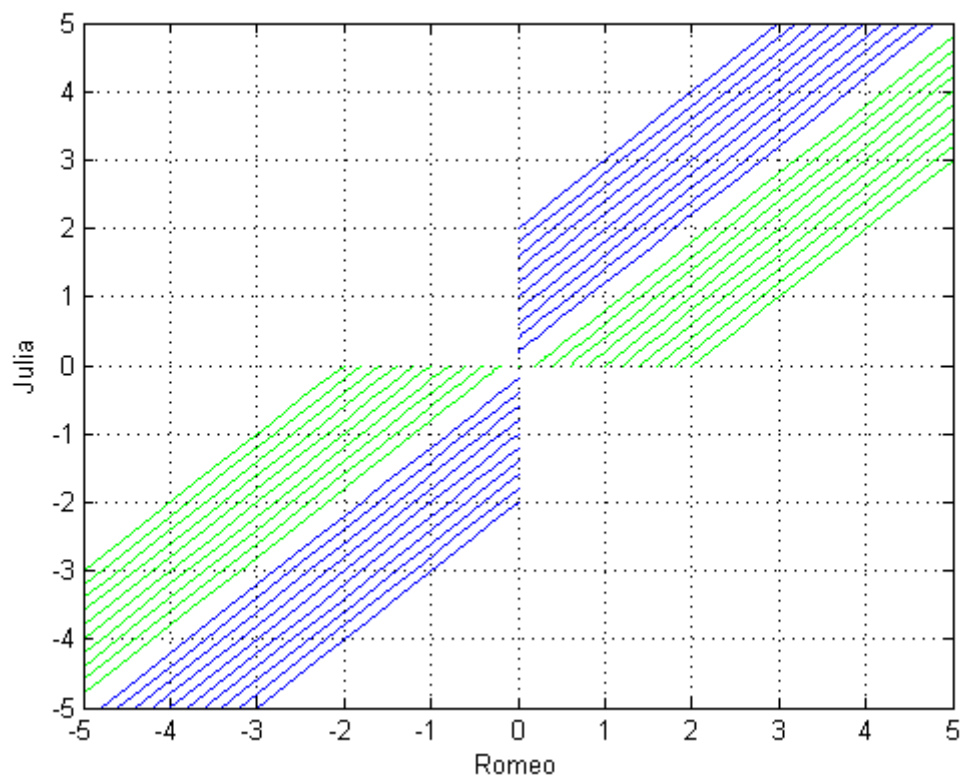


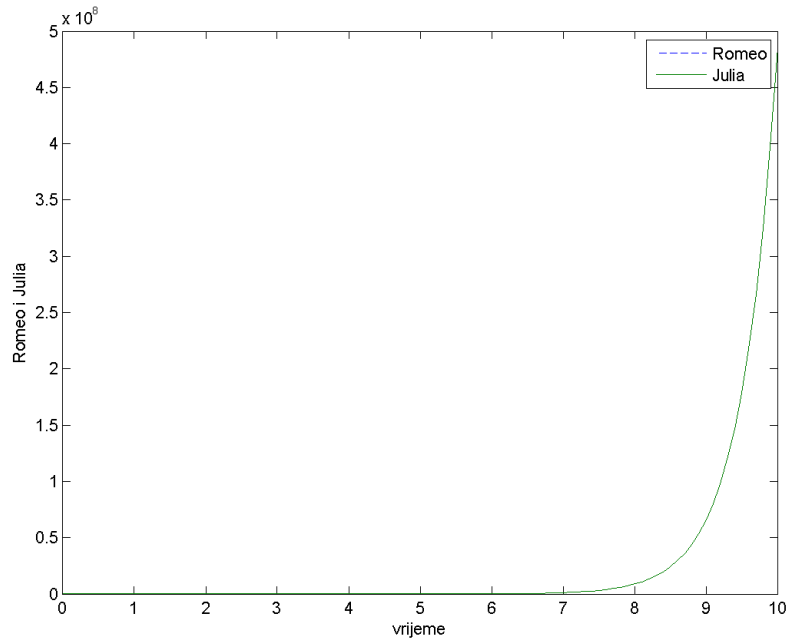
Slika 7. Odnos pustinjač–pustinjač u kojem se više odgovara na osjećaje onog drugog nego na vlastite





Slika 8. Odnos pustinjač–pustinjač u kojem vlada međusobna ravnodušnost





Slika 9. Odnos pustinjač–pustinjač u kojem je jedno zaljubljeno, a drugo mrzi

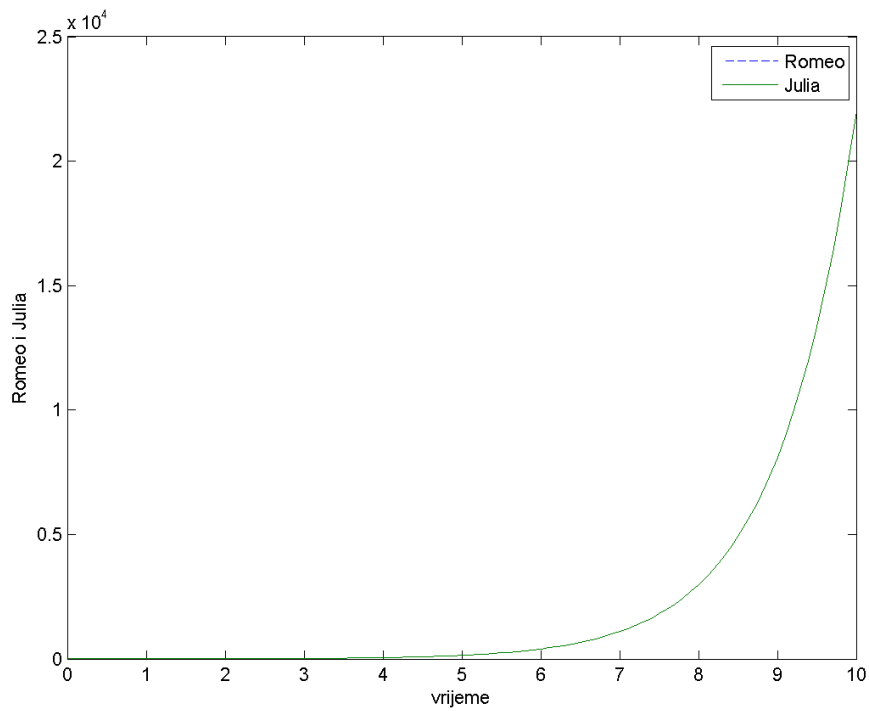
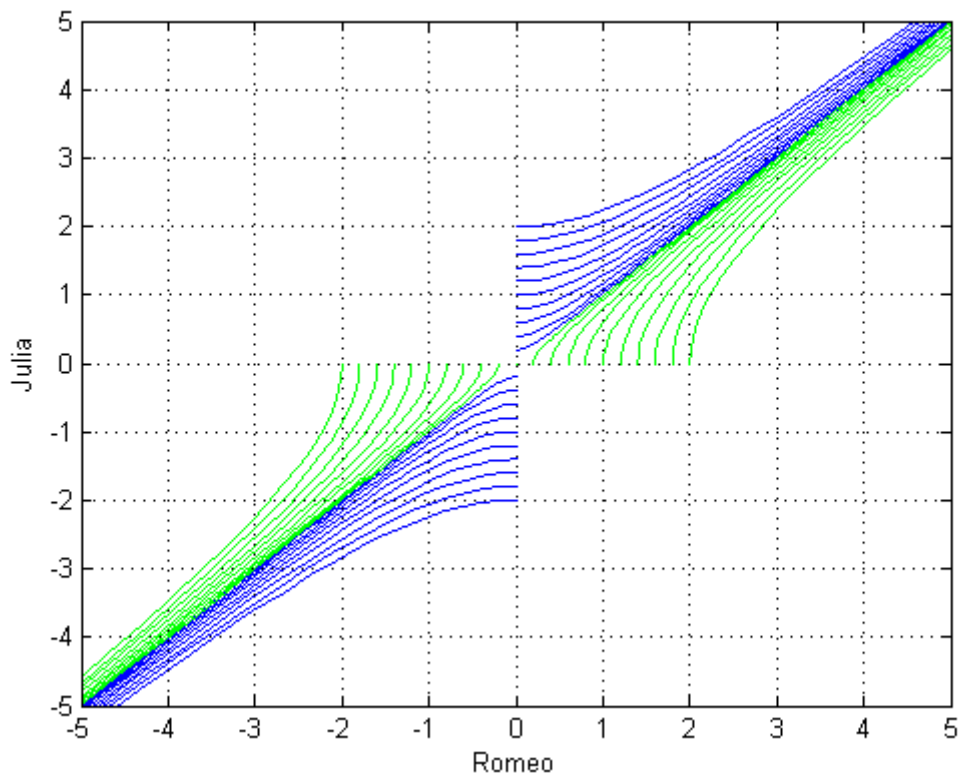
6. SLUČAJEVI BEZ UTJECAJA VLASTITIH OSJEĆAJA

U slučajevima kada na Romea i Juliju ne utječu njihovi vlastiti osjećaji i reagiraju samo na osjećaje onog drugog, $a = d = 0$, dinamika sustava ovisi isključivo o parametrima b i c za koje postoje tri kombinacije:

1. Dva ljubavnika: $b > 0, c > 0$ (uzajamna ljubav ili uzajamna mržnja)
2. Dva narcisa: $b < 0, c < 0$ (jedan voli više, a drugi manje)
3. Narcis + ljubavnik: $bc < 0$ (beskrajni ciklus ljubavi i mržnje).

6.1. Dva ljubavnika ($b > 0, c > 0$)

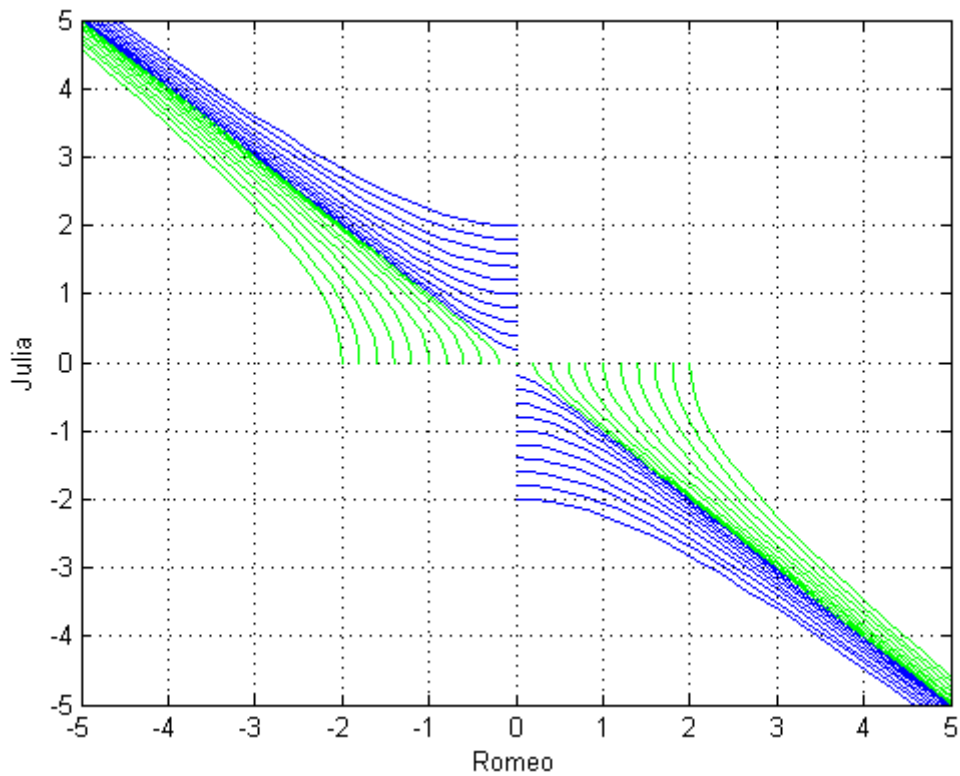
U ovom slučaju Romeo i Julija se beskonačno vole (I kvadrant), odnosno Romeo je ohrabren Julijinim osjećajima i njegova ljubav prema Juliji sve više raste. S druge strane i Julija sve više voli Romea ohrabrena njegovim osjećajima. U tom slučaju uzeli smo parametre $a=0$, $b=1$, $c=1$, $d=0$, a slučaj je prikazan na *Slici 10*.

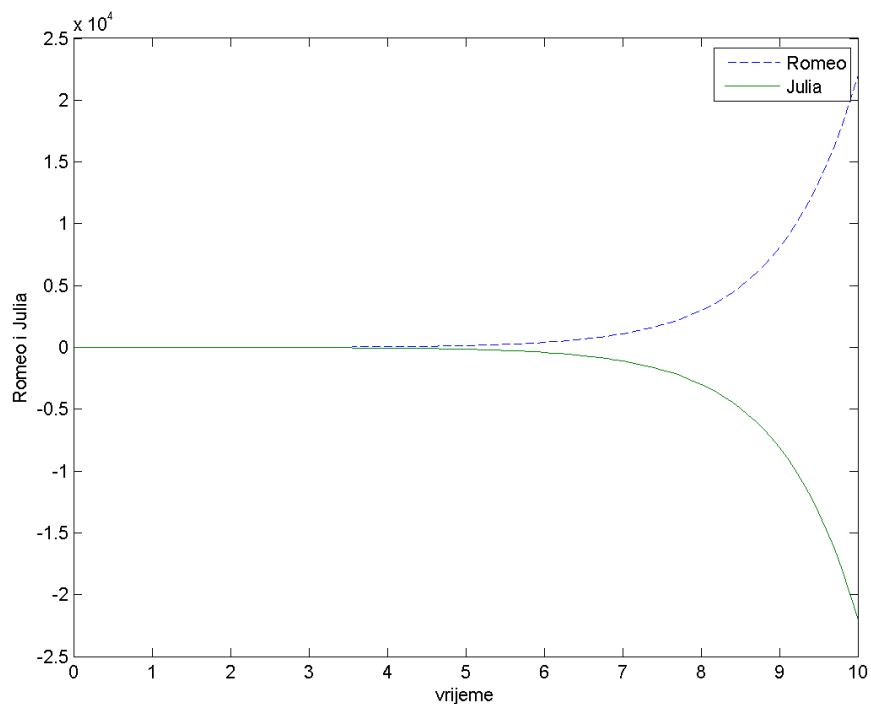


Slika 10. Odnos dva ljubavnika

6.2. Dva narcisa ($b < 0, c < 0$)

U ovome pak slučaju vrijedi što je Julijina ljubav prema Romeu veća, Romeova ljubav prema njoj se smanjuje (II kvadrant), odnosno kada Romeova ljubav prema Juliji raste, ona je sve manje zainteresirana za njega (IV kvadrant). Za taj slučaj vrijede parametri: $a=0, b=-1, c=-1, d=0$, a slučaj je prikazan na *Slici 11*.

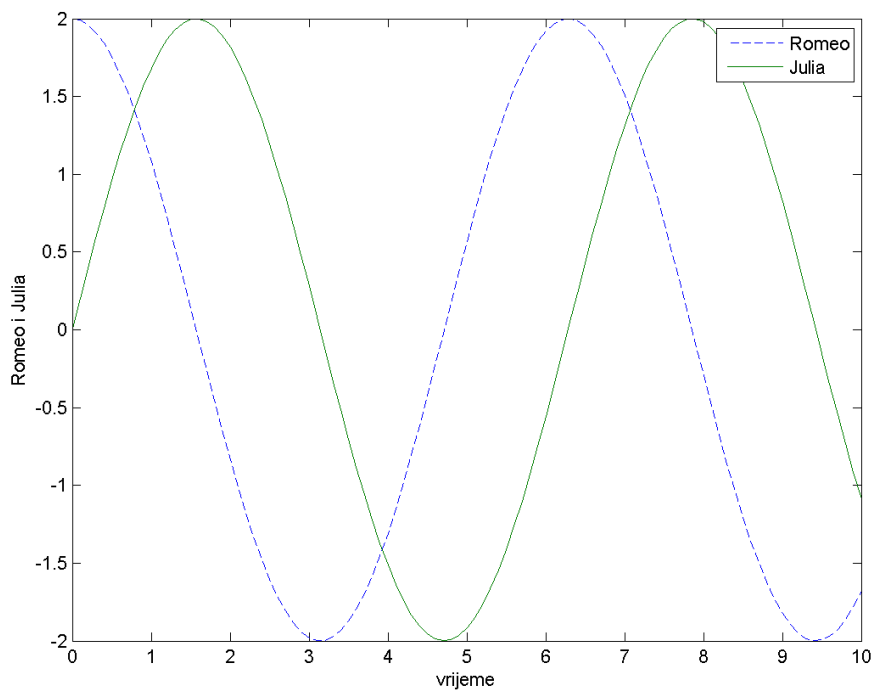
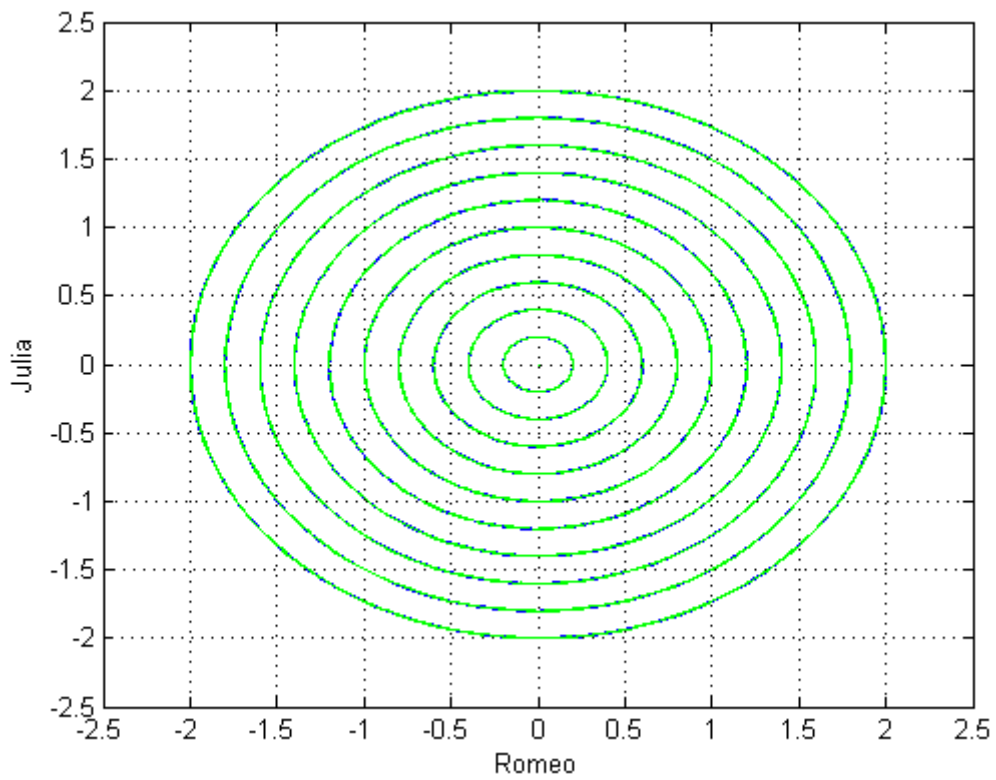




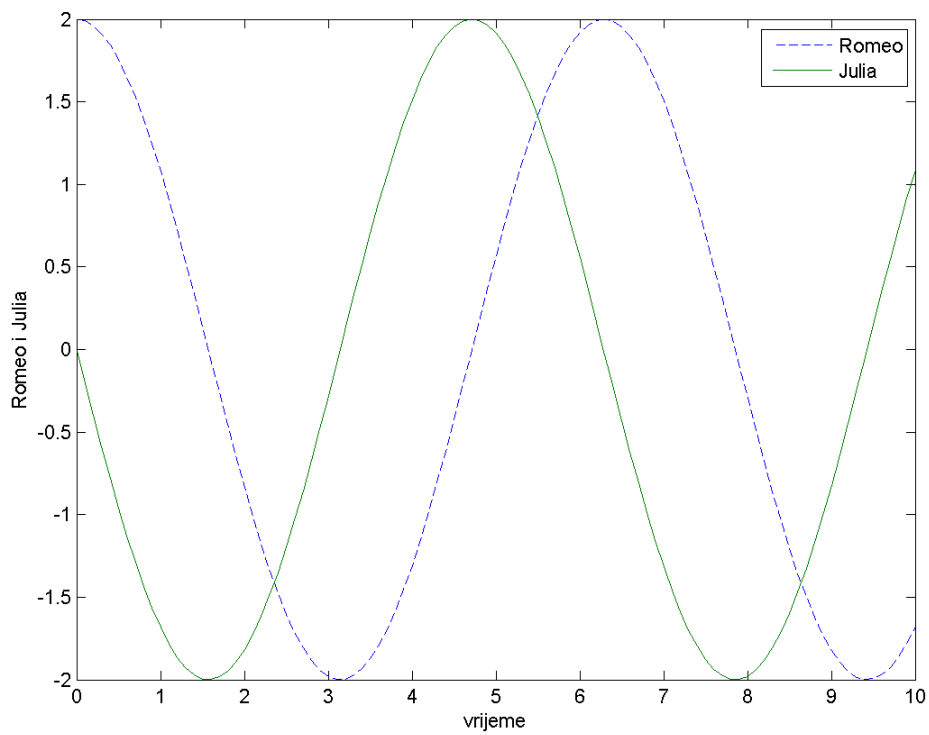
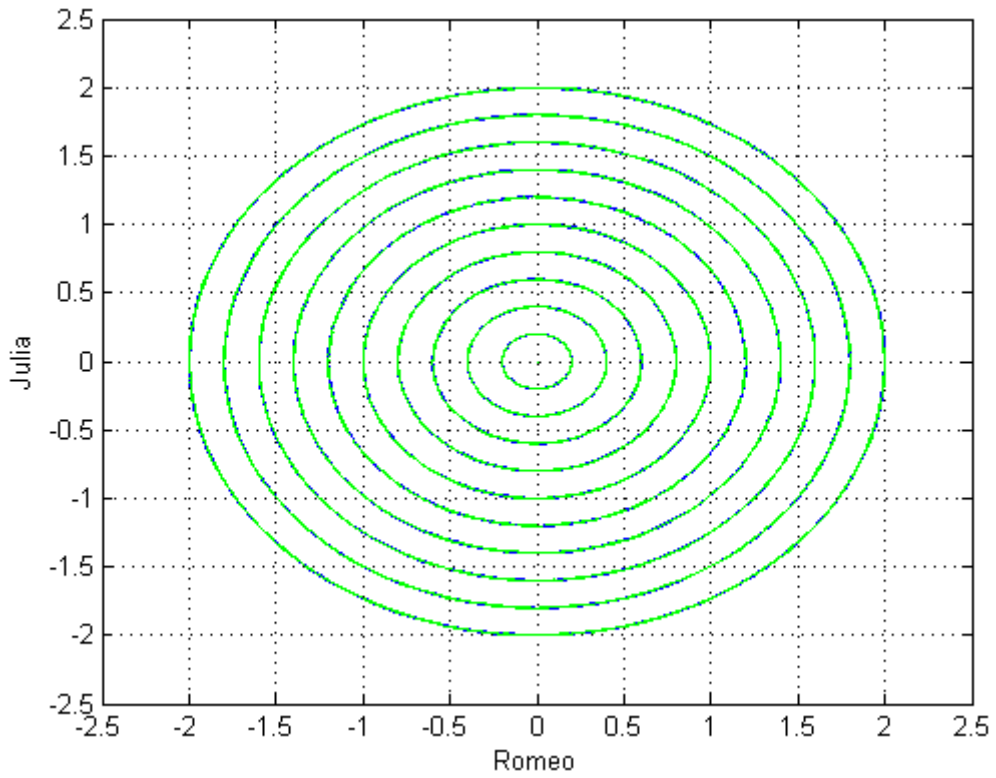
Slika 11. Odnos dva narcisa

6.3. Narcis i ljubavnik ($bc < 0$)

Rezultat uvjeta $bc < 0$ jest elipsa, iz koje slijedi da je intenzitet njihovih osjećaja (pozitivnih ili negativnih), koji se javljaju zbog ohrabrivanja onog drugog, jednak. U prvom kvadrantu, iako ohrabren Julijinim osjećajima, Romeo je sve manje zaljubljen (drugi kvadrant) i Julijini osjećaji počinju slabjeti, tako da se sve manje vole. U trećem se kvadrantu Romeovi osjećaji počinju ponovno buditi, ali je sada Julija sve manje zainteresirana, dok u četvrtom kvadrantu i njegovi i njeni osjećaji postaju sve snažniji. Iz toga zaključujemo da je prisutan beskonačan ciklus ljubavi i mržnje. Ako vrijedi da je $b > 0$ i $c < 0$, uzimamo vrijednost parametara $a=0$, $b=1$ i $c=-1$, $d=0$, tada je orijentacija krivulje u smjeru kazaljki na satu, a slučaj prikazuje *Slika 12*. Za $b < 0$ i $c > 0$ uzimamo vrijednost parametara $a=0$, $b=-1$, $c=1$, $d=0$, tada je orijentacija krivulje u smjeru suprotnom od kazaljki na satu, a slučaj prikazuje *Slika 13*.



Slika 12. Odnos narcis i ljubavnik za $b>0$ i $c<0$



Slika 13. Odnos narcis i ljubavnik za $b < 0$ i $c > 0$

7. LJUBAVNICI POTPUNE SUPROTNOSTI

Model ljubavi prikazujemo pomoću već ranije spomenutih jednadžbi (7).

Pretpostavimo slučaj u kojem su dvoje ljubavnika potpune suprotnosti ($c = -b$ i $d = -a$).

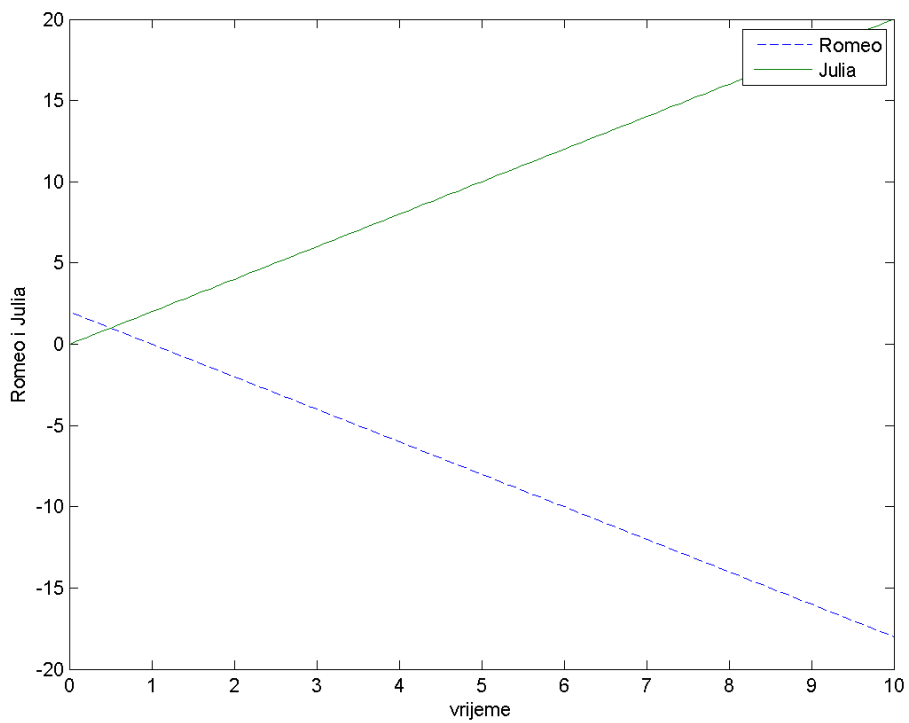
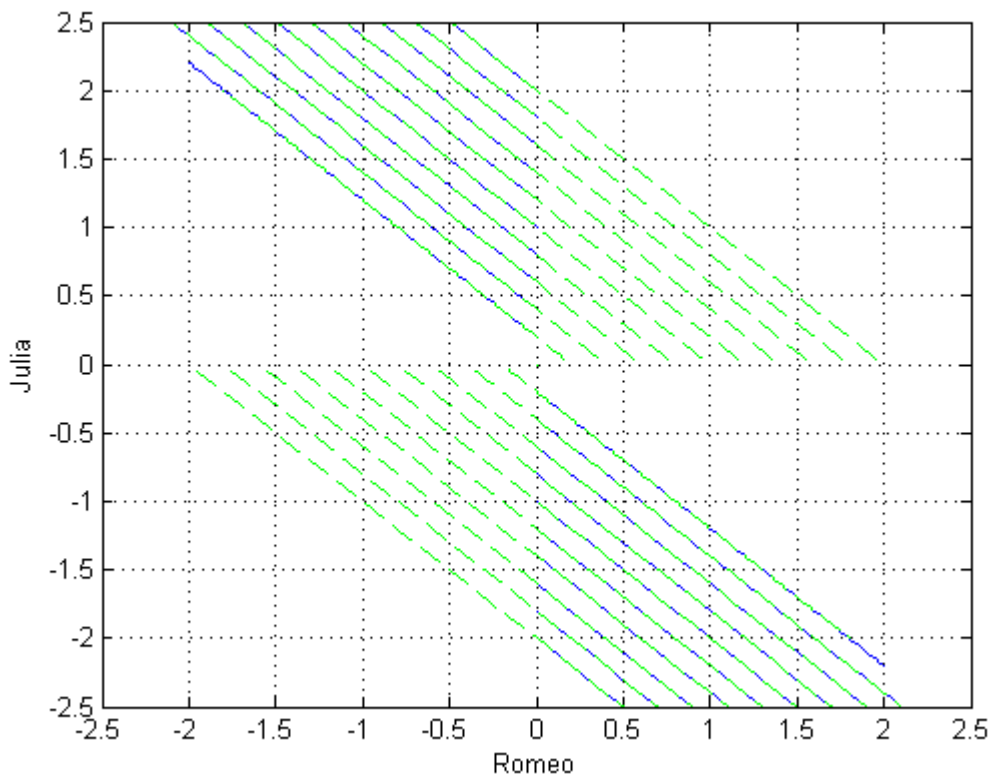
- 1) pohlepnik + pustinjač: $ab > 0$.
- 2) narcis + ljubavnik: $ab < 0$.

Parametri a i b mogu biti jednaki nuli, ali takve rubne slučajeve nećemo razmatrati u ovome seminaru. Rezultat slučaja ovisi o tome hoće li pojedinci više reagirati na sebe ($|a| > |b|$) ili na druge ($|a| < |b|$). U prvom slučaju pohlepnik i pustinjač su u sukobu, a narcis i oprezni ljubavnik su u ljubavi ili u mržnji. U drugom slučaju sve je obrnuto. Iz toga slijedi da trajektorije mogu završiti u bilo kojem kvadrantu (sve 4 kombinacije ljubavi i mržnje) ili u beskonačnom ciklusu.

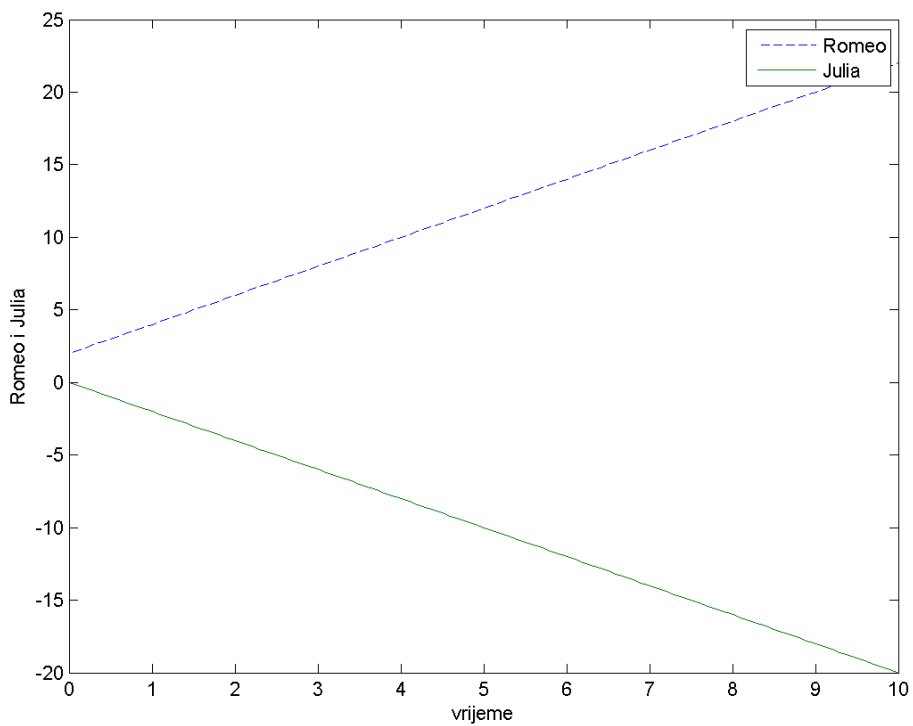
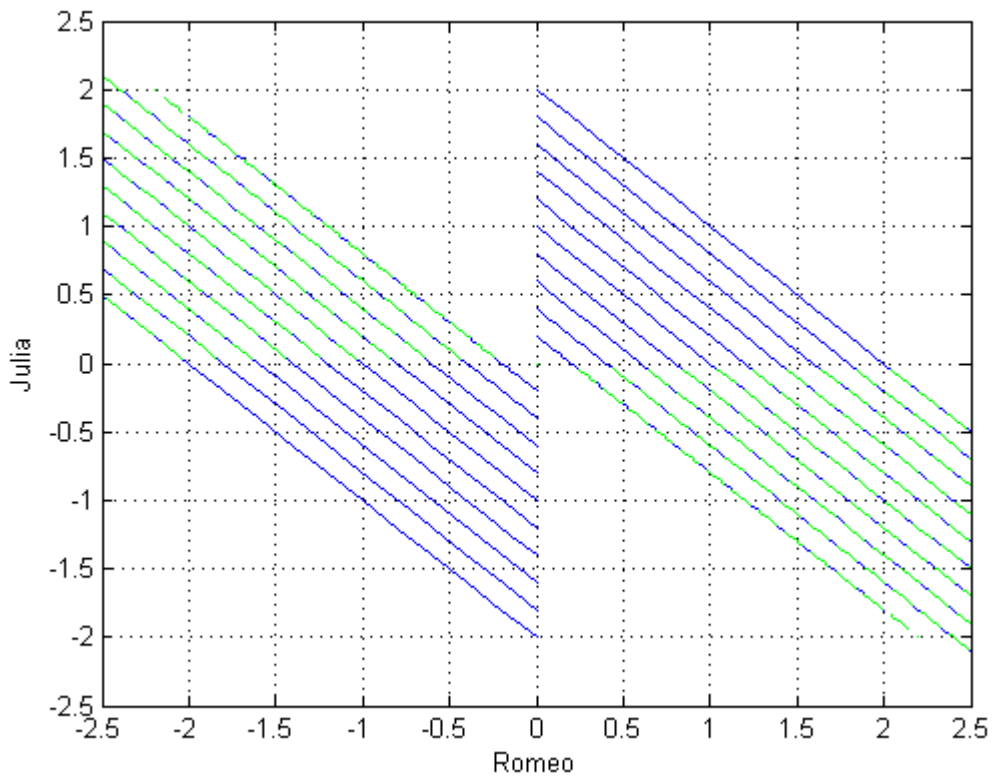
7.1. Pohlepnik i pustinjač

U ovom slučaju $ab > 0$, a parametri koje smo izabrali za razmatranje definiramo kao $a=1$ i $b=1$, i vrijedi da je $c=-b$, $d=-a$, a taj slučaj prikazuje *Slika 14*. U drugom slučaju $ab < 0$, uzeli smo vrijednost parametara $a=-1$, $b=-1$, te također vrijedi da je $c=-b$, $d=-a$, a slučaj je prikazan na *Slici 15*. Iz slika vidimo da ako Romeova ljubav prema Juliji raste, tada se Julijina ljubav prema Romeu smanjuje. Odnosno, ako Julija sve manje voli Romea, tada je Romeova ljubav prema njoj sve veća. Slike, iako su slične, odnose se na dvije različite situacije zbog toga što uzimamo različite vrijednosti parametara a i b za oba slučaja, ali ostajemo pri tome da je $ab > 0$.

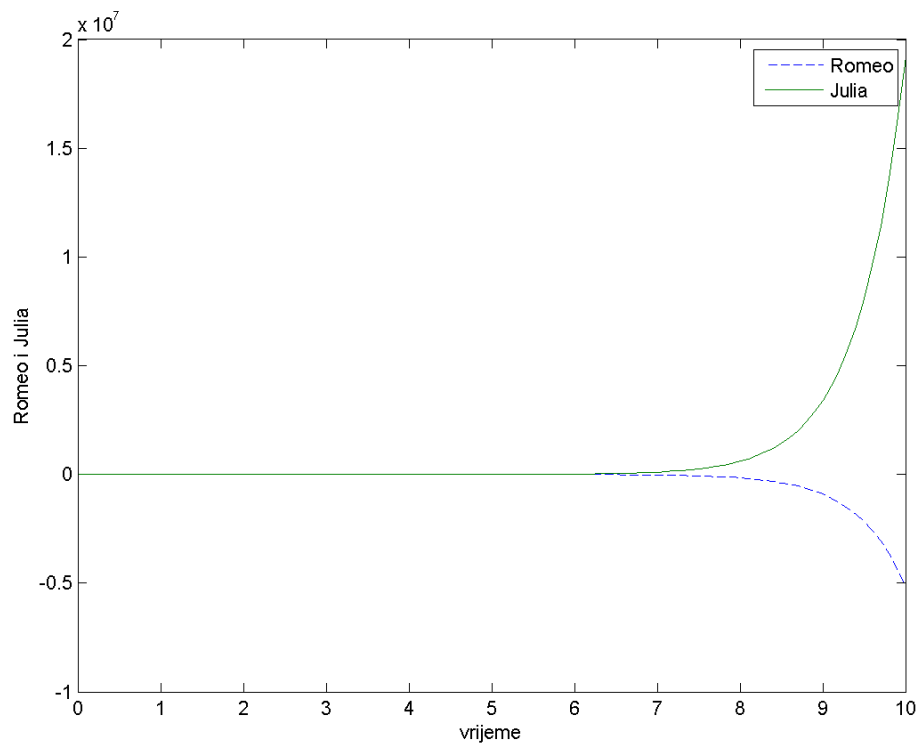
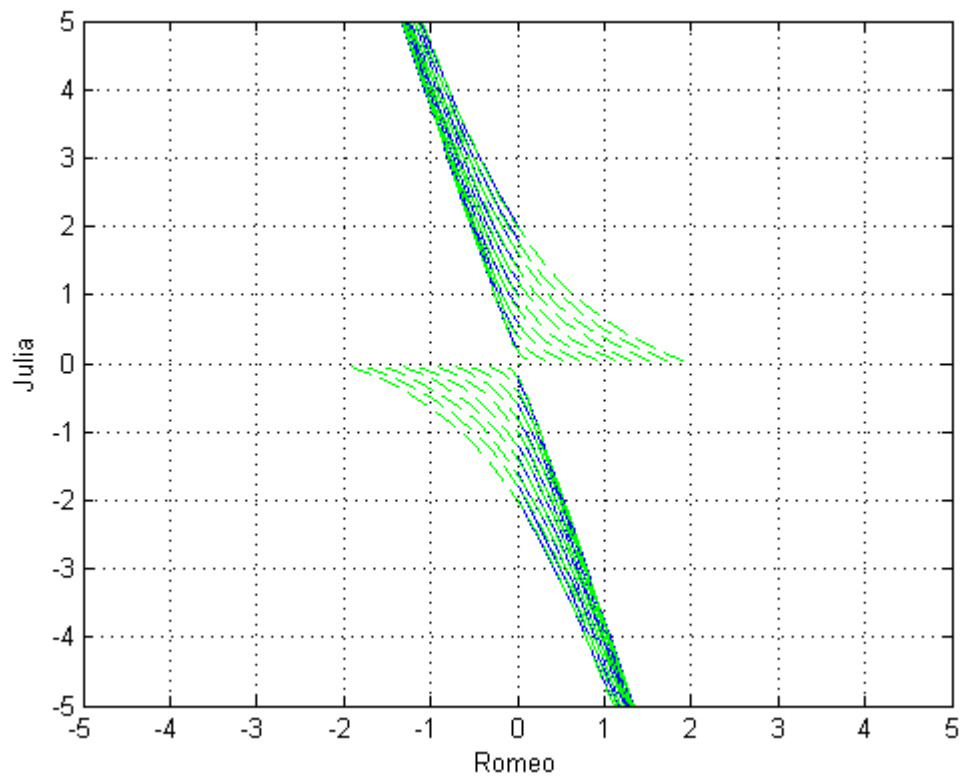
Za *Sliku 16* uzete su vrijednosti parametara $a=2$, $b=1$ te također vrijedi uvjet $c=-b$, $d=-a$, dok su za *Sliku 17* uzete vrijednosti parametara $a=-2$, $b=-1$ za iste uvjete. Iz tih slika isto proizlazi da kada se Romeova ljubav prema Juliji povećava, tada se Julijina ljubav prema njemu smanjuje i obrnuto, ovisno o počenim uvjetima.



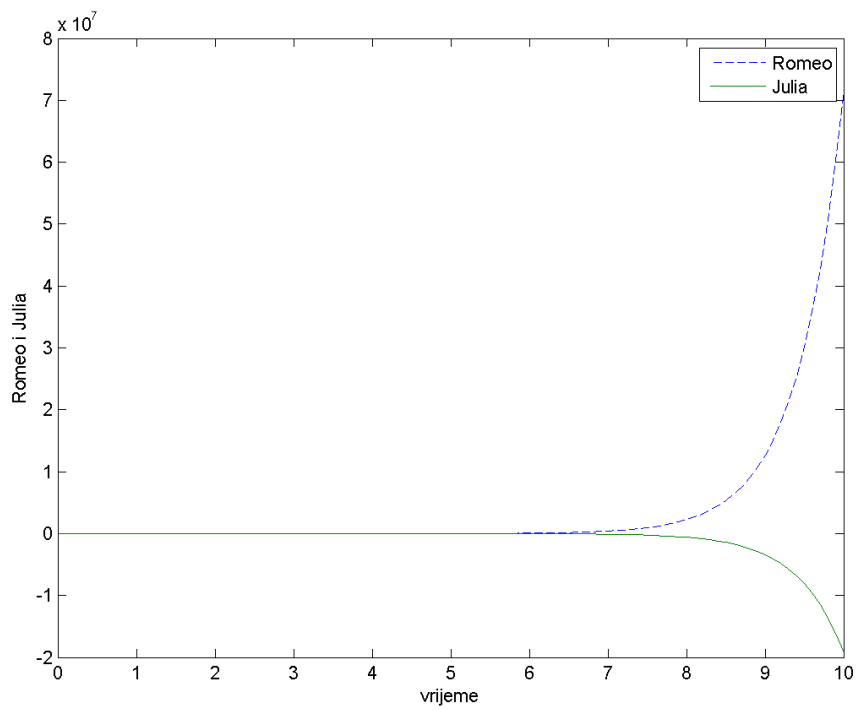
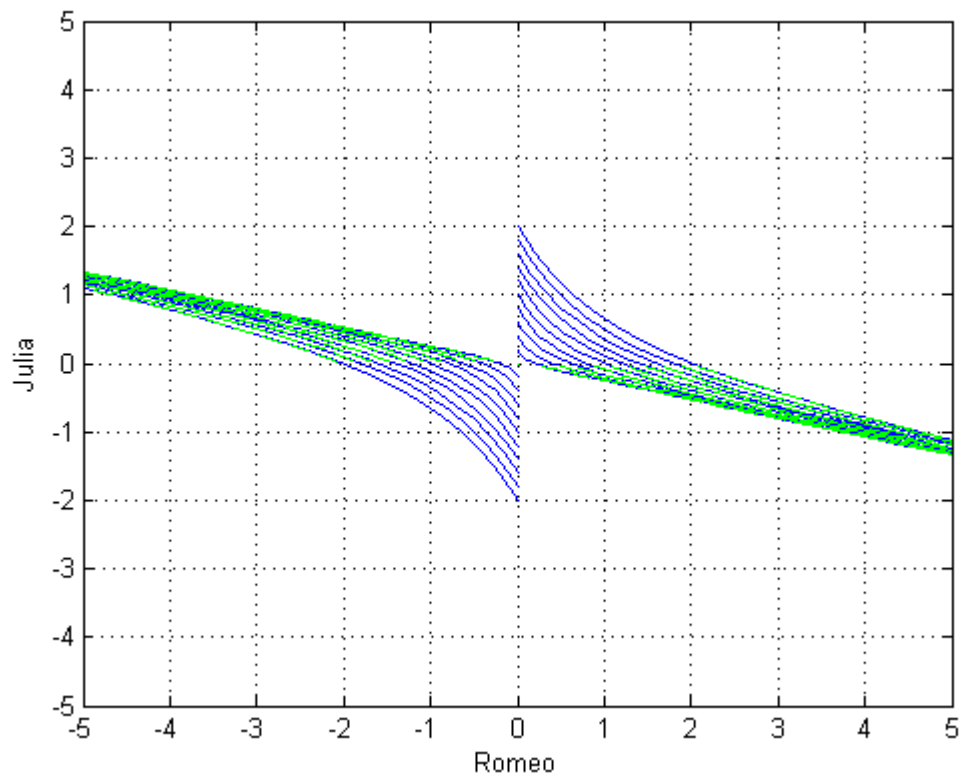
Slika 14. Odnos pohlepnika i pustinjaka za slučaj $ab > 0$



Slika 15. Odnos pohlepnika i pustinjaka za slučaj $ab < 0$



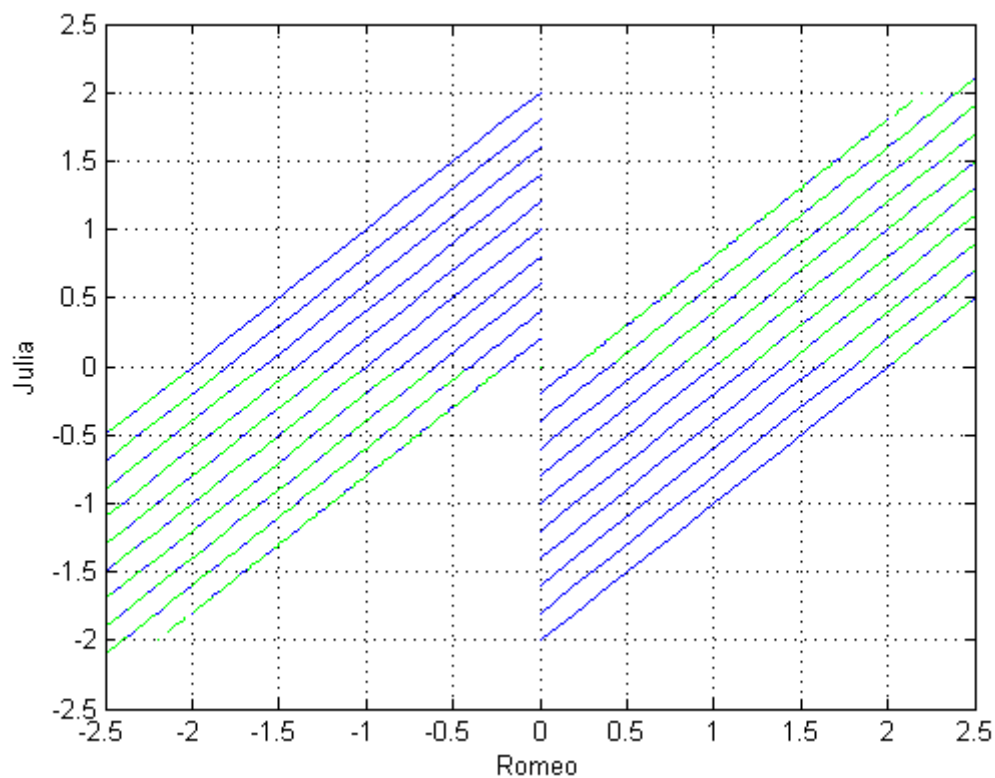
Slika 16. Odnos pohlepnika i pustinjaka za slučaj $ab < 0$

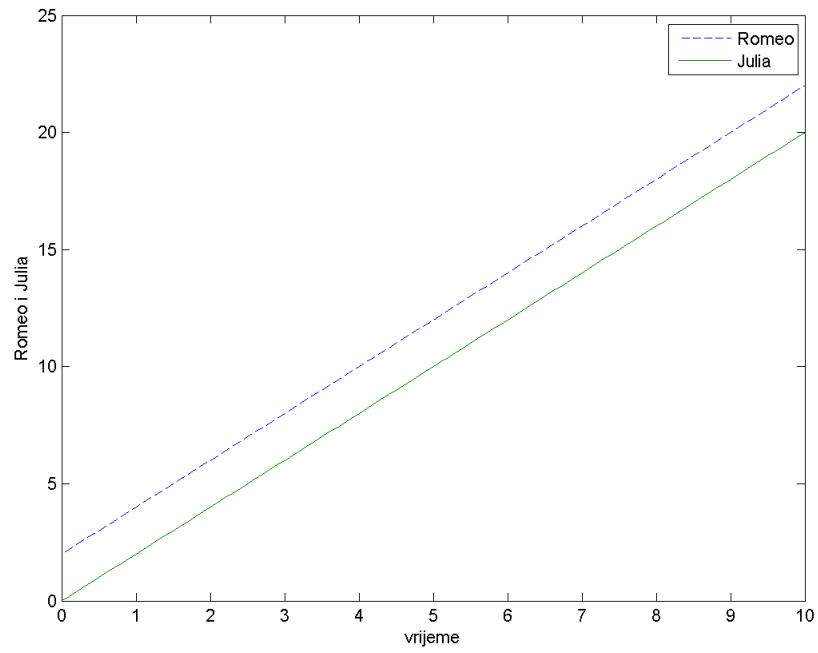


Slika 17. Odnos pohlepnika i pustinjaka za slučaj $ab < 0$

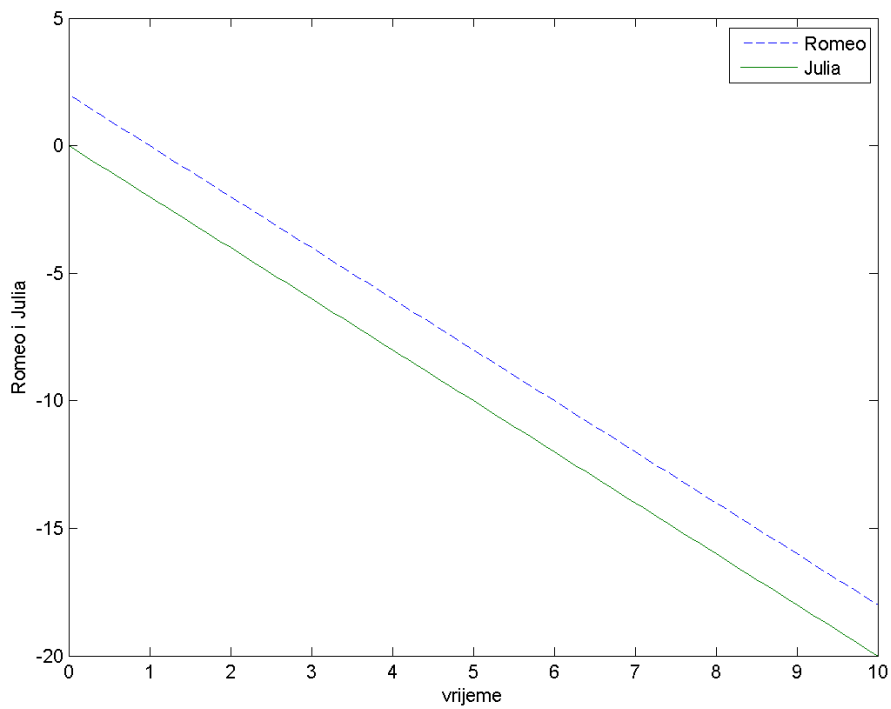
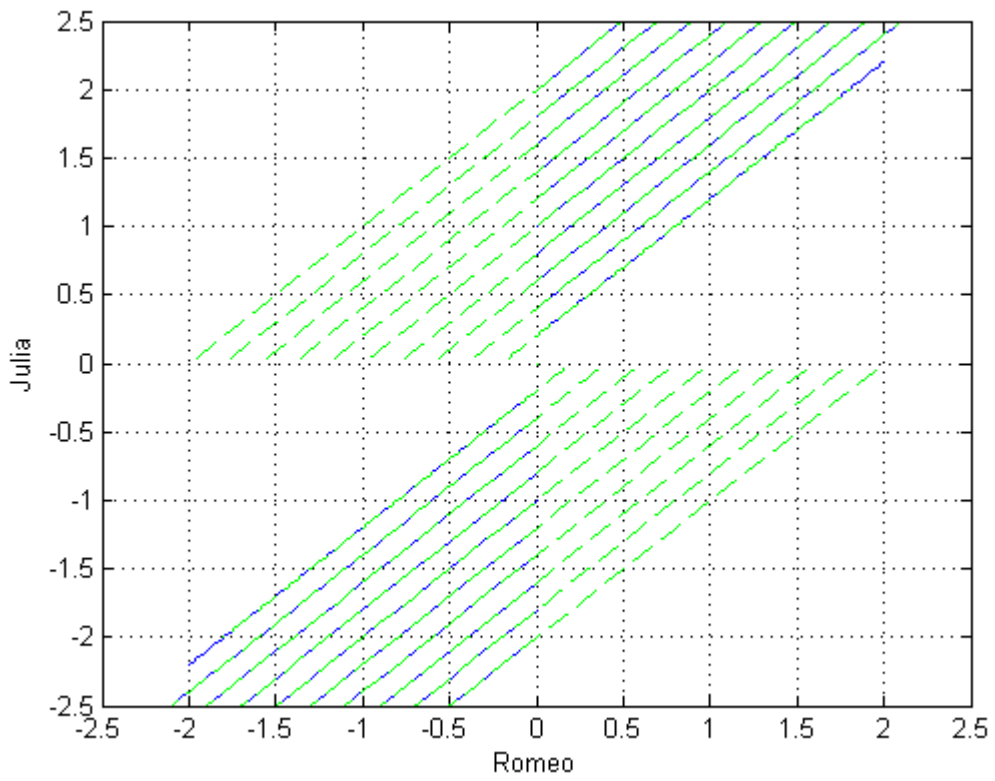
7.2. Narcis i ljubavnik

U ovom slučaju vrijedi $ab < 0$, a parametri su $a = -1$ i $b = 1$, i vrijedi da je $c = -b$, $d = -a$, a to je sve prikazano na *Slici 18*. U drugom slučaju uzeli smo vrijednost parametara $a = 1$, $b = -1$, te također vrijedi da je $c = -b$, $d = -a$, a slučaj je prikazan na *Slici 19*. Iz tih slika vidimo da ukoliko Romeova ljubav prema Juliji raste, tada raste i Julijina ljubav prema Romeu. S druge strane, kada Julija sve više voli Romea, tada i Romeovi njoj uzvraća istim osjećajima. Slike su slične iako se odnose na dvije različite situacije zbog toga što uzimamo različite vrijednosti parametara a i b za oba slučaja ali ostajemo pri uvjetu da je $ab < 0$. Za *Sliku 20* i *21* radi se o istom odnosu Romea i Julije, međutim uzeti su različiti parametri (za *Sliku 20* uzeli smo da je $a = 2$, $b = -1$, a za *Sliku 21* uzeli smo da je $a = -2$, $b = 1$).

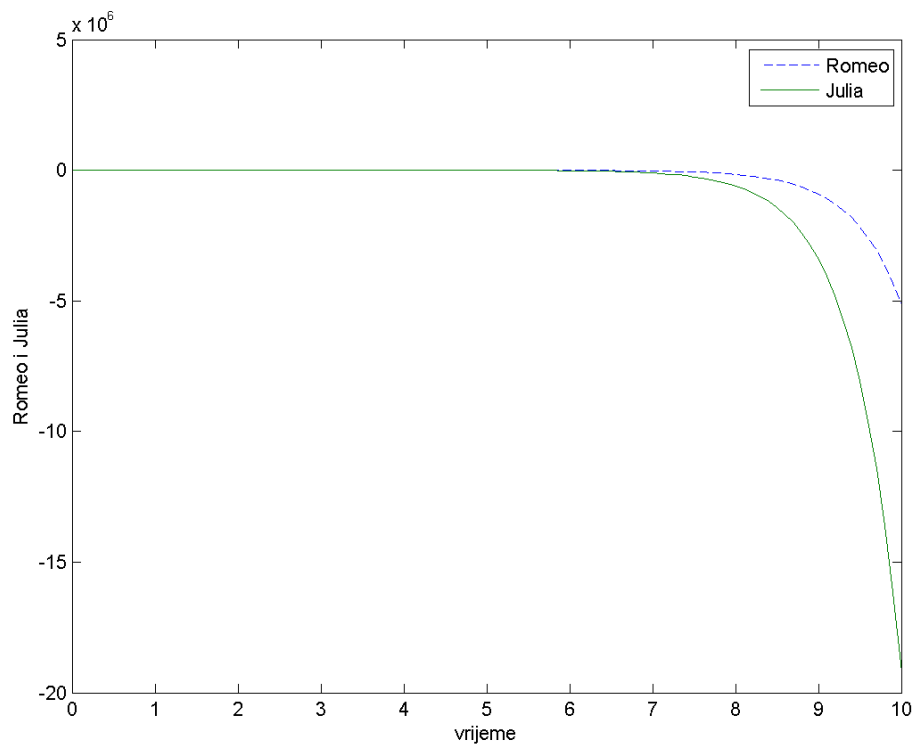
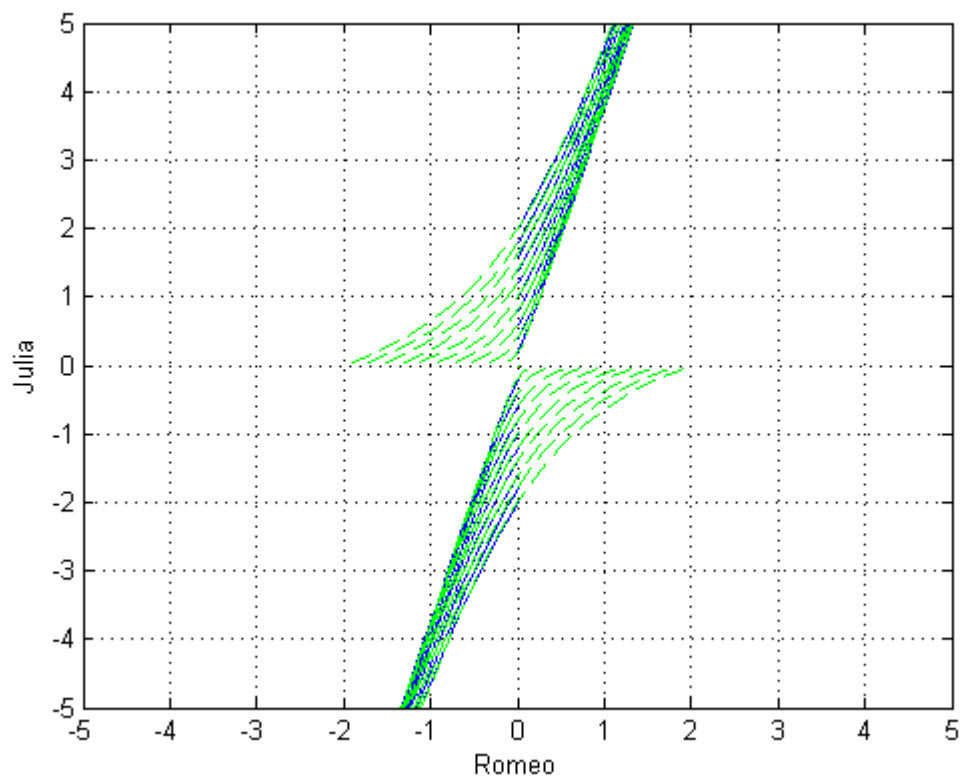




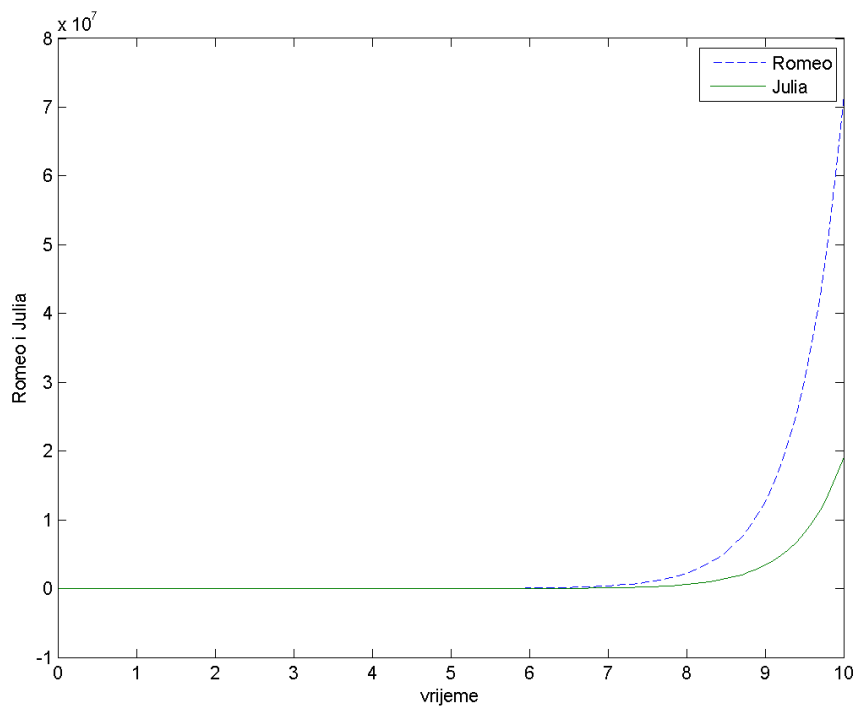
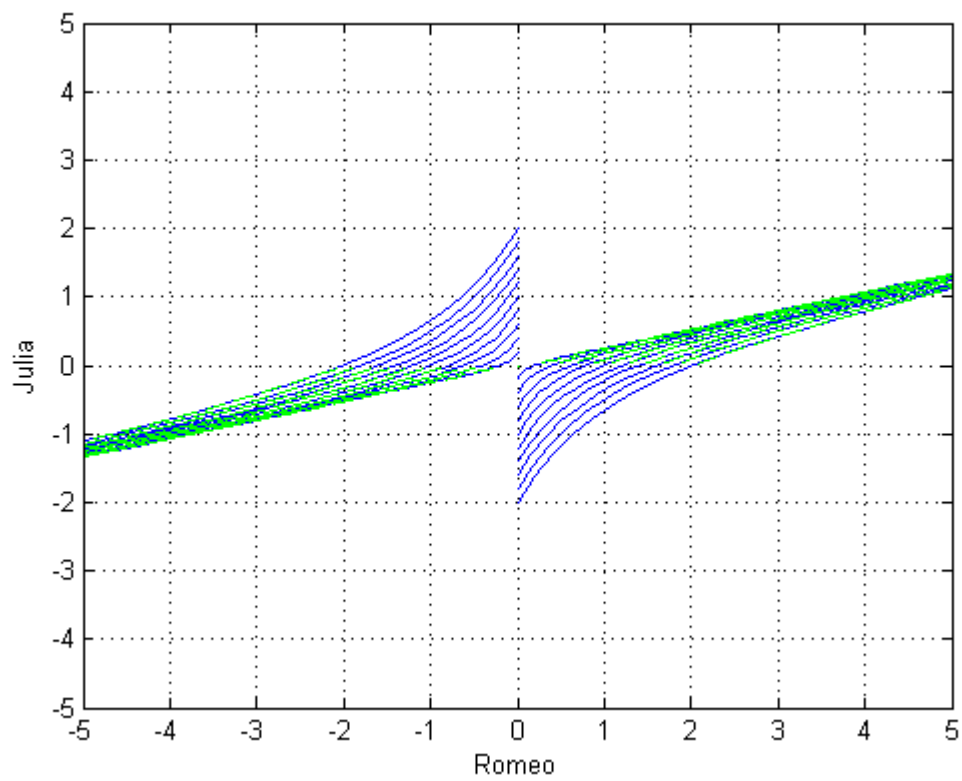
Slika 18. Odnos narcis-ljubavnik za slučaj $ab < 0$



Slika 19. Odnos narcis-ljubavnik za slučaj $a=1, b=-1$



Slika 20. Odnos narcis-ljubavnik za slučaj $a=2, b=-1$



Slika 21. Odnos narcis-ljubavnik za slučaj $a=-2$, $b=1$

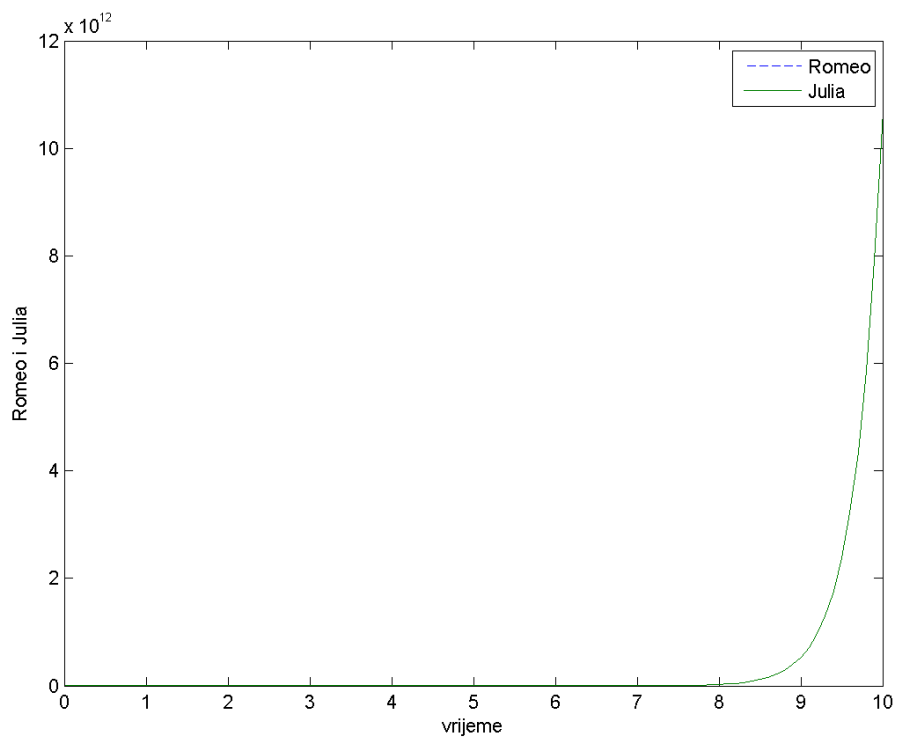
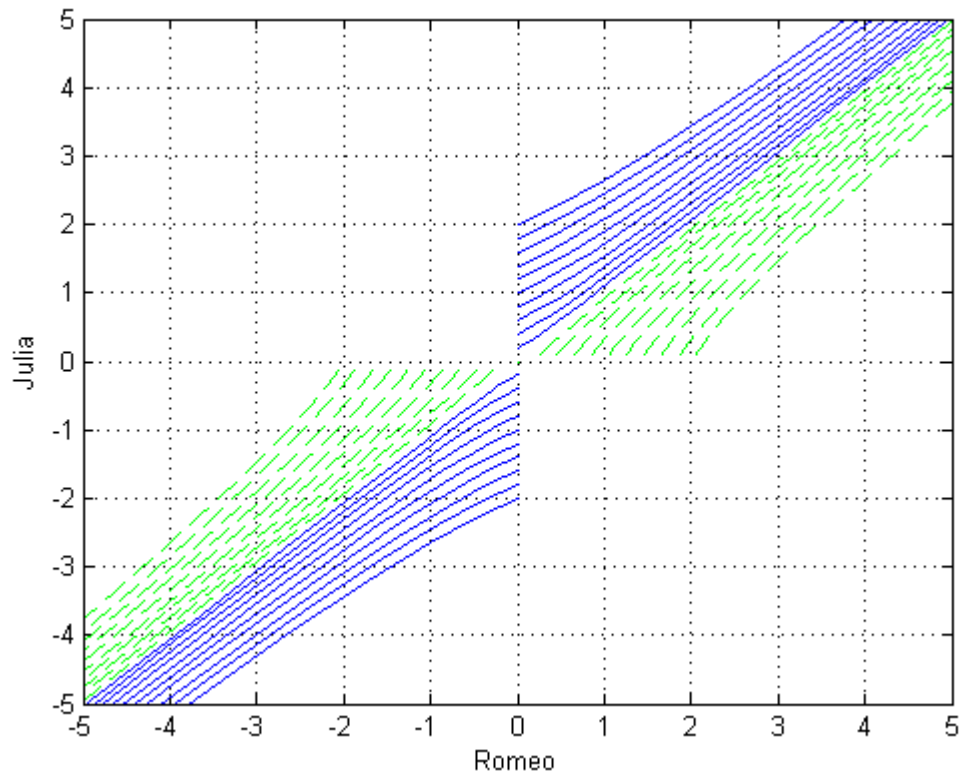
8. OSTALE KOMBINACIJE LJUBAVI I RAVNODUŠNI ROMEO

U ovom slučaju radi se o dva romantična klona i vrijedi da je $c=b$ i $d=a$. Oprezni ljubavnici s $|a| < |b|$ i pohlepnik završe ili u ljubavi ili u mržnji, ovisno o početnim uvjetima. Pustinjaci s $|a| < |b|$ i narcisoidi završe tako da jedan voli, a drugi mrzi. Opreznim ljubavnici i pustinjaci s $|a| > |b|$ završe u stanju uzajamne ravnodušnosti. Također, postoji i slučaj kada je $|a| = |b|$, ali takav slučaj nećemo razmatrati.

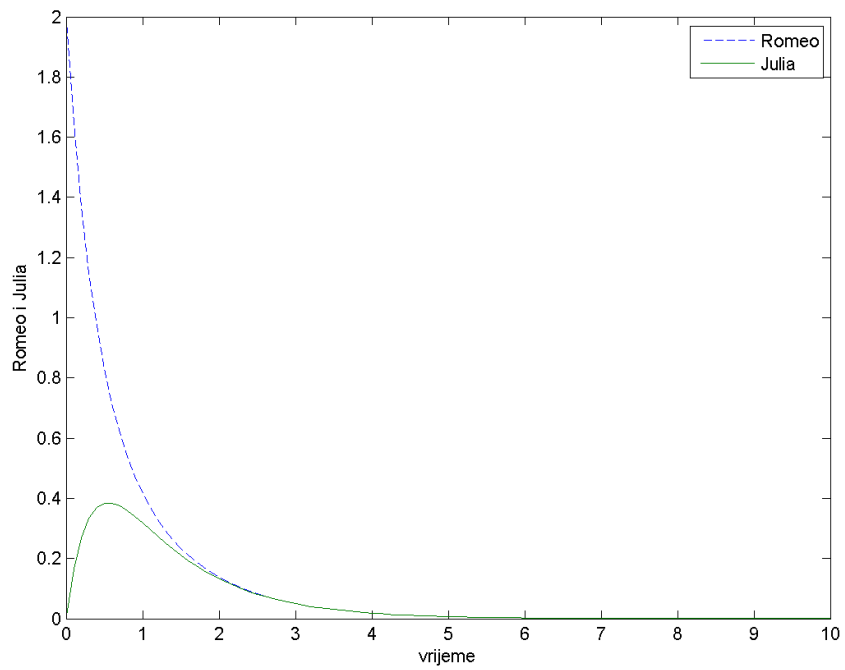
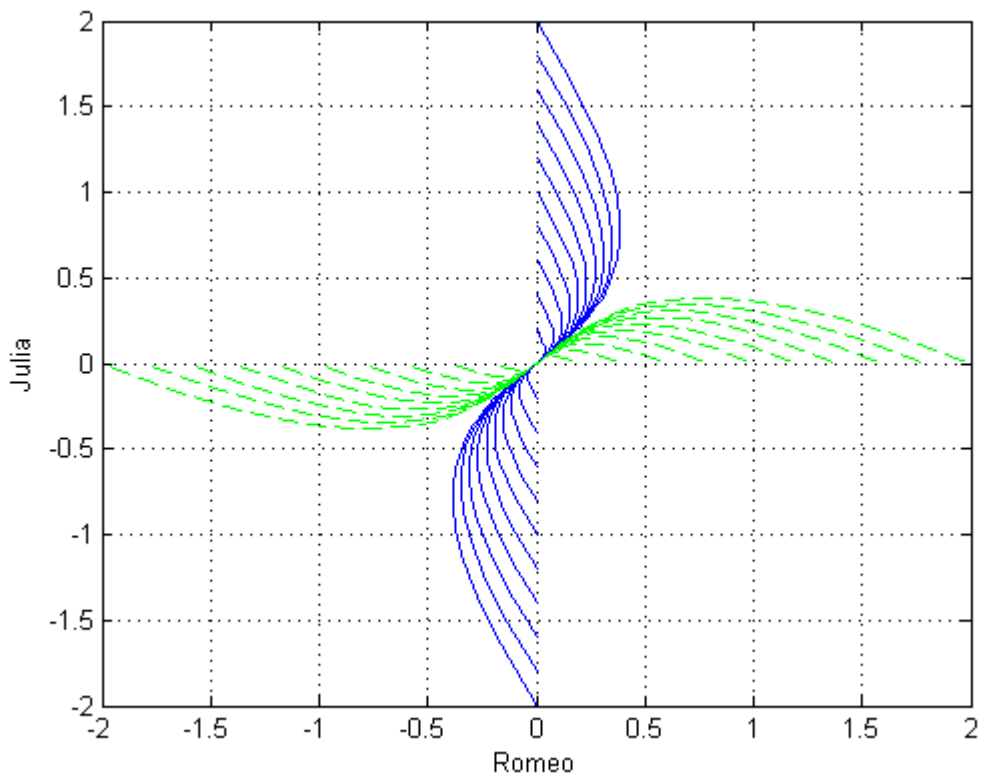
8.1. Ljubavnik i pohlepnik

Ako je $|a| < |b|$ tada govorimo o ljubavi ili sukobu, te također postoji više slučajeva ovisno o početnim uvjetima. Uzimamo slučaj u kojemu definiramo parametre $|a|=1$ i $|b|=2$, te vrijedi $c=b$ i $d=a$, takav slučaj je prikazan na *Slici 22*. Slika pokazuje da kada Romeova ljubav prema Juliji raste, tada raste i Julijina ljubav prema njemu, odnosno kada Julija mrzi Romea, i on osjeća isto prema njoj. Ako je $|a| > |b|$, uzimamo slučaj u kojemu definiramo parametre $|a|=-2$ i $|b|=1$ (*Slika 23*) i vidimo da u tome slučaju dolazi do apatije između

Romea i Julije, odnosno trajektorije se približavaju nuli što govori da između njih dvoje nema nikakvih osjećaja.



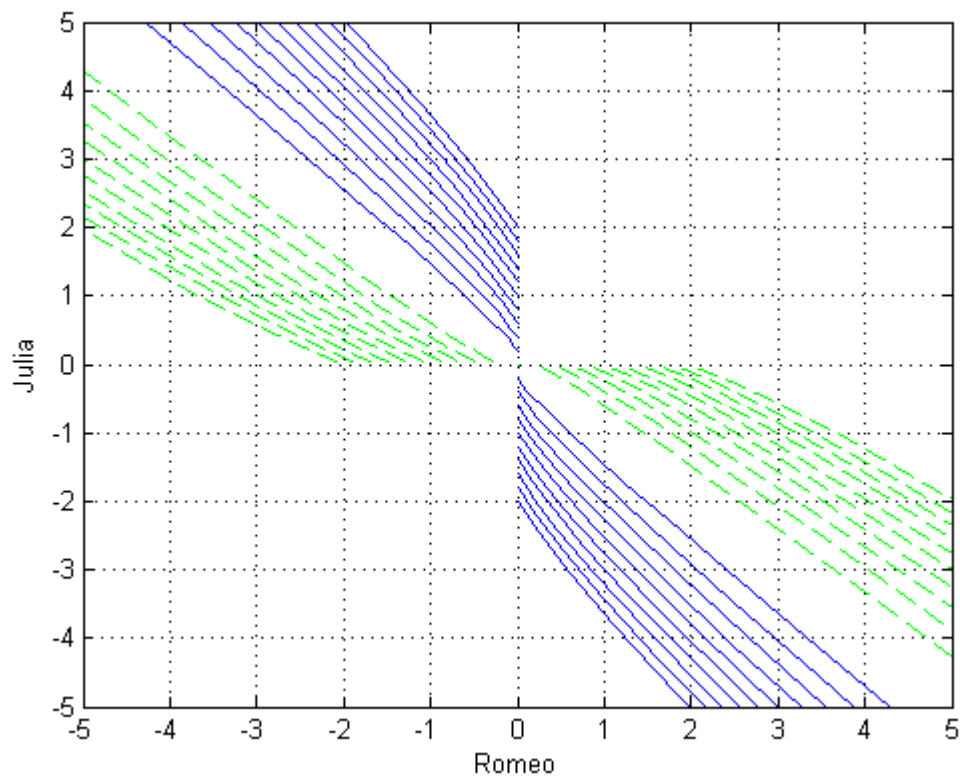
Slika 22. Odnos ljubavnik-pohlepnik kada osjećaji uzajamno rastu

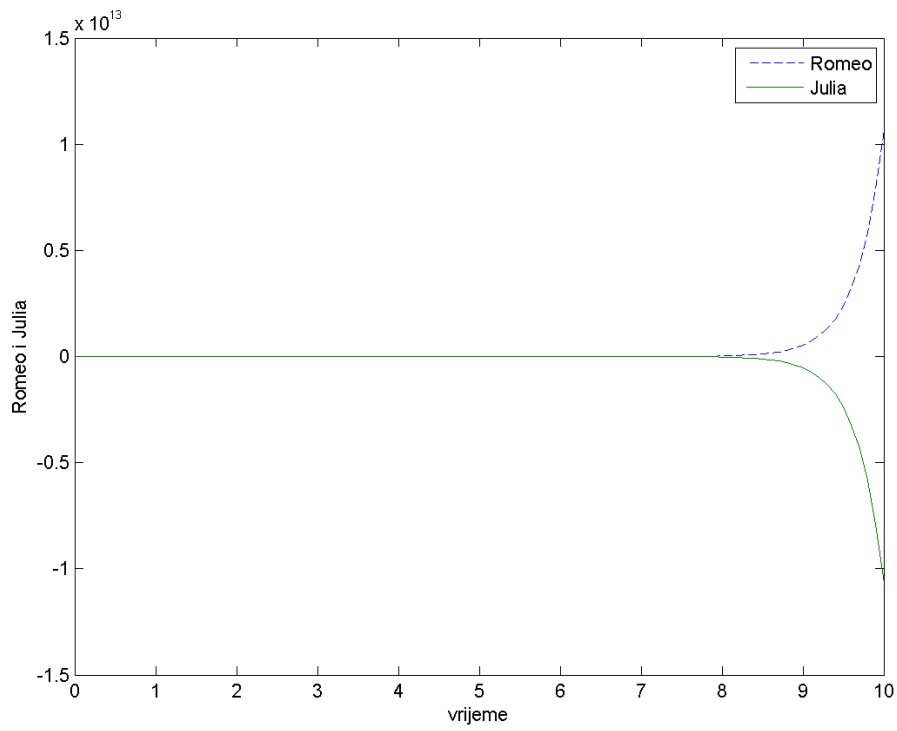


Slika 23. Odnos ljubavnik-pohlepnik u slučaju apatije

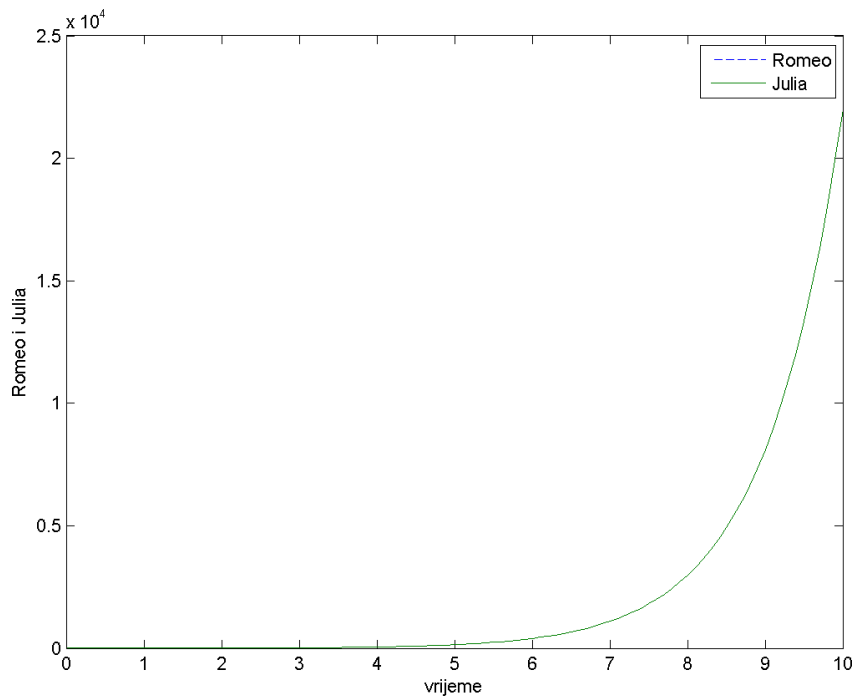
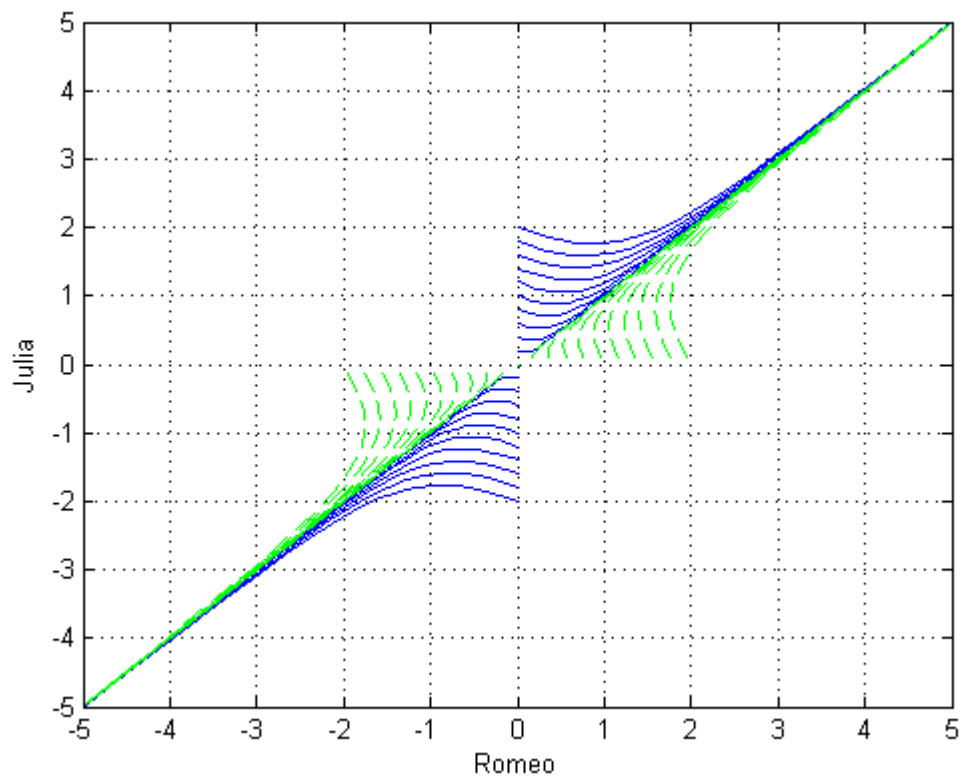
8.2. Ljubavnik i pustinja

Ako je $|a| > |b|$ tada nastupa stanje uzajamne ravnodušnosti. Uzimamo slučaj u kojemu definiramo parametre $|a|= 2$ i $|b|= -1$ te vrijedi $c=b$ i $d=a$, takav slučaj je prikazan na *Slici 24*. Iz slike vidimo da kada se Romeova ljubav prema Juliji povećava, tada se Julijina ljubav prema njemu smanjuje i obrnuto, ovisno o početnim uvjetima. U slučaju ako je $|a| < |b|$, uzeli smo vrijednost parametara $a=-1$, $b=2$ (*Slika 25*) i u tome slučaju vidimo da ukoliko Romeova ljubav prema Juliji raste, tada raste i Julijina ljubav prema Romeu. S druge strane, kada Julija sve više voli Romea, tada i Romeovi njoj uzvraća istim osjećajima.





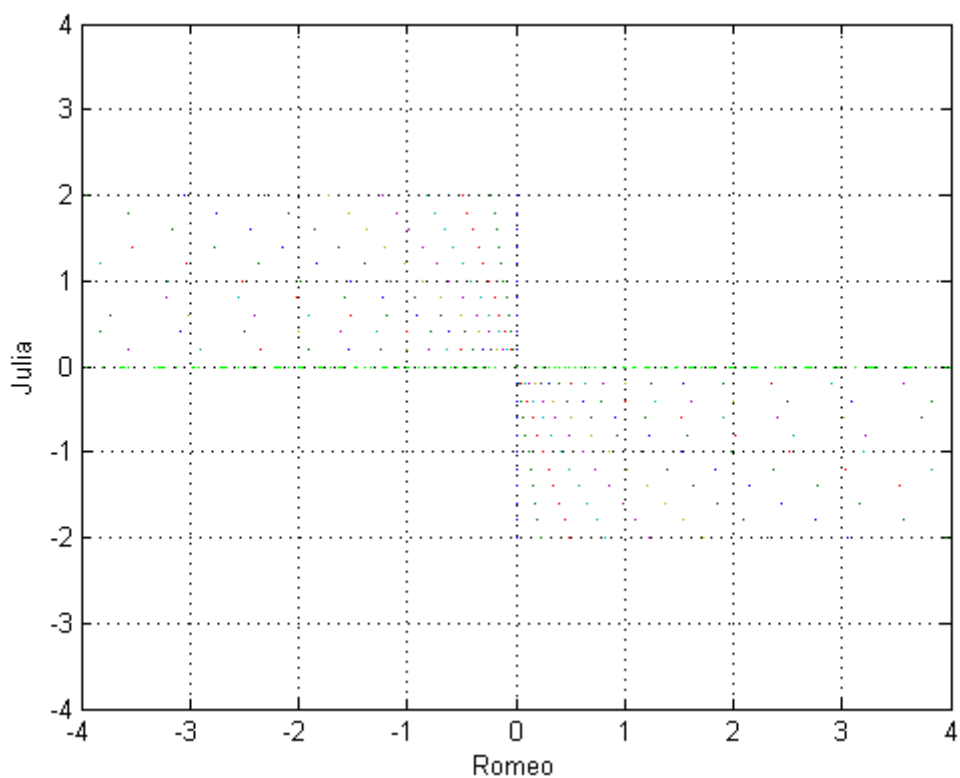
Slika 24. Odnos ljubavnik-pustinjak za slučaj $|a| > |b|$

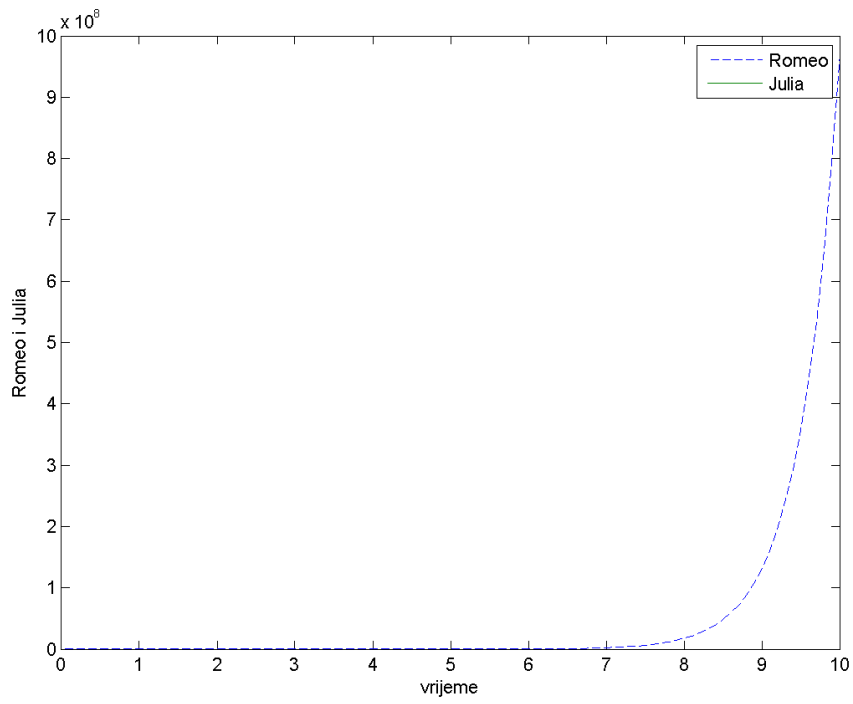


Slika 25. Odnos ljubavnik-pustinjak za slučaj $|a| < |b|$

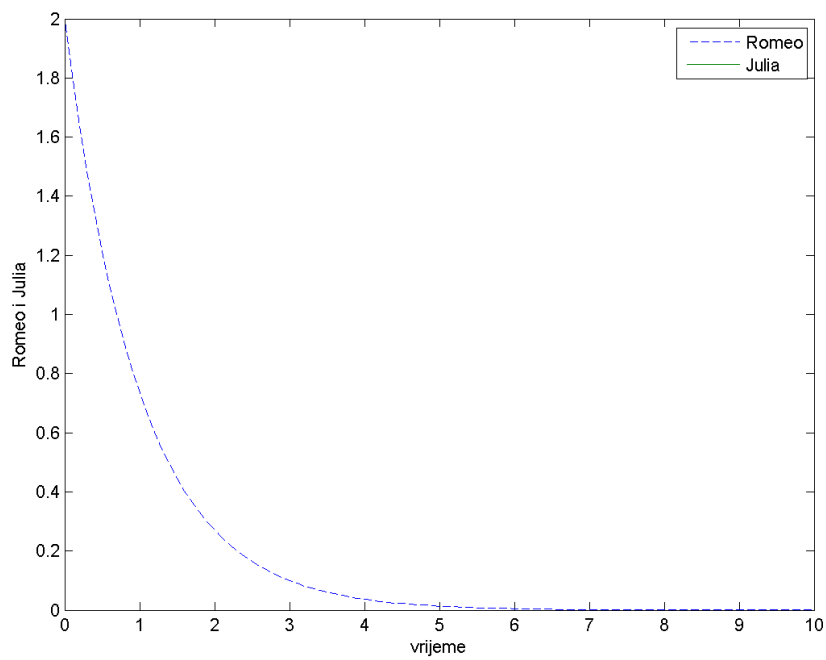
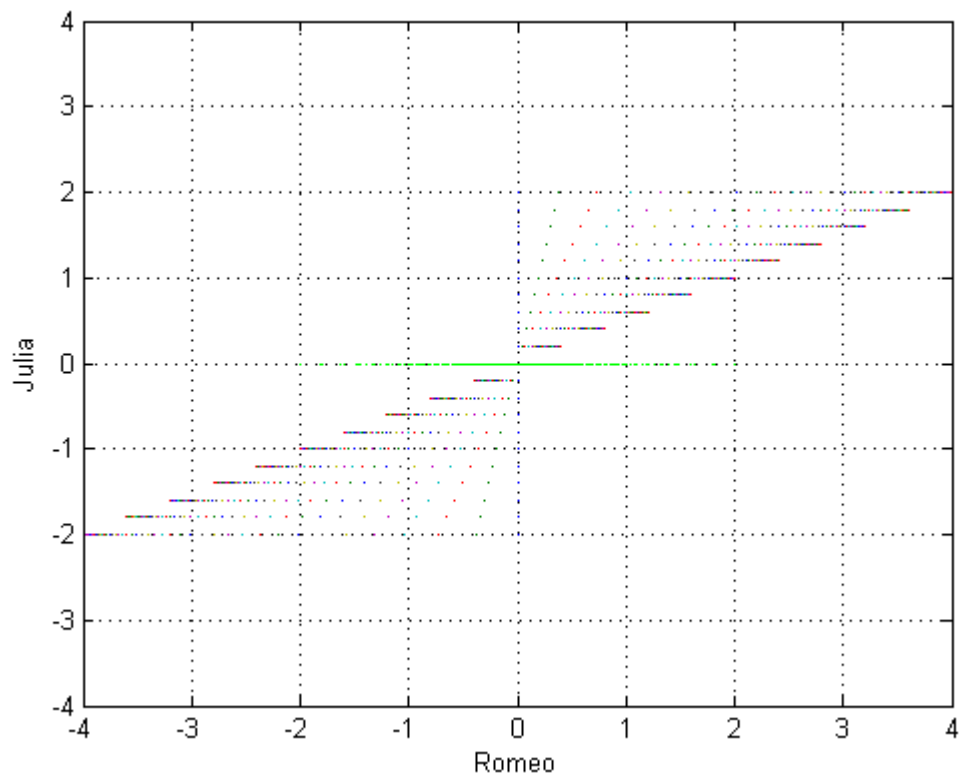
9. RAVNODUŠNI ROMEO

Ako pretpostavimo da na Romea ne utječu ni vlastiti osjećaji ($a=0$), niti osjećaji koje prima od Julije ($b=0$), tada je R konstanta, odnosno Romeova ljubav (ili mržnja) se ne mijenja. Izgled grafa će isključivo ovisiti o Julijinim osjećajima ako su njeni osjećaji prema Romeu snažniji od Romeovih osjećaja prema njoj (situacije prikazane na *Slikama 26 i 27*). Ako je $|c| < |d|$ (*Slika 26*) uzeti su parametri $c=-1$, $d=2$. Za drugi slučaj (*Slika 27*) kada je $|c| > |d|$ uzeli smo parametre $c=2$, $d=-1$.²





Slika 26. *Ravnodušni Romeo za slučaj $|c| < |d|$*



Slika 27. *Ravnodušni Romeo za slučaj $|c| > |d|$*

10. ZAKLJUČAK

U seminaru smo opisivali linearan model ljubavi kojime su prikazani različite odnose Romea i Julije pomoću matematičkog sustava od dvije linearne jednadžbe.

$$\frac{dR}{dt} = aR + bJ \tag{7}$$

$$\frac{dJ}{dt} = cR + dJ$$

Model je sam po sebi vrlo jednostavan, ali ima jako složenu dinamiku. Čak i jednostavne nelineatnosti mogu proizvesti kaos kad postoje tri ili više varijabli. Svakom promjenom parametara dobiva se nova situacija u odnosu Romea i Julije. U radu smo grafički prikazali različite kombinacije *romantičnih stilova* pomoću modela u programskom paketu *Matlab R2010b*.

11. LITERATURA

1. <http://hr.wikipedia.org/wiki/Ljubav>, 01.06.2013.
2. <http://sprott.physics.wisc.edu/pubs/paper277.pdf> , 01.06.2013.
3. http://powerlab.fsb.hr/DinamikaProcesa/Matmod_uvod_novo.pdf, 01.06.2013.
4. Interna skripta: Uvod u matematičke metode u inženjerstvu