SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET KEMIJSKOG INŽENJERSTVA I TEHNOLOGIJE

Zavod za matematiku

Kolegij: **Uvod u matematičke metode u inženjerstvu**

SEMINARSKI RAD

Diskretni dinamički sustavi – logistički model – kaos

Studenti: Dražen Jovičić

Marin Svalina

Jasmin Pađan

lipanj, 2013.

Sadržaj

1. UVOD

Povijest čovječanstva prepuna je događaja u kojima su ljudi nastojali kontrolirati okolinu. Kontrola je nužna da bi ljudi mogli zadovoljiti sve svoje potrebe (npr. kontroliranje vatre omogućilo je ljudima toplinu, zaštitu i bolju ishranu). Niz ovakvih uspjeha u povijesti, a posebno u prošlom stoljeću, naveli su čovjeka da razmišlja deterministički. Determinizam znači određenost, jednoznačnost, svojstvo u koje ne sumnjamo. Kada bi svijet bio deterministički tada bismo mogli predvidjeti svaki događaj te razviti sustav kontrole. Predviđanje se temelji na rješavanju jednadžbi koje opisuju ponašanje sustava koji nastojimo predvidjeti. Tek se pojavom računala mogla razviti teorija kaosa jer jedino računala mogu rješavati jednadžbe za predviđanje događaja.[1]

Teorija kaosa opisuje ponašanje nekih nelinearnih dinamičkih sustava u matematici i fizici koji se pod određenim uvjetima ponašaju na prividno nepredvidljiv način. Dinamika općenito govori o promjeni, stoga se može reći da dinamički sustav opisuje međusobnu zavisnost sustava varijabli i njihovu promjenu u vremenu. Dinamički sustavi opisani su diferencijalnim i diferencijskim jednadžbama, a da bi se uopće moglo predvidjeti ponašanje dinamičkog sustava za neki duži vremenski period potrebno je integrirati te jednadžbe. Integrira se pomoću analitičkih metoda ili pomoću iteracija na računalu. Vidjet ćemo u daljnjem tekstu da su iteracije neophodne kod opisivanja diskretnih dinamičkih sustava. Dinamički sustavi mogu biti kontinuirani, diskontinuirani te kombinacija navedenih (hibridni). Kontinuiran je onaj sustav koji pokazuje da u proizvoljno malenom vremenskom periodu dolazi do promjene parametara, osim kada sustav miruje. Svi takvi sustavi su opisani diferencijalnim jednadžbama, te su najbliži stvarnim uvjetima u prirodi. Diskontinuirani je onaj sustav kod kojih se promjene ne događaju stalno, nego u diskretnim vremenskim intervalima. Ponašanje dinamičkih sustava moguće je predočiti orbitama tj. trajektorijama, koje se, nakon dovoljno vremena, mogu razviti u skup koji nazivamo atraktorima. Atraktori čine dio faznog prostora promatranog sustava, odnosno njih smatramo geometrijskim podskupom faznog prostora. Orbita dinamičkog sustava unutar atraktora može biti periodna ili kaotična. Geometrijska predodžba dinamičnih sustava olakšava nam razumijevanje promatranog sustava.[1,2]

2. DISKRETNI DINAMIČKI SUSTAVI

Diskretni dinamički sustav modelira promjenu (dinamiku) jedne ili više populacija ili količina u kojima se promjena događa deterministički i u diskretnim vremenskim intervalima. On pokazuje kako prenijeti situacije u realnom vremenu u matematički jezik. Uz povećanje kompjutorske moći te povećanog interesa za teoriju kaosa, diskretni dinamički sustavi su se pokazali kao važno područje istraživanja u matematici.[3]

Kroz ovo poglavlje promatrat ćemo realnu funkciju :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

S f^n se označava n-ta iteracija od f, odnosno f^n je kompozicija od n članova same f funkcije.

Točka x_0 predstavlja sjeme orbite.

Uz neku fiksiranu vrijednost $x_0 \in \mathbb{R}$ slijedi niz koji čini orbitu (trajektoriju, putanju)

x_0 s obzirom na f:

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0), \ldots, x_n = f^n(x_0)$$

Dakle prema tome možemo općenito pisati:

$$x_n = f^n(x_0).$$

Primjer 1.

Uzmimo funkciju: $f(x) = x^2+1$ sa sjemenom funkcije $x_0=0$.

Tada dobivamo da orbita izgleda:

$$x_0=0$$
$$x_1=1$$
$$x_2=2$$
$$x_3=5$$
$$x_4=26$$
$$\ldots$$
$$x_n = \text{velik}$$
$$x_{n+1} = \text{jako velik za velike } n$$

Nastavljajući primjećujemo da orbita teži u ∞ ako $n \to \infty$.

U analogiji s ravnotežnim rješenjima sustava diferencijalnih jednadžbi stacionarne ili fiksne točke imaju središnju ulogu u diskretnim dinamičkim sustavima. Kažemo da je x_0 stacionarna točka za f ako je:

$$f(x_0) = x_0$$

jer je tada orbita konstantan niz

$$x_0,\ x_1 = x_0,\ x_2 = x_0 \ldots$$

te se može reći da je to stacionarna orbita. Isto tako, periodne točke perioda n, analogne su zatvorenim orbitama diferencijalnih jednadžbi. x_0 je periodan za f ako je $f^n(x_0) = x_0$ za neki $n > 0$.

Kao i zatvorena orbita, periodna orbita se ponavlja:

$$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0, \ldots, x_{n-1}, x_0.$$

Orbite perioda n nazivaju se n - ciklusom. Periodna točka x_0 ima minimalni period n ako je n najmanji prirodni broj za koji vrijedi da $f^n(x_0) = x_0$.[3]

Primjer 2.

Funkcija $f(x) = x^3$ ima stacionarne točke u $x=0, \pm1$.

Funkcija $g(x) = -x^3$ ima stacionarnu točku u 0 i periodnu točku perioda 2 u $x = \pm1$ jer je $g(1)=-1$ a $g(-1)=1$ tako da je $g^2(\pm1) = \pm1$.

Funkcija $h(x) = \frac{(2-x)(3x+1)}{2}$ ima periodnu točku 3. reda ili 3-ciklus sa $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=x_0=0$...(Slika 1).

Orbite jednodimenzionalnog diskretnog sustava možemo prikazati vizualno **grafičkom iteracijom.**

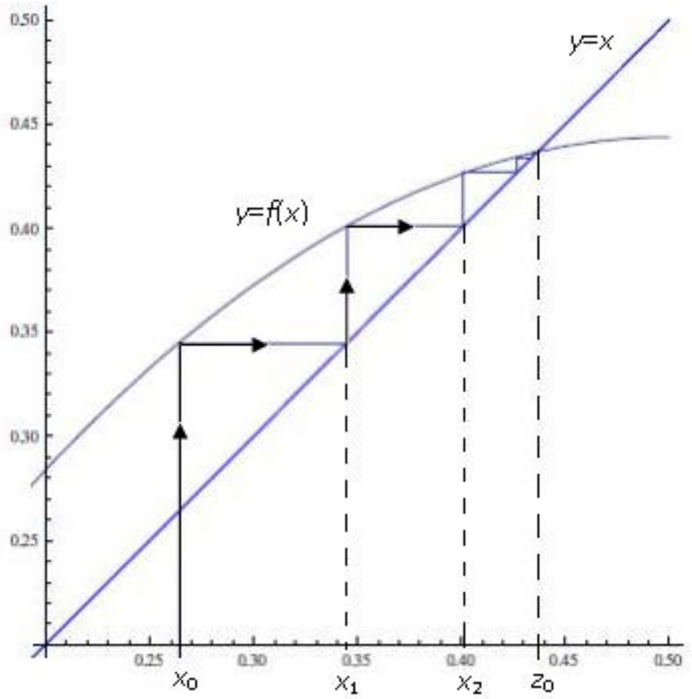
Grafičku iteraciju radimo tako da u koordinatnom sustavu nacrtamo krivulju

$$y = f(x)$$

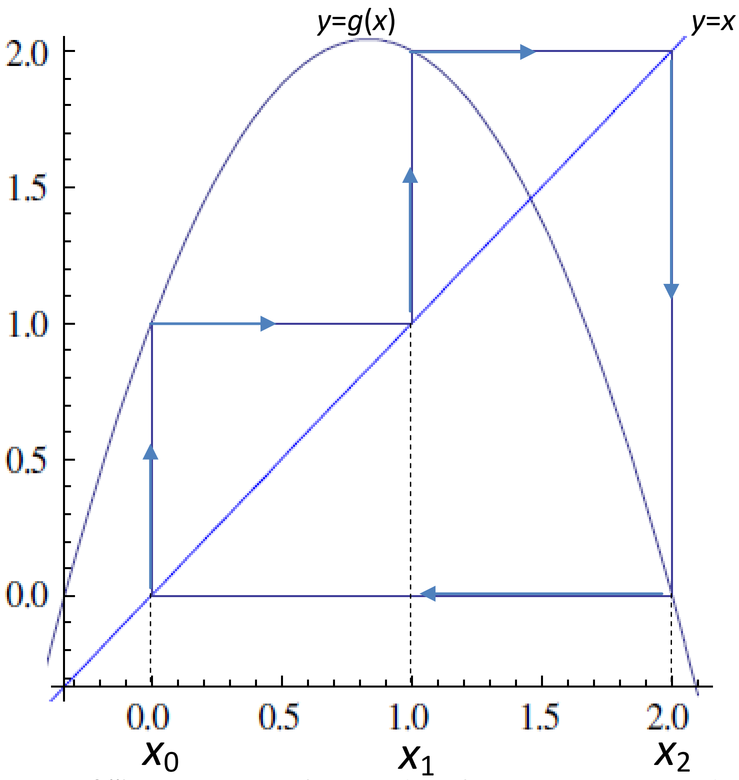
te pravac $y=x$ na istom grafu. Na graf ucrtavamo orbitu nekog sjemena x_0 tako da počnemo povlačenjem vertikalne linije od pravca u početnoj točki (x_0, x_0) do krivulje u točki

$$(x_0, f(x_0)) = (x_0, x_1)$$

Od točke (x_0, x_1) povlačimo horizontalnu liniju do pravca $y=x$ tj. do točke (x_1, x_1). Tako od sjemena x_0 dolazimo do slijedeće točke x_1 na trajektoriji. Postupak ponavljamo sa x_1, iz (x_1, x_1) vertikalno do (x_1, x_2) te potom horizontalno do (x_2, x_2). Nastavljajući dolazimo do niza parova linija koje završavaju u točki (x_n, x_n) na pravcu (Slika 1. i Slika 2.). Pomoću ove metode vizualizacije možemo dobiti informacije o ponašanju sustava kojeg promatramo.[3]



Slika 1. Grafička iteracija prikazuje da orbita sjemena x_0 teži u fiksnu točku z_0 kad iteriramo *f*-ju.[3]



Slika 2. Grafička iteracija prikazuje da orbita sjemena x_0 pod $g(x)$ leži na 3-ciklusu, tj. da je periodna.[3]

2.1. Fiksne ili stacionarne točke

Kao kod ravnotežnih točki diferencijalnih jednadžbi, postoji različiti tipovi fiksnih točki za diskretni dinamički sustav. Pretpostavimo da je x_0 fiksna točka za f. Kažemo za x_0 da je *ponor* ili *privlačna fiksna točka* ako postoji okolina U za x_0 u $\mathbb{R}$, koja ima svojstva da ako $y_0 \in U$, tada $f^n(y_0) \in U$ za sve n i štoviše, $f^n(y_0) \to x_0$ kako $n \to \infty$. Slično, x_0 je *izvor* ili *odbijajuća fiksna točka* ako sve orbite (izuzev x_0) napuste U kad iteriramo f-ju. Fiksna točka je *neutralna* ili *indiferentna* ako nije ni odbijajuća ni privlačna.[3]

__Teorem__

Neka funkcija ima fiksnu točku u x_0

(i) ako je $|f'(x_0)| < 1$ tada je x_0 ponor ;

(ii) ako je $|f'(x_0)| > 1$ tada je x_0 izvor ;

(iii) ako je $f'(x_0) = \pm 1$ nemamo informaciju o tipu fiksne točke.

Dokaz

(i) ako se pretpostavi $|f'(x_0)| = v < 1$ i uzme neki k za koji vrijedi $v < k < 1$, može se naći $\delta > 0$ takav da $|f'(x)| < k$ za sve x u intervalu $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Uz $x \in I$ imamo (prema Lagrangeovu teoremu srednje vrijednosti):

$$\frac{f(x) - x_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$$

za neki c između x i x_0. Odatle imamo

$$|f(x)-x_0| = |f(x)-f(x_0)| < k\,|x - x_0|$$

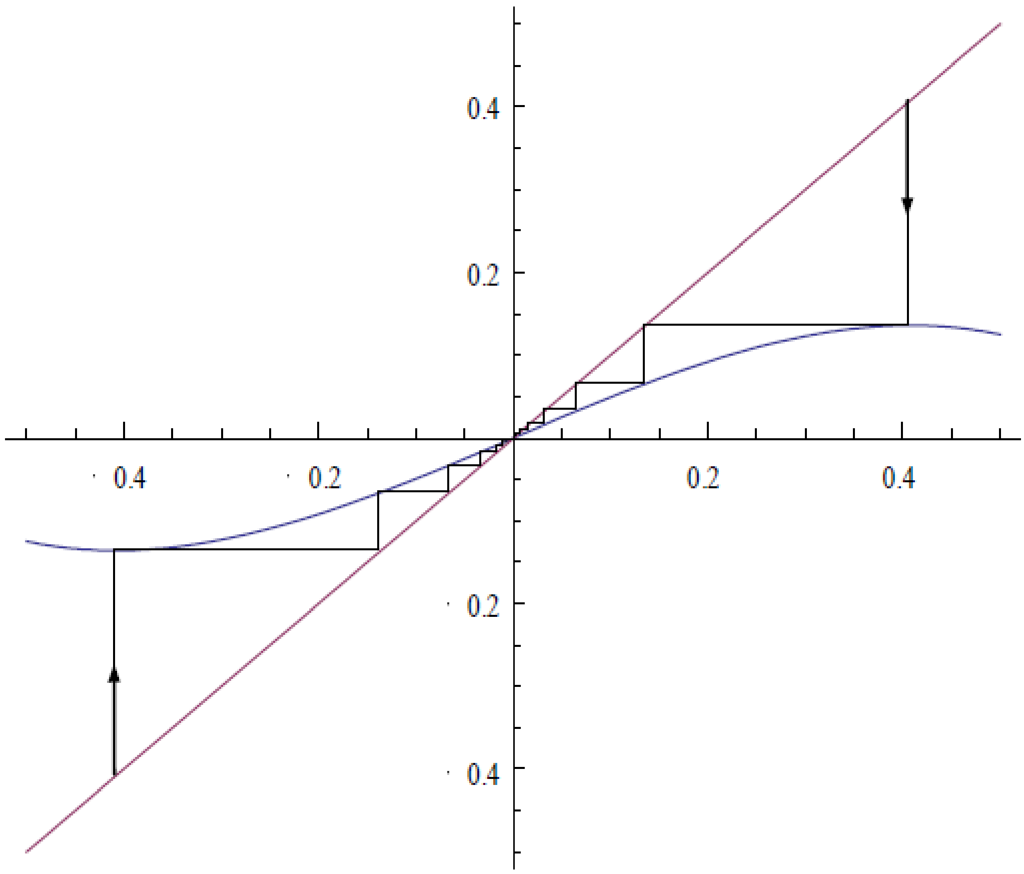
iz čega slijedi da je $f(x)$ bliža x_0 nego x, odnosno $f(x) \in I$. Primjenom ovog rezultata ponovno dolazimo do slijedećeg izraza:

$$|f(f(x))-x_0| = |f^2(x)-x_0| < k\,|f(x) - x_0| < k^2\,|x - x_0|.$$

Ako ponavljamo postupak n puta možemo općenito napisati:

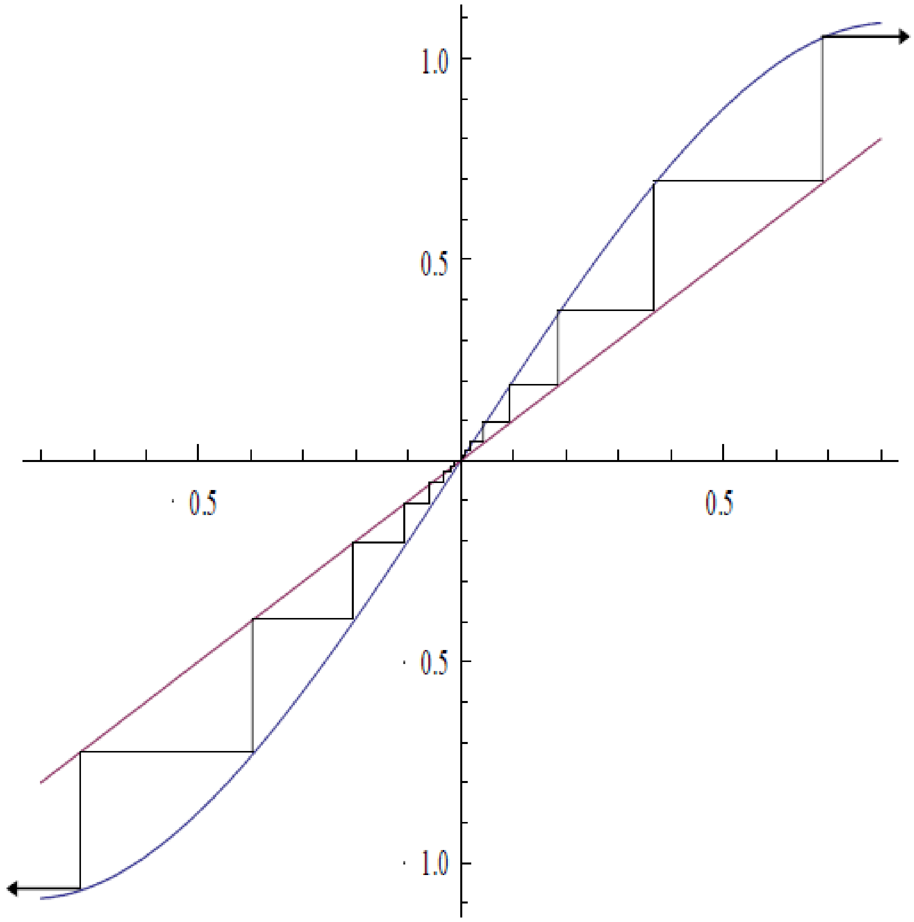
$$|f^n(x) - x_0| < k^n\,|x - x_0|,$$

tako da $f^n(x) \to x_0$ u I, uz $0 < k < 1$. Drugim riječima, ako je x_0 ponor, svaka iteracija u okolini te točke vodi u x_0 (slika 3).



Slika 3. Grafička iteracija funkcije $f(x) = \frac{x}{2} - x^3$ ima fiksnu točku u 0 s tim da je $f'(0) = 1/2<1$ i tu je 0 ponor.

(ii) slično prethodnome, s razlikom da se radi o izvoru, odnosno odbijajućoj fiksnoj točki, što se može objasniti da točke u okolini izvora x_0, bježe iz I. Na slici 4 vidimo grafičku iteraciju s fiksnom točkom koja je izvor.[3]

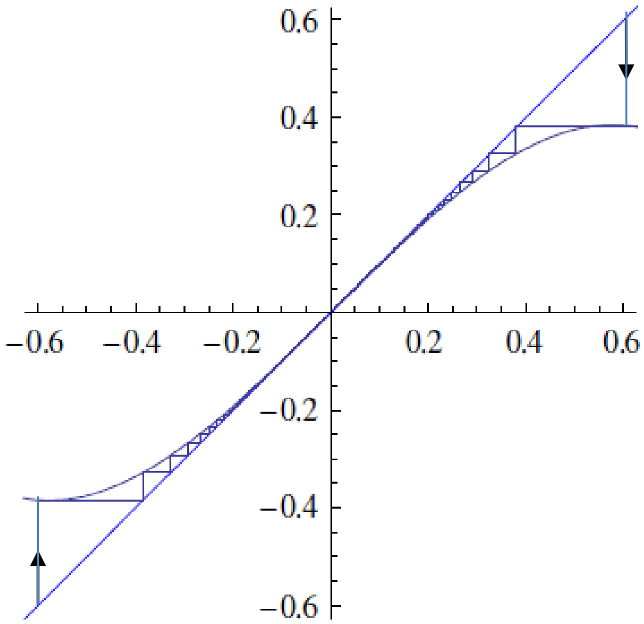


Slika 4. Grafička iteracija funkcije $f(x) = 2x - x^3$ ima fiksnu točku u 0 s tim da je $f'(0) = 2>1$ i tu je 0 izvor.

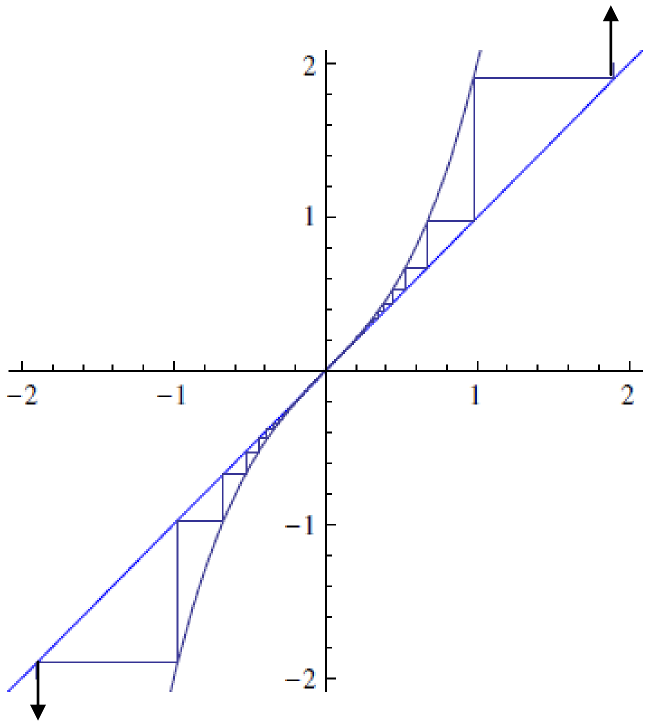
(iii) Svaka od ovih funkcija

$$f(x) = x + x^3;$$
$$g(x) = x - x^3;$$
$$h(x) = x + x^2;$$

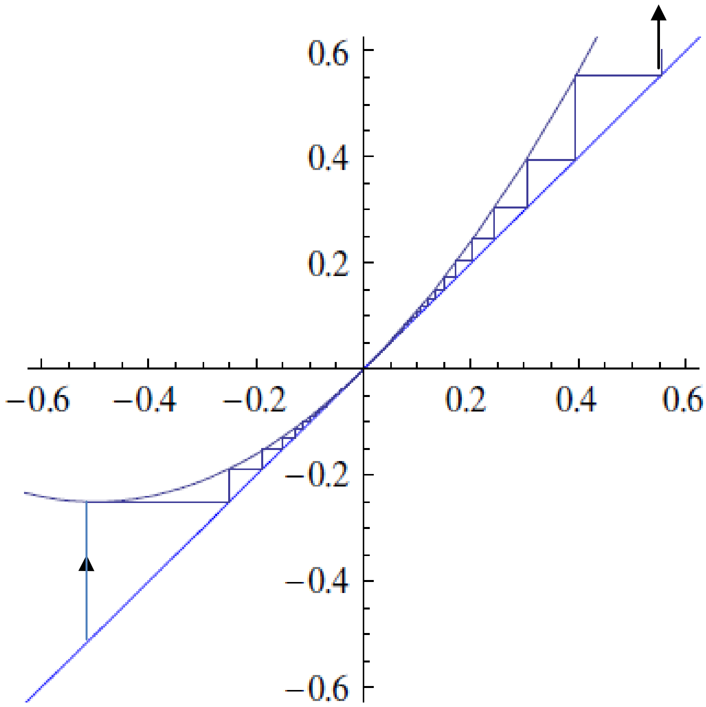
ima fiksnu točku u 0, s time da je $f'(0) = 1$. No, tek grafičkom iteracijom možemo vidjeti kako se ove funkcije razlikuju, što se može vidjeti na slikama 5, 6 i 7. Pa tako je u *f(x)* točka 0 izvor; *g(x)* u 0 ima ponor; *h(x)* nema nijedno, jer je 0 privlačna točka s jedne strane i odbijajuća s druge strane.



Slika 5. Grafička iteracija funkcije $g(x) = x - x^3$.[3]



Slika 6. Grafička iteracija funkcije $f(x) = x + x^3$.[3]



Slika 7. Grafička iteracija $h(x) = x + x^2$ koja ima i izvor i ponor.[3]

Dakle, možemo zaključiti da za neku funkciju f, periodna točka x_0 perioda n je fiksna točka od f^n, te ju možemo klasificirati kao ponor ili izvor ovisno o tome imamo li $|(f^n)'(x_0)| < 1$ ili $|(f^n)'(x_0)| > 1$.[3]

3. DISKRETNI LOGISTIČKI MODEL

Populacija je skupina jedinki iste vrste koje žive na određenom prostoru i u određenom vremenu, te koje aktivno izmjenjuju genetički materijal dajući plodno potomstvo. To može biti skupina ljudi, životinja, biljaka ili nekih drugih organizama. Ljudi odavno nastoje modelirati rast populacije.[4]

Svi matematički modeli rasta populacije mogu se podijeliti u diskretne i kontinuirane.

- Kontinuiran (neprekinut) je onaj sustav koji pokazuje "glatke" promjene kroz vrijeme, tj. u proizvoljno malom vremenskom periodu dolazi do promjene parametara (osim, naravno, u slučaju kada sustav miruje). Svi takvi sustavi su opisani diferencijalnim jednadžbama, i intuitivno su najbliži stvarnim uvjetima u prirodi.

- Diskontinuiran (diskretan, isprekidan, skokovit) je onaj sustav kod kojeg nema glatke promjene parametara jer se te promjene ne događaju stalno, nego u diskretnim vremenskim intervalima. Ovakvi sustavi su češći u prirodi nego što bi se to moglo pomisliti, posebice u biološkom svijetu, a opisuju se iteracijskim jednadžbama.[2]

Rast neke populacije može se opisati jednom od jednostavnijih nelinearnih diferencijalnih jednadžbi 1. reda – logističkim modelom, koji predstavlja kontinuirani logistički model:

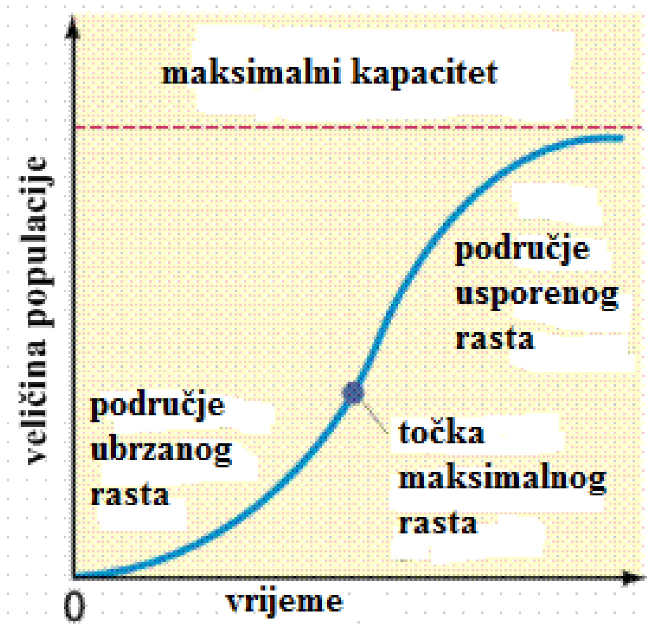
$$\frac{dx}{dt} = \lambda x(1 - \frac{x}{L})$$

gdje je *t* vrijeme, *λ* koeficijent rasta populacije, a *L* označava nosivi kapacitet, odnosno maksimalnu veličinu koju populacija može dosegnuti. Brzinu rasta populacije, *dx/dt*, možemo kraće zapisati kao *x'*. Navedena nelinearna jednadžba ima dvije vrijednosti *x* za koje je brzina *x´=0*, to su fiksne ili stacionarne točke *x= 0 i x= L*.

Kod logističkog modela moguće je doći do egzaktnog rješenja jednostavnim integriranjem gore dane jednadžbe te dolazimo do:

$$x(t) = \frac{L}{1 + (\frac{L}{x(0)} - 1)e^{-kt}}$$

Ovaj model često se naziva i populacijski model. Najčešće se koristi za promatranje kretanja ili rasta neke populacije, bilo životinja, biljaka, ljudi i sl. Rast neke populacije promatra se u zatvorenoj sredini s ograničenjem *L* koje predstavlja maksimalnu veličinu koju populacija može dostići. Populacija krenuvši od neke male vrijednosti ubrzano raste, a onda u nekom trenutku približavajući se nosivom kapacitetu prelazi u usporeni rast (slika 6.).[5]



Slika 6. Populacijska S krivulja.[6]

Uzorak prikupljen iz prirodne populacije nije kontinuirana funkcija vremena. Stoga se za opis rasta populacije koristi diskretni logistički model. Promotrimo populaciju čiji se sudionici zbrajaju svake godine ili u nekom drugom definiranom vremenu. Gustoća populacije na kraju godine *n* označena je s x_n (dok je x_0 početna vrijednost populacije). Ako pretpostavimo da ne može doći do prenapučenosti populacije, rast takve populacije možemo opisati modelom eksponencijalnog rasta:

$$x_{n+1} = \lambda x_n$$

za neku konstantu rasta $\lambda > 0$ (ako je $\lambda < 0$ populcija alternira što nije realno). To zapravo znači da je populacija u sljedećoj godini proporcionalna populaciji u promatranoj godini sa stalnim koeficijentom proporcionalnosti. Prema tome imamo:

$$x_1 = \lambda x_0$$

$$x_2 = \lambda x_1 = \lambda^2 x_0$$

$$x_3 = \lambda x_2 = \lambda^3 x_0$$

Na temelju toga može se zaključiti da vrijedi $x_n = \lambda^n x_0$. Ovo je dakle primjer diferencijske jednadžbe 1. reda u kojoj se vrijednost x_n određuje iz vrijednosti x_{n-1}. Ovaj eksponencijalni model rasta je bez ograničenja. Vidimo da do neograničenog rasta, eksplozije populacije, dolazi kada je stopa rasta $\lambda > 1$, a do neograničenog pada populacije (populacija izumire) za $0 \leq \lambda < 1$. Za vrijednost $\lambda = 1$ populacija ostaje nepromijenjena. U realnim uvjetima zbog prirodnih ograničenja (npr. ako se promatra populacija nekih životinjskih jedinki, ograničenje može biti nedostanak hrane, napad grabežljivaca ili neki drugi prirodni faktor) populacija raste dok ne dođe do neke kritične točke nakon koje pada i tako u krug, što je, zapravo, uobičajeni životni ciklus. Upravo zbog približavanja realnim sustavima koristi se diskretni logistički model, koji je vrlo sličan kontinuiranom, s razlikom da se u diskretnom uvijek promatra samo jedna generacija u vremenu. Populacijski model može se predočiti diskretnim logističkim modelom oblika:

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n)$$

Član x_n je gustoća populacije, $(1-x_n)$ je ograničavajući faktor, koji sprečava nezgodne posljedice koje ima eksponencijalni model. Kada je x_n malen, $(1-x_n)$ je blizu 1, i obratno, kada je x_n velik, $(1-x_n)$ je malen. Na taj način njihov umnožak nikada ne ide u krajnosti. Biološki gledano, to znači da je gustoća populacije jedne godine proporcionalna gustoći populacije prošle godine (x_n), raspoloživoj hrani, životnom prostoru i ostalim životnim uvjetima $(1-x_n)$. Posljedica toga je da se x_n u bilo kojoj iteraciji uvijek zadržava u intervalu, *I*, [0,1]. Kontrolni parametar λ odabire se u intervalu [0,4]. Kretanje početne populacije, x_0, može se predvidjeti jednostavnim iteriranjem kvadratne funkcije $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$, odnosno logističkim preslikavanjem.[3]

Tada imamo slijedeće:

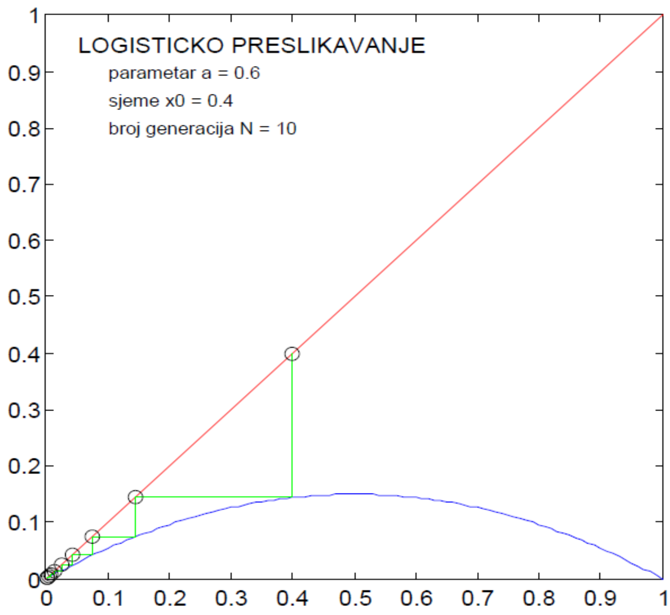
$$x_0$$

$$x_1 = \lambda x_0(1-x_0) = f_\lambda(x_0)$$

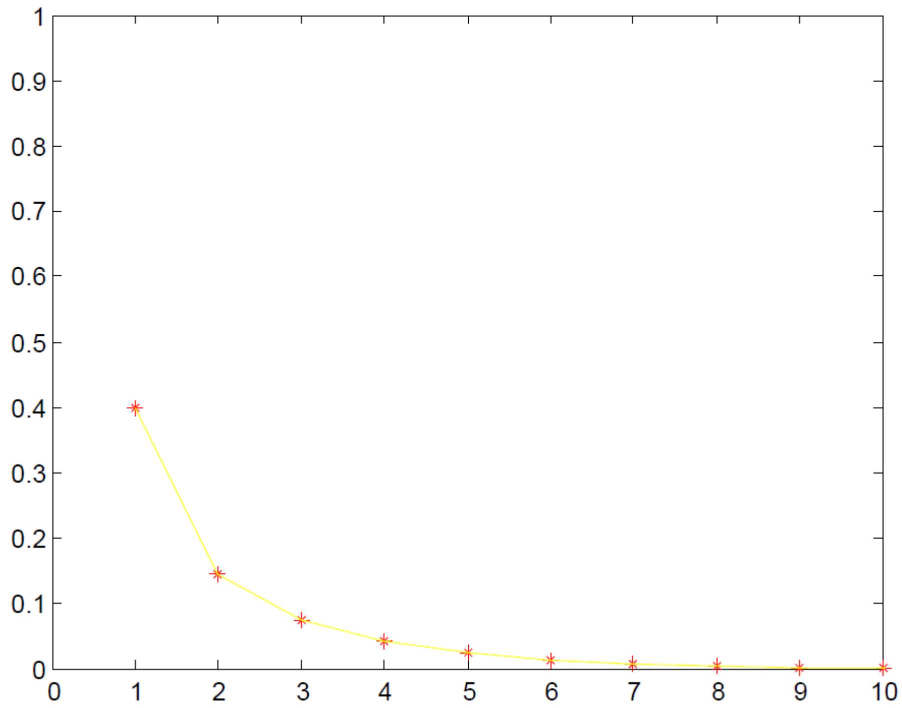
$$x_2 = \lambda x_1(1-x_1) = f_\lambda(x_1) = f_\lambda^{\ 2}(x_0)$$

Mijenjanjem početnih uvjeta (x_0 i λ) moguće je pratiti dugoročno ponašanje sustava kao što je prikazano u nekoliko sljedećih primjera. Za navedene primjere uzet je početni parametar $x_0 = 0.4$. Promatrano je ponašanje funkcije za različite vrijednost parametra λ unutar zadanog intervala $I = [0, 1]$.

Primjer 1. Za $0 < \lambda < 1$ populacija umire za svaki x_0 (neovisno o početnoj veličini populacije). Kao što je kružićima prikazano na slici 7., veličina populacije se smanjuje s brojem generacija. Krenuli smo od početne vrijednosti veličine populacije $x_0 = 0.4$ i ta vrijednost se nakon određenog broja generacija reducira do vrijednosti 0. To je jasnije vidljivo na slici 8., gdje je prikazana ovisnost veličine populacije o broju generacija. Populacija se svakom sljedećom generacijom smanjuje dok ne postigne vrijednost 0 (privlačna fiksna točka).

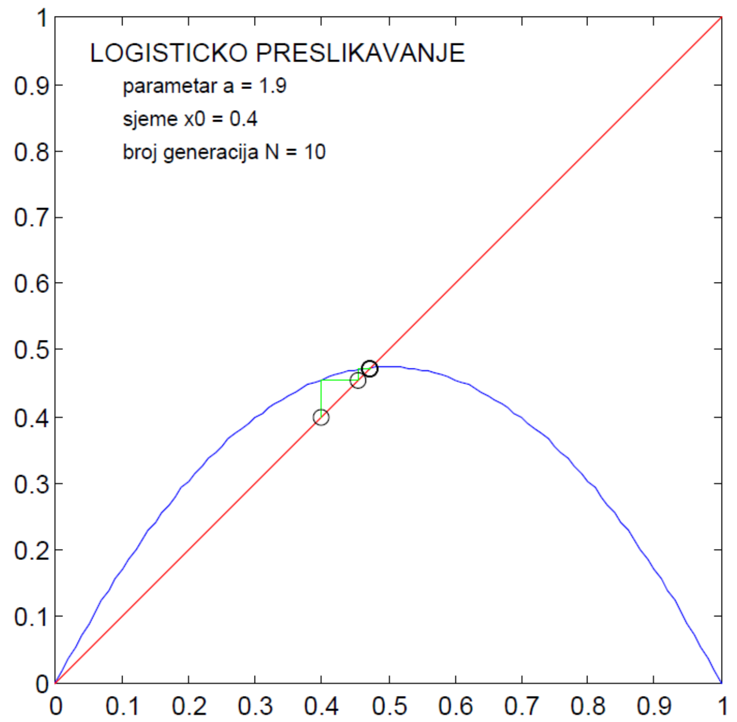


Slika 7. Ponašanje sustava za $\lambda = 0.6$. Privlačna fiksna točka je u 0.

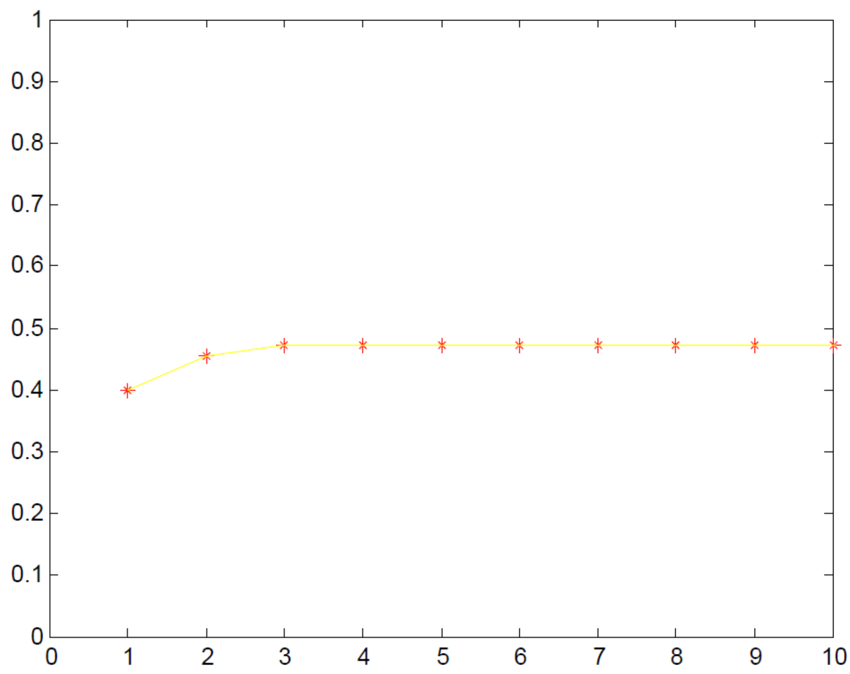


Slika 8. Prikaz vrijednosti sustava za λ = 0.6. Vrijednosti se smanjuju do 0.

<u>Primjer 2.</u> Za 1 < λ < 2 sustav se stabilizira na vrijednosti $\frac{\lambda - 1}{\lambda}$ za svaki x_0.

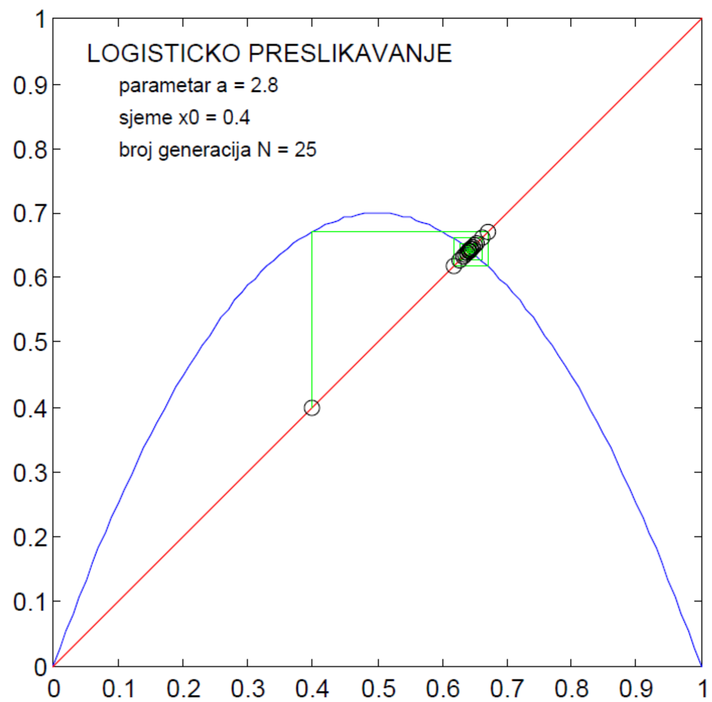


Slika 9. Ponašanje sustava za λ = 1.9. Privlačna fiksna točka je $\frac{\lambda - 1}{\lambda}$.

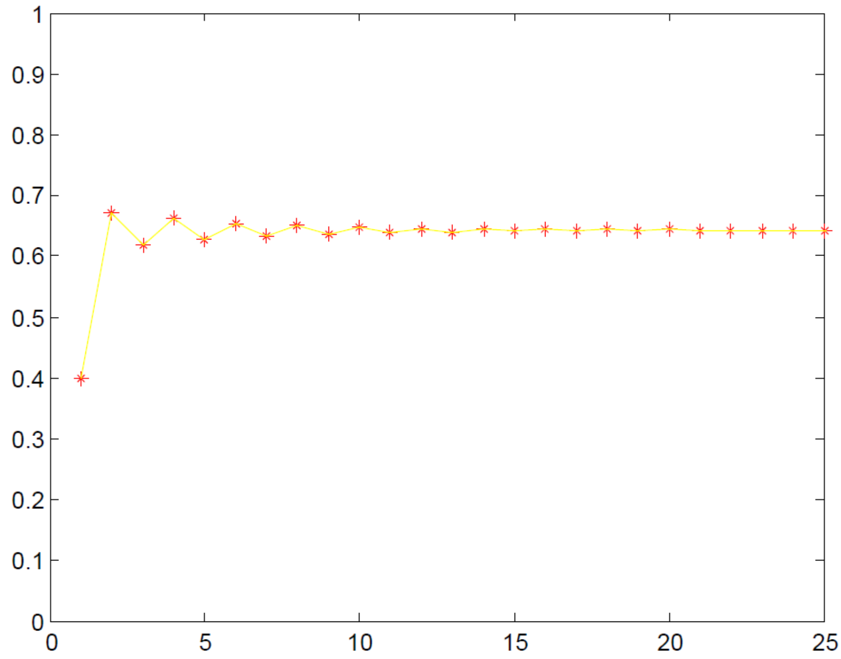


Slika 10. Prikaz vrijednosti sustava za λ = 1.9. Vrijednosti prvo rastu do $\frac{\lambda - 1}{\lambda}$ i nakon toga se ne mijenjaju.

Primjer 3. Za 2 < λ < 3 sustav u početku oscilira, a zatim se stabilizira na vrijednosti $\frac{\lambda - 1}{\lambda}$.

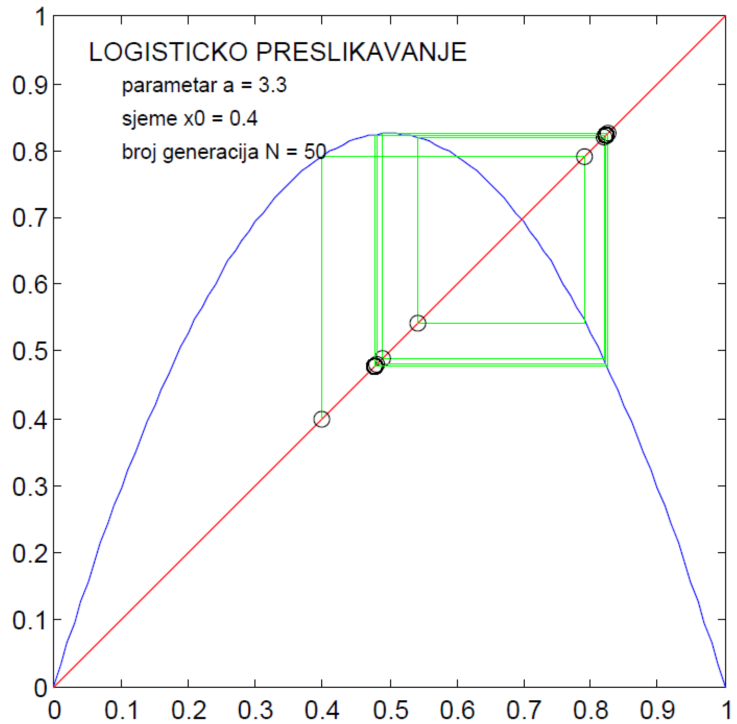


Slika 11. Ponašanje sustava za λ = 2.8. Privlačna fiksna točka je $\frac{\lambda - 1}{\lambda}$.

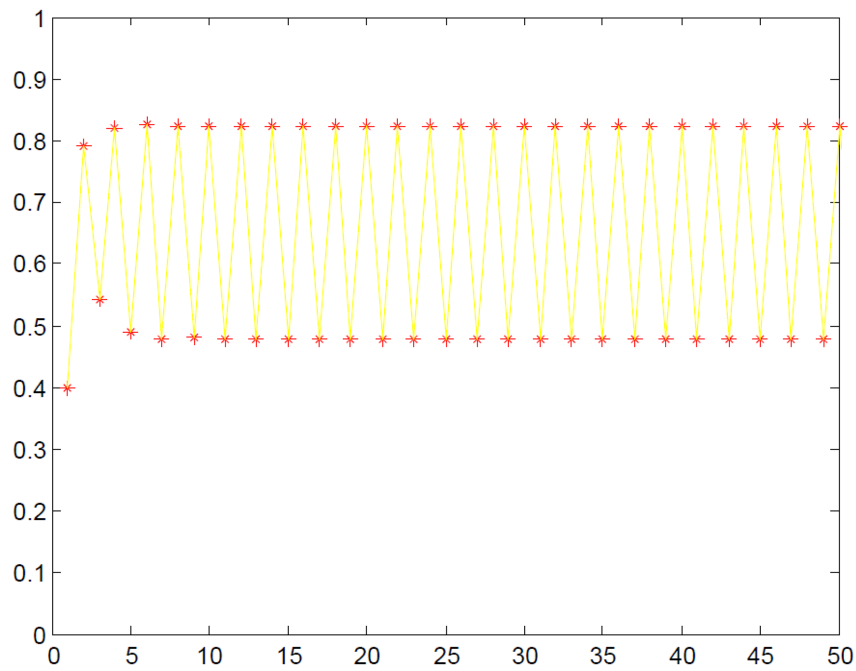


Slika 12. Prikaz vrijednosti sustava za λ = 2.8. Vrijednosti prvo osciliraju, a zatim se stabiliziraju na vrijednosti $\frac{\lambda - 1}{\lambda}$.

Primjer 4. Za 3 < λ < 3.45 sustav nakon stabilizacije oscilira oko dvije vrijednosti (oscilira s periodom 2).

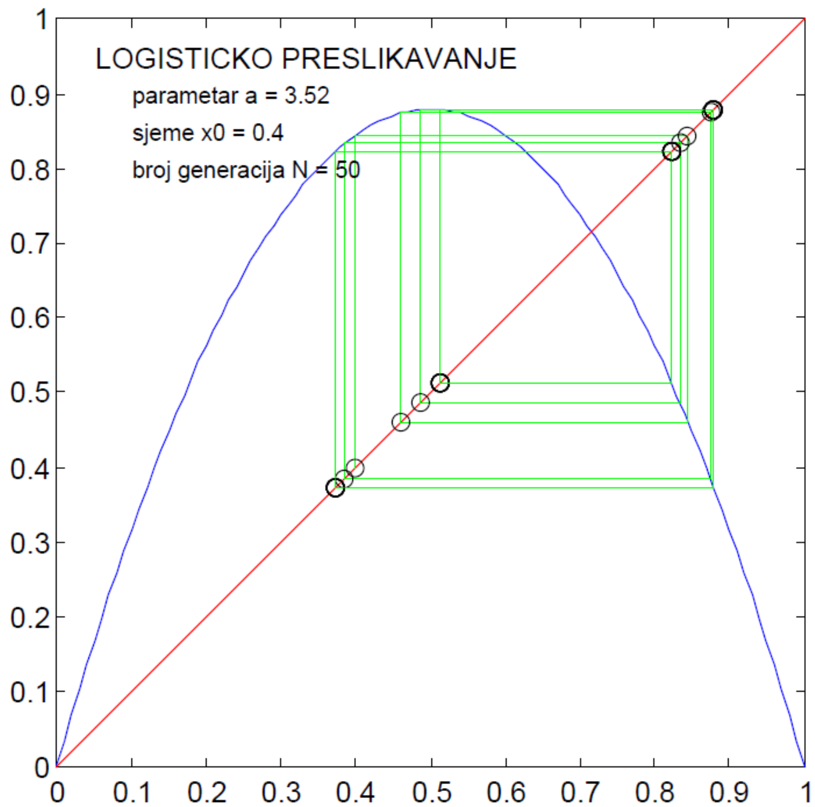


Slika 13. Ponašanje sustava za λ = 3.3. Oscilacija sustava s periodom 2.

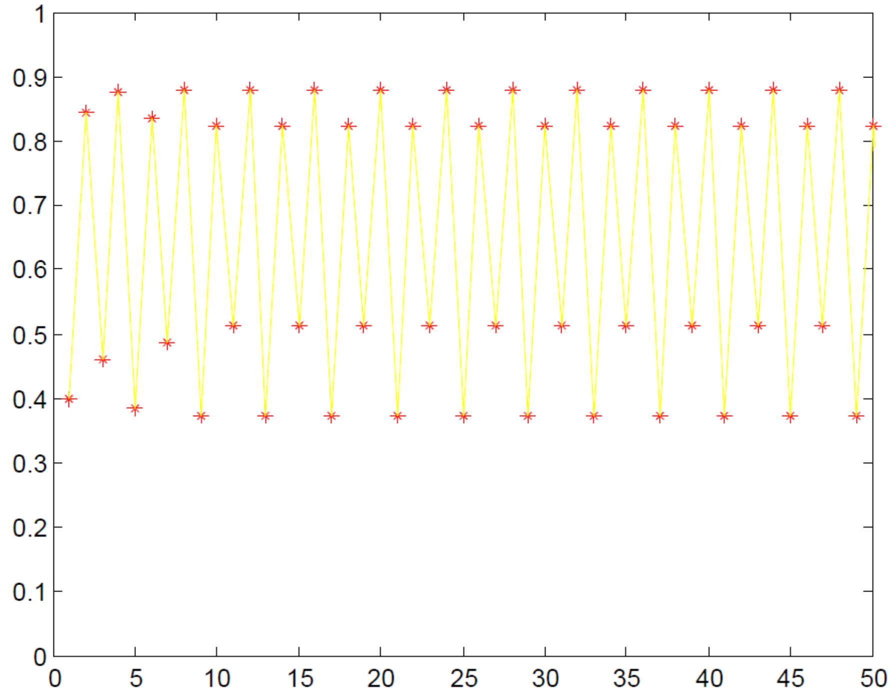


Slika 14. Prikaz vrijednosti sustava za $\lambda = 3.3$. Nakon stabilizacije sustav oscilira s periodom 2.

<u>Primjer 5.</u> Za $3.45 < \lambda < 3.54$ sustav nakon stabilizacije oscilira oko 4 vrijednosti.

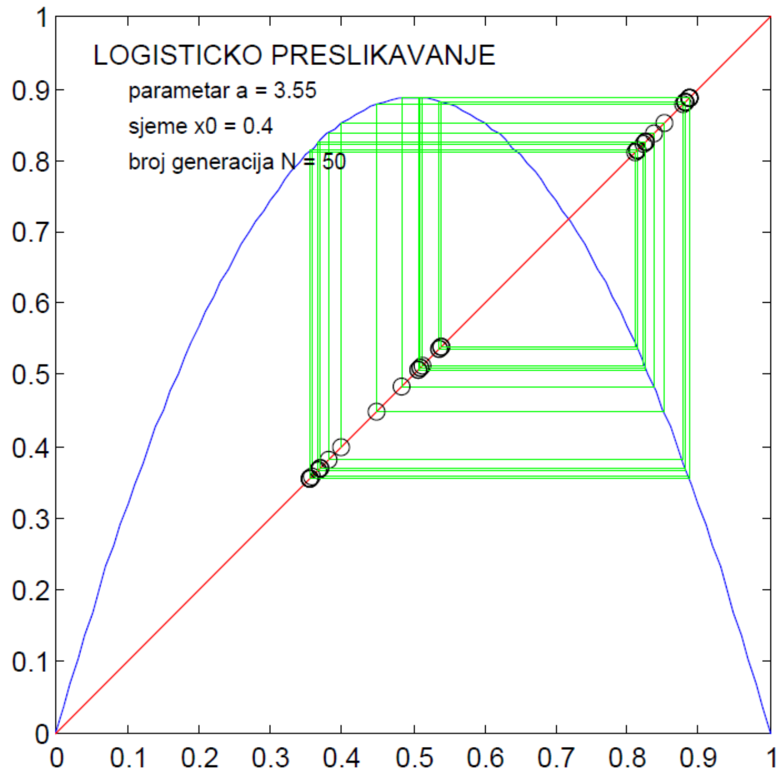


Slika 15. Ponašanje sustava za $\lambda = 3.52$. Oscilacija sustava s periodom 4.

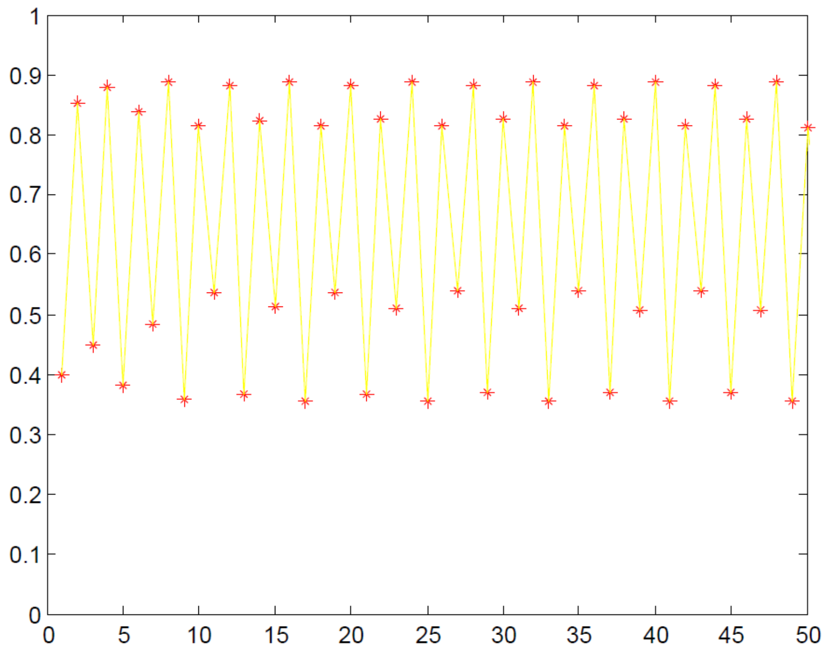


Slika 16. Prikaz vrijednosti sustava za λ = 3.52. Nakon stabilizacije sustav oscilira s periodom 4.

<u>Primjer 6.</u> Za 3.54 < λ < 3.57 sustav oscilira između 8, 16, 32 itd. vrijednosti.



Slika 17. Ponašanje sustava za λ = 3.55. Sustav oscilira između 8 vrijednosti.



Slika 18. Prikaz vrijednosti sustava za λ = 3.55. Vrijednosti osciliraju između 8 vrijednosti.

Daljnjim povećanjem biotičkog potencijala, odnosno parametra λ period titranja se udvostručava, tj. pojavljuju se atraktori perioda 8, 16, 32 itd. Međutim, u jednom trenutku nastaje kaos, tj. nepredvidivo ponašanje sustava koji je detaljnije obrađen u sljedećem poglavlju.

4. KAOTIČAN SUSTAV

Riječ kaos grčkog je podrijetla i označava nered, metež, zbrku, nešto nepredvidivo i posve slučajno. Determinizam označava nešto predvidivo, postojanje nekog odnosa koji je točno određen uzročno-posljedičnim vezama. Teorija kaosa opisuje ponašanje nekog nelinearnog dinamičkog sustava koji pod određenim uvjetima izvodi fenomen poznat kao kaos.[4]

Po definiciji, teorija determinističkog kaosa je kvalitativno proučavanje nestabilnog neperiodnog ponašanja u determinističkim nelinearnim dinamičkim sustavima. Nestabilno ponašanje je ono kod kojeg je za prijelaz između periodnog i neperiodnog, pa čak i između vrsta neperiodnog ponašanja, potrebna vrlo mala promjena u sustavu. To uključuje i vrlo značajnu osjetljivu ovisnost o početnim uvjetima. Neperiodno ponašanje označava da nijedna varijabla sustava ne prolazi kroz periodne promjene svojstvenih vrijednosti, tj. da se niti jedno stanje sustava ne ponavlja u potpunosti. Ovdje je potrebno spomenuti da kaotični sustavi nisu u svim mogućim stanjima kaotični, već da, osim pravilnosti u kaosu, postoje i potpuno pravilna, periodna stanja, u kojima ne vlada kaos. Dakle, definicija ne kaže da teorija kaosa proučava samo kaotična stanja dinamičkih sustava, nego sva stanja sustava koji mogu u određenim uvjetima biti kaotični.[2]

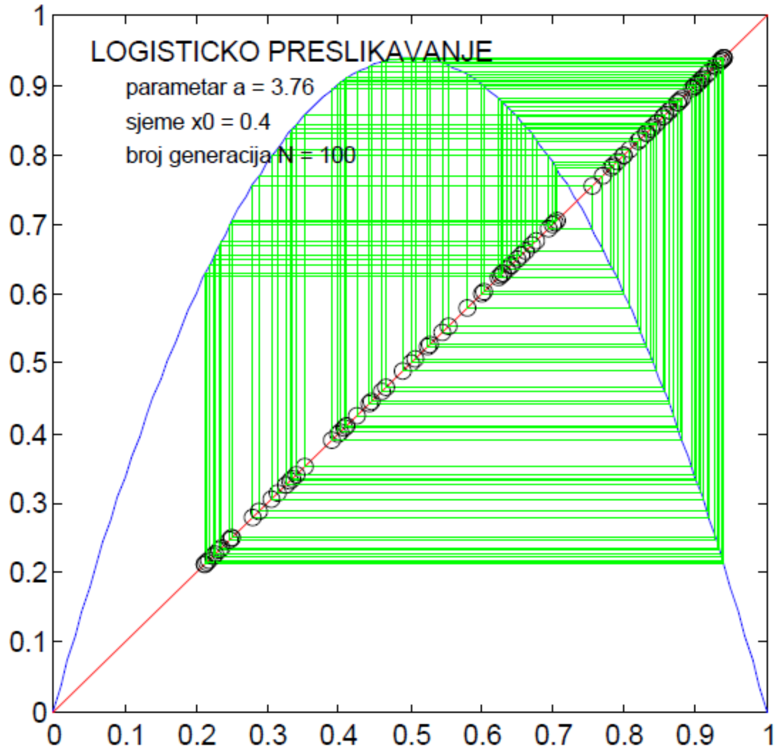
Karakteristike kaotičnog sustava su:

- osjetljivost na početne uvjete, tzv. efekt leptira (*butterfly effect*)
- sustav će s vremenom popuniti sav dostupan prostor (trajektorije sustava iscrtaju sav dostupan prostor i nikad se ne ponavljaju);
- periodne orbite sustava su jako guste (nema prevelikih odstupanja od prethodne putanje).

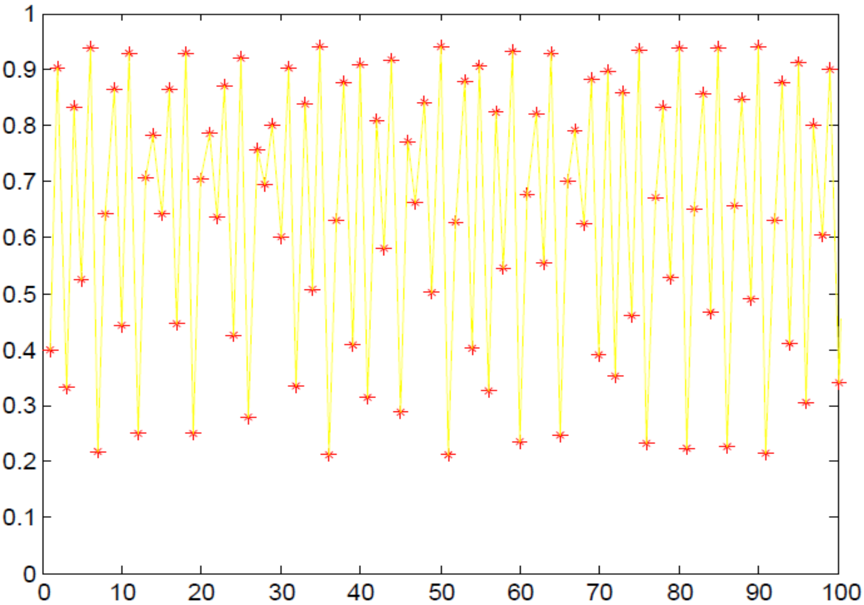
Bitno je da se takvi sustavi uvijek vraćaju, privlače nekim stabilnim vrijednostima. Krenuvši od početnih uvjeta, izračun u kaosu se nastavlja postupkom iteracije. To znači da rezultate koje dobijemo uvrštavanjem početnih vrijednosti u izraz jesu ulazni podaci za novi krug proračuna tog istog izraza (npr. $x_1=f(x_0)$, $x_2=f(x_1)$, $x_3=f(x_2)$ itd.). Kada vrijednosti koje dobivamo računom teže nekoj vrijednosti (broju, točki, krivulji...), kažemo da smo dobili atraktor periode. Atraktor može biti točka, krivulja, ploha... Ponekad te vrijednosti teže prema više različitih vrijednosti pa govorimo o atraktorima viših perioda. Može se dogoditi i to da atraktor nema nikakvu periodnost, da se izračuni ne približavaju nekoj određenoj vrijednosti, već su naizgled nasumice razbacani u prostoru i nemaju definirani jasan oblik. Tada govorimo o kaotičnom ili čudnom atraktoru.[2]

Opažamo da bez obzira na početne uvjete sustav uvijek završi u jednom od dva stabilna stanja: populacija ili preživi ili izumre. Ako dopustimo da biotički potencijal, odnosno parametar λ naraste iznad 3,57 stvari se uvelike mijenjaju jer nastupa kaos.[1]

U λ = 3,57 je početak kaotičnog ponašanja. Za vrlo male promjene početne populacije vremenom dolazi do značajnih promjena. Daljnjim povećanjem parametra λ sustav postaje sve kaotičniji.[8]

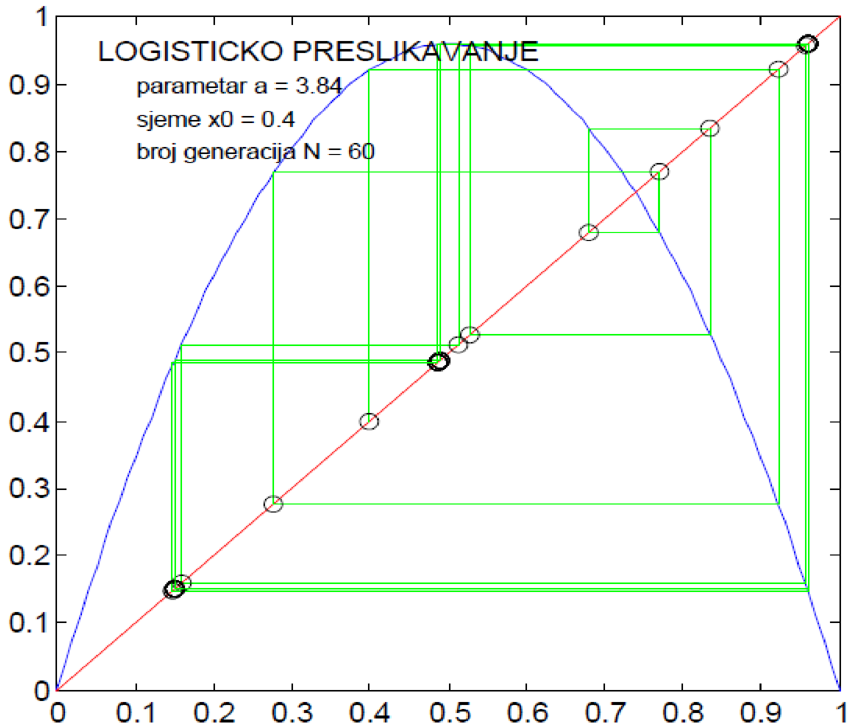


Slika 19. Ponašanje sustava za λ = 3,76 se ne može predvidjeti, sustav se ponaša kaotično.

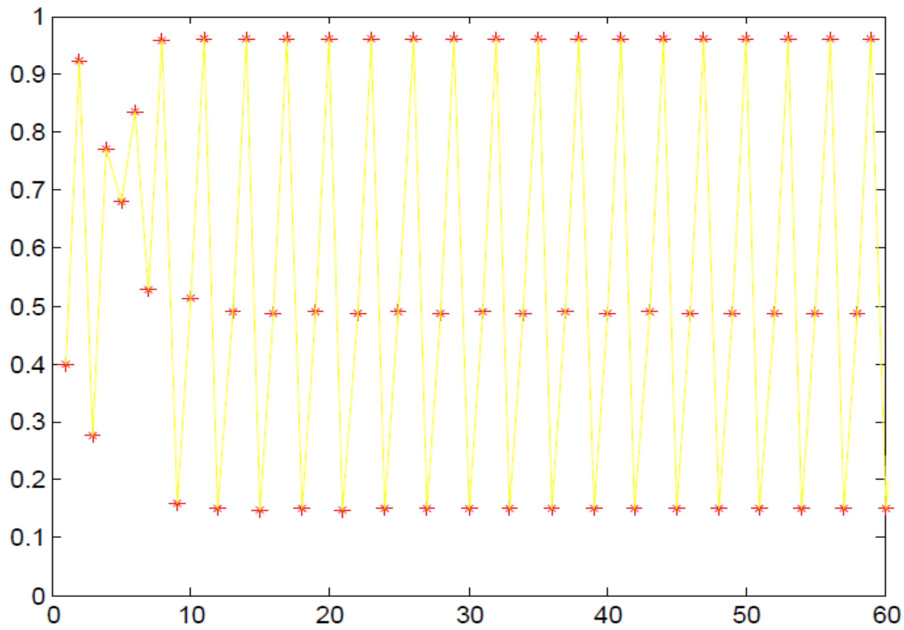


Slika 20. Prikaz vrijednosti veličine populacije za broj generacija za zadani parametar λ = 3,76. Vrijednosti su nasumične i kaotične.

U području λ > 3,57 ponašanje sustava je kaotično, ali postoje neka područja stabilnosti. Jedno takvo područje počinje u $\lambda=1+\sqrt{8}$ (oko 3,84). U tom području funkcija oscilira između 3, 6, 12, itd. vrijednosti.[8]

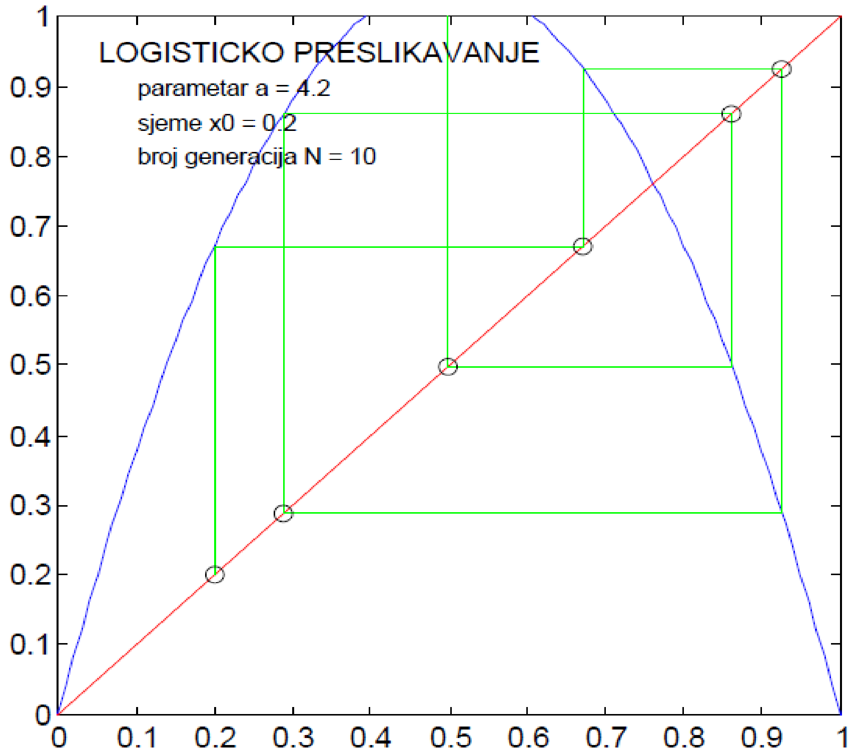


Slika 21. Ponašanje sustava za λ = 3,84. Sustav oscilira između 3 vrijednosti.

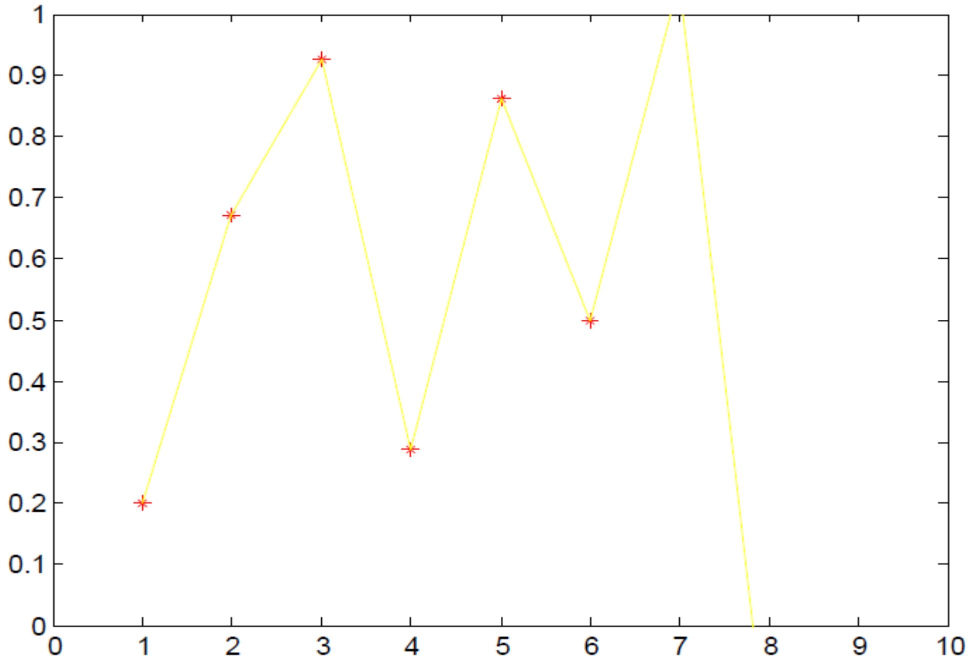


Slika 22. Prikaz vrijednosti sustava za λ = 3,84. Nakon stabilizacije vrijednosti osciliraju u 3 točke.

Za λ > 4 vrijednosti funkcije za sve početne x_0 ne nalaze se u intervalu [0,1].



Slika 23. Ponašanje sustava za λ = 4,2. Vrijednosti funkcije izlaze iz intervala [0,1] te se ne vide na grafu.



Slika 23. Prikaz vrijednosti sustava za λ = 4,2. Vrijednosti nisu u intervalu [0,1] te se ne vide.

Moguće je provjeriti dinamiku sustava za sve vrijednosti λ, uz bilo koju odabranu početnu vrijednost, kao i proizvoljan broj iteracija. Sustav opisan dinamičkim logističkim modelom prolazi kroz sve faze koje dinamički sustav može manifestirati. Počinje sa stabilnim fiksnim točkama, završava u kaosu, kojeg obilježavaju velika osjetljivost na početne uvjete i nemogućnost predviđanja vremenskih nizova.[7]

5. ZAKLJUČAK

Kaos se javlja kada je neki sustav vrlo osjetljiv na početna stanja. Simulirajući obrasce vremenskih prilika, Edward Lorenz (fizičar), uočio je još 1960. godine, da vrlo male, neznatne, promjene početnih uvjeta dovode do potpuno različitih rezultata. Ovaj pojam poznat je pod nazivom 'leptirov učinak'. Matematički model kojim je opisao takvo ponašanje temelj je teorije kaosa. Dakle, tek nezamjetnom promjenom početnih parametara, u nekom vremenu došlo bi do potpuno nepredvidivih promjena ekstremnih razmjera (eksponencijalni rast razlika). Pojam deterministički kaos uveden je, jer je dinamika sustava u budućnosti u potpunosti određena (determinirana) početnim uvjetima, bez ikakvih slučajnih elemenata. No, deterministička priroda ovih sustava im ne omogućava predviđanje njihova ponašanja.[1]

Kaos je ne samo teorija već i metoda, ne samo skup uvjerenja već i način provođenja znanosti. Posebno značenje teorije kaosa je u njezinoj interdisciplinarnosti. Svojom univerzalnošću kaos prožima raznorodne discipline i polja ljudskog djelovanja: od dinamike fluida i prognoze vremena, preko anatomije, proučavanja srčanih aritmija, biljnih i životinjskih populacija, sve do fluktuacija cijena dionica na burzama. Teorija kaosa otvorila je nove filozofske vidike, tjerajući nas na preispitivanje stavova o determinizmu zbivanja, odnosu znanstvenih i religijskih spoznaja, o evoluciji i slobodi volje, društvenim i političkim revolucijama, te ulozi pojedinca u povijesti. Često naoko nevažne činjenice iz jednog područja predstavljaju ključ rješenja u nekom drugom području. Kaos nam daje jedan novi pogled na svijet koji nas okružuje. Međutim iz te iste teorije proizlazi i konačno ograničenje naše spoznaje. Naime, što god učinili i kako god preciznim učinimo naša računala, ona će uvijek biti ograničena određenom memorijom. Na taj način početni uvjeti nikada neće biti apsolutno točno uneseni, a time niti zbivanja biti predvidiva. Uvijek će postojati mjesto za kaos. Iz toga proizlazi da će budućnost zauvijek ostati skrivena i nepredvidiva. Ona će uvijek nepoznata čekati dolazeće generacije da je otkrivaju i svojom težnjom napretku i novim znanstvenim spoznajama učine boljom no što je to ona sada.

6. LITERATURA

1. http://hr.wikipedia.org/wiki/Teorija_kaosa

2. http://www.inet.hr/~ivnakic/kaos/2-1-Uvod_u_kaoticne_sustave.htm

3. M.W.Hirch, S.Smale, R.L.Davaney, Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos, second edition, Elsevier Academic Press 2003.

4. http://www.mathos.unios.hr/modeli/dinamika.pdf

5. http://e.math.hr/old/logisticko/index.html

6. http://www.emc.maricopa.edu/faculty/farabee/biobk/biobookpopecol.html

7. http://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map

8. http://www.fsb.hr/matematika/download/ZS/razno/eksponencijalni_i_logisticki_rast