LEKCIJE IZ MATEMATIKE 1

Ivica Gusić

Lekcija 2

Dvodimenzionalni, trodimenzionalni i n-dimenzionalni realni vektorski prostor

Lekcije iz Matematike 1.

2. Dvodimenzionalni, trodimenzionalni i n-dimenzionalni realni vektorski prostor.

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se obrađuje pojam vektora, operacije s vektorima, duljine (norme) vektora, vektorskog prostora, dimenzije vektorskog prostora i njihova geometrijska i fizikalna interpretacija.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Intuitivno je jasno da je pravac jednodimenzionalan (pa bi se njegove točke trebale opisivati brojevima - jedna točka, jedan broj), ravnina je dvodimenzionalna (pa bi se njene točke trebale opisivati pomoću dvaju brojeva) itd. Taj se problem matematički rješava uvođenjem koordinatnog sustava (na pravac, ravninu, prostor itd.) i uvođenjem pojma uređenog para, uređene trojke itd.
Slično, postoje fizikalne veličine koje se mogu opisati jednim brojem (masa, temperatura itd.), ali postoje i veličine za čije opisivanje u pravilu treba više brojeva. Takva je, na primjer, sila za koju je važno ne samo kojeg je inteziteta već i koji joj je smjer djelovanja (vidjet ćemo da je sila koja djeluje u ravnini određena pomoću dvaju brojeva - točnije pomoću uređenog para brojeva, ako djeluje u prostoru onda je određena pomoću triju brojeva - uređene trojke itd.).
Vrlo često na istom prostoru (odnosno njegovu dijelu) djeluje više sila pa se postavlja problem razmatranja njihova ukupnog djelovanja. To se matematički rješava algebrom vektora (tj. uvođenjem algebarskih operacija na vektore).

III. Potrebno predznanje

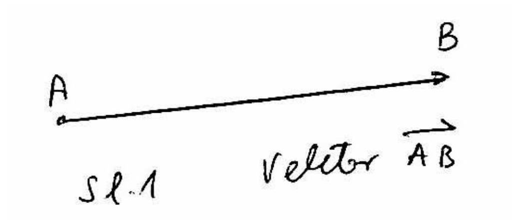
Vektori u ravnini i u prostoru mogu se uvesti čisto geometrijski (pomoću usmjerenih dužina) i analitički (pomoću uređenih parova, odnosno trojki). Geometrijsko uvođenje vektora započelo je u osnovnoj školi i nastavljeno u srednjoj, a analitičko je uvedeno tek djelomice (i to samo za ravninu).

Geometrijsko uvođenje vektora u ravninu odnosno prostor.

Neka su A, B dvije točke ravnine ili prostora. Vektor s početkom A i završetkom B označavamo oznakom

$$\overrightarrow{AB}.$$

Taj pojam možemo zamišljati geometrijski i fizikalno (Slika 1).



Geometrijski: Vektor $\overrightarrow{AB}$ zamišljamo kao pomak (translaciju) kojim smo točku A pomakli u točku B.

Fizikalno: Vektor $\overrightarrow{AB}$ zamišljamo kao silu kojoj je hvatište u točki A, smjer djelovanja je prema točki B, a intezitet joj je predočen udaljenošcu od A do B.

Iz ovih dviju predodžaba prirodno se nameću pojmovi **duljine (modula), smjera i usmjerenja (orijentacije)** vektora.

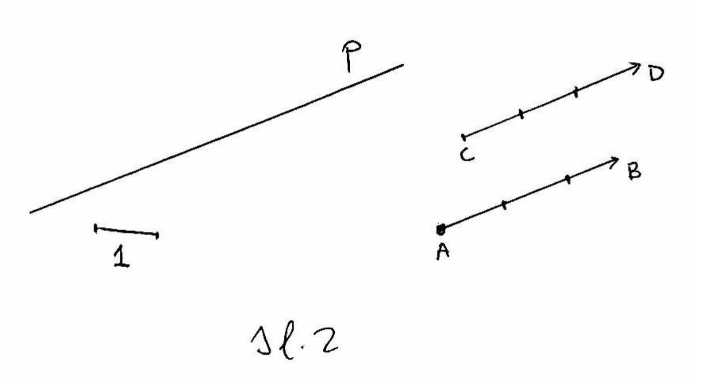
Duljina (modul) vektora $\overrightarrow{AB}$ je udaljenost točaka A, B (tj. duljina dužine $\overline{AB}$). Označava se kao $|\overrightarrow{AB}|$.
Smjer vektora $\overrightarrow{AB}$ je smjer koji određuje pravac na kojima su točke A, B.
Usmjerenje vektora $\overrightarrow{AB}$ je od točke A do točke B.

Iz fizikalne predožbe vektora proizlazi da ne treba razlikovati vektore koji djeluju po usporednim pravcima, a imaju jednake duljine i jednako su orijentirani. Odatle proizlazi definicija jednakosti vektora:

Vektor $\overrightarrow{AB}$ jednak je **vektoru** $\overrightarrow{CD}$ ako točke A, B, D, C (upravo u tom redoslijedu) **čine paralelogram**.

Sad imamo glavnu tvrdnju o jednakosti vektora:
Dva su vektora jednaka ako i samo ako imaju jednake duljine, isti smjer i isto usmjerenje.

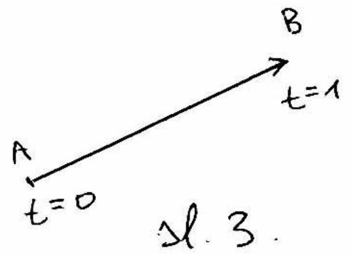
Primjer 1 Neka jedinična duljina odgovara sili od jednog Njutna (1N). Neka su smjer i usmjerenje sile zadani zrakom p na slici i neka sila ima jačinu $3N$. Vektorski je predočeno kako ta sila djeluje u točkama A i C. Pripadni su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ jednaki (Slika 2).



Primjer 2. (interpretacija vektora brzine). Ako je $\overrightarrow{AB}$ vektor brzine možemo ga interpretirati ovako (Slika 3):

1. Početna točka A je položaj u kojemu se čestica koja se giba i vrijeme $t = 0$.
2. Završna točka B je točka u kojoj će se naći ta čestica nakon jedne sekunde, odnosno jedinice vremena (ako se giba po pravcu brzinom $\overrightarrow{AB}$).

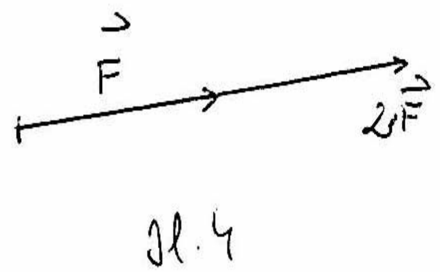
To je zato jer modul vektora brzine $|\overrightarrow{AB}|$ znači duljinu puta što ga čestica prijeđe u jedinici vremena (ako se giba pravcu brzinom $\overrightarrow{AB}$).



Množenje vektora brojem (skalarom)

Neka u prostoru djeluje sila $\overrightarrow{F}$. Intuitivno je jasno da dvostruki učinak od te sile čini sila koja je dva puta veća po intezitetu, a ima isti smjer i orijentaciju kao i $\overrightarrow{F}$. Razumljivo je da ćemo tu novu silu označiti kao $2\overrightarrow{F}$. Kažemo da smo silu $\overrightarrow{F}$ pomnožili s 2 (Slika 4). Slično je pri množenju sile s bilo kojim brojem (s time da se pri množenju s negativnim brojem mijenja orijentacija-usmjerenje, a pri množenju s brojem 0 dobije sila nula). Na osnovi te fizikalne predodžbe uvodimo operaciju množenja vektora i skalara (pri tom množenju obično prije pišemo skalar, potom vektor).

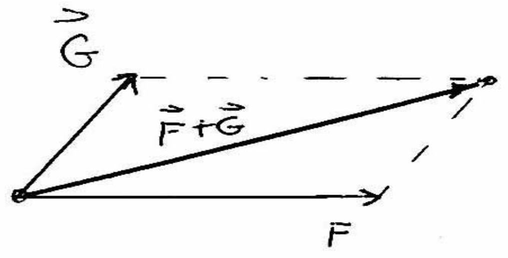
Do iste definicije dolazimo razmatrajući vektore geometrijski, tj. kao translacije.



Zbrajanje vektora.

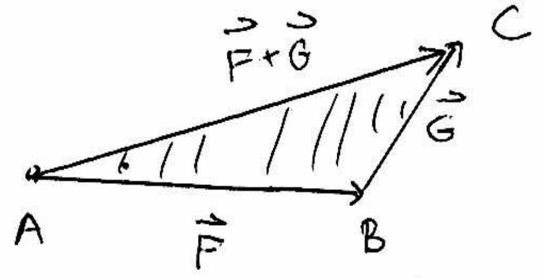
Neka u prostoru djeluju dvije sile $\overrightarrow{F}$ i $\overrightarrow{G}$, svaka sa svojim intezitetom, smjerom i usmjerenjem. Treba odrediti **rezultatntu** njihova djelovanja (u konkretnoj točki A). Ako te dvije sile imaju isti smjer, sve je jasno (bez obzira jesu li

usmjerenja ista). Općenito, **pokus** potvrđuje da je ukupno djelovanje - rezultanta opet sila, koja djeluje duž dijagonale paralelograma što ga te dvije sile razapinju i ima intenzitet jednak duljini te dijagonale (Slika 5).
Odatle potječe **pravilo paralelograma** za zbrajanje vektora.



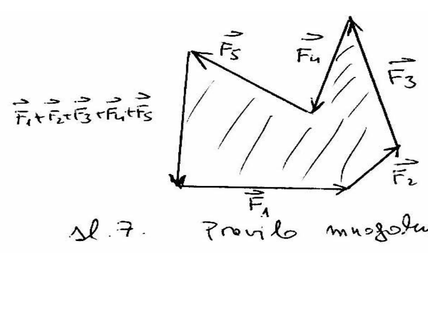
Sl. 5. Pravilo paralelograma

Još jasnije pravilo za zbrajanje vektora dobijemo iz geometrijske interpretacije vektora (kao translacija): točka A translatira se pomoću $\overrightarrow{F}$ u točku B, potom točka B pomoću $\overrightarrow{G}$ u točku D (potpuno isto bi se dobilo da prvo djeluje $\overrightarrow{G}$). Odatle potječe **pravilo trokuta** za zbrajanje vektora (Slika 6).



Sl. 6. Pravilo trokuta

To se pravilo lako poopćuje na pravilo mnogokuta (poligona) za zbrajanje više sila (Slika 7).



Sl. 7. Pravilo mnogokuta

Oduzimanje vektora svodi se na zbrajanje sa **suprotnim vektorom**:

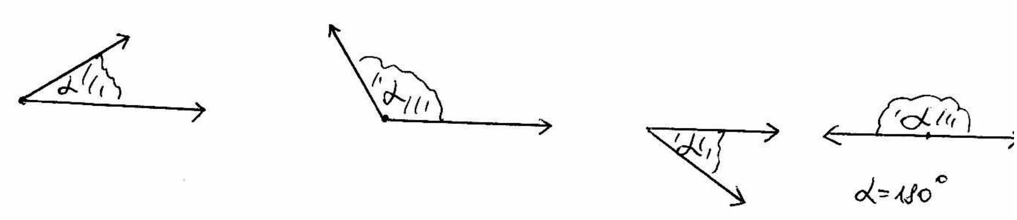
$$\overrightarrow{F} - \overrightarrow{G} := \overrightarrow{F} + (-\overrightarrow{G})$$

Osim sa strjelicama, vektori se često označavaju masnim slovima, primjerice $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, ...$, posebice nul-vektor označava se kao $\mathbf{0}$.

Očita svojstva zbrajanja vektora.

Očita svojstva zbrajanja vektora i množenja vektora sa skalarom.
1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
2. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
3. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
4. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
5. $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$
6. $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$.

Kut među vektorima.
Intuitivno je jasno (a pokusom se lako potvrdi) da rezultanta djelovanja dviju sila (u nekoj točki) ne ovisi samo o njihovim intenzitetima već i o kutu pod kojim te sile djeluju. Od dvaju kutova (vanjskog i nutarnjeg) što ga te dvije sile zatvaraju, važan nam je manji-nutarnji (jer rezultanta djeluje unutar njega). Odatle potječe definicija kuta među dvama ne-nul vektorima: to je manji od kutova što ga ta dva vektora određuju kad ih postavimo da počinju u istoj točki (posebni su slučajevi kad je kut nula-kut ili ispruženi kut), slika 8.



sl. 8

Vidimo da za kut α među vektorima (točnije, za njihovu mjeru) vrijedi

$$0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$$

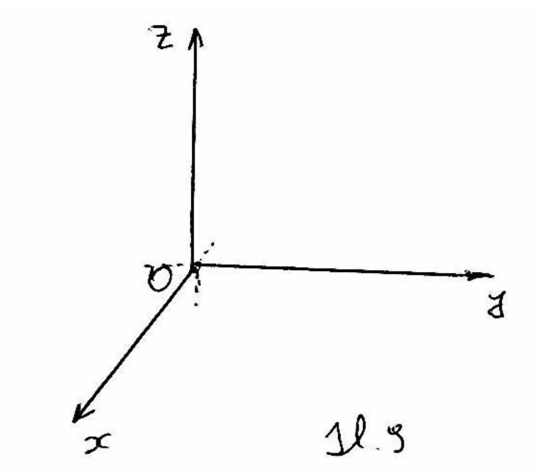
IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Koordinatni sustav u prostoru.

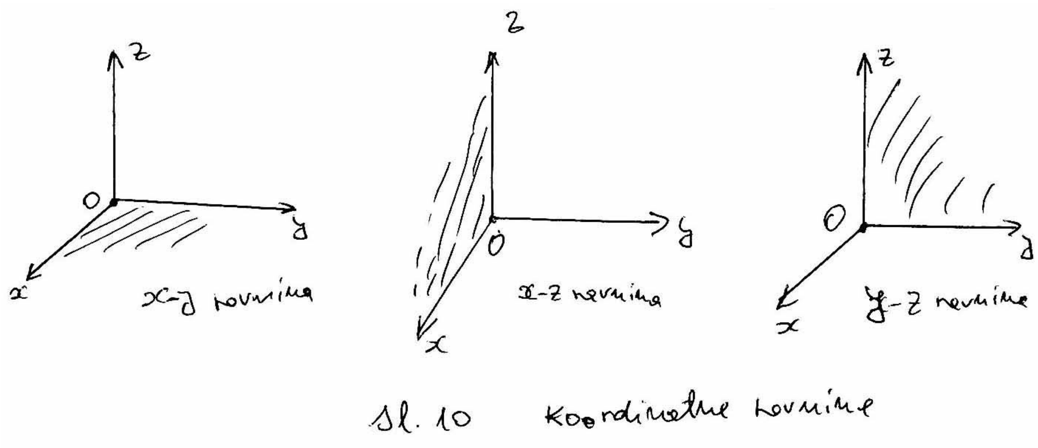
Biranjem dviju točaka na pravcu (jedne za smještanje nule, a drugu za smještanje jedinice) uvodi se koordinatni sustav na pravcu (pravac s uvedenim koordinatnim sustavom zove se **brojevni** ili **koordinatni pravac**). Na brojevnom pravcu, umjesto s točkama, možemo raditi s brojevima - koordinatama točaka.

Biranjem dvaju međusobno okomitih brojevnih pravaca u ravnini (koji se sijeku u ishodištima) uvodi se koordinatni sustav u ravninu (ravnina s uvedenim koordinatnim sustavom zove se **koordinatna ravnina**). U koordinatnoj ravnini, umjesto s točkama, možemo raditi s uređenim parovima brojeva (koordinata točke).

Biranjem triju međusobno okomitih brojevnih pravaca u prostoru (koji se sijeku u ishodištima u jednoj točki) uvodi se koordinatni sustav u prostor. Prostor s uvedenim koordinatnim sustavom zove se **koordinatni prostor** (Slika 9).



Istaknuti dio koordinatnog prostora možemo zamišljati kao ugao prostorije u kojem se sastaju tri brida: vertikalni odgovara pozitivnom dijelu z-osi, lijevi pozitivnom dijelu x-osi, a desni pozitivnom dijelu y-osi.
Vidimo da x i y osi određuju **koordinatnu ravninu** (pod prostorije), da x i z-osi također određuju koordinatnu ravninu (lijevi zid), a y i z-osi desni zid (Slika 10).

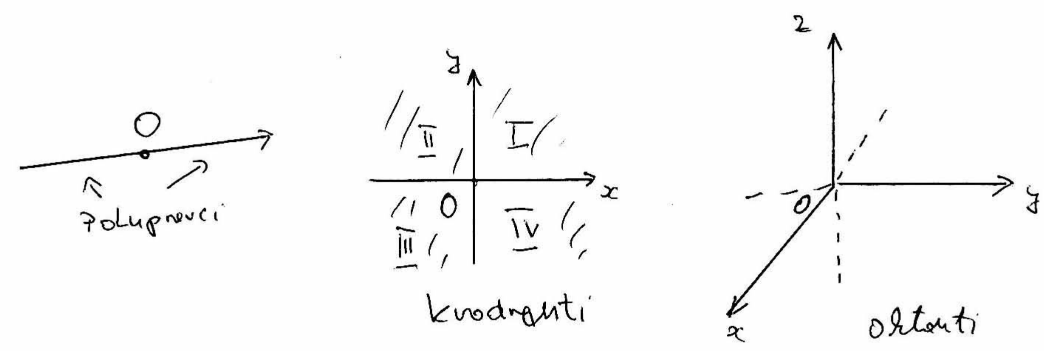


Uočimo sljedeću analogiju (Slika 11):

Jedna točka (ishodište) dijeli koordinatni pravac na dva **polupravca**.

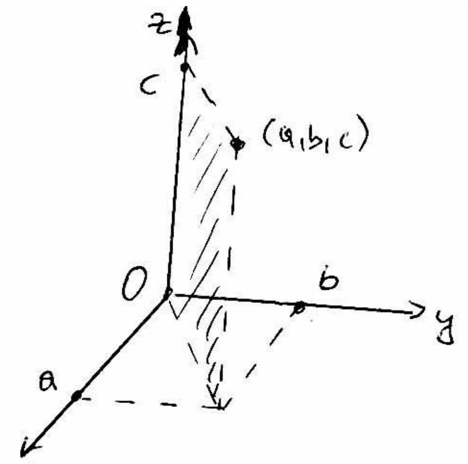
Dva pravca (koordinatne osi) dijele koordinatnu ravninu na četiri **kvadranta**.

Tri koordinatne ravnine dijele koordinatni prostor na osam **oktanata**.



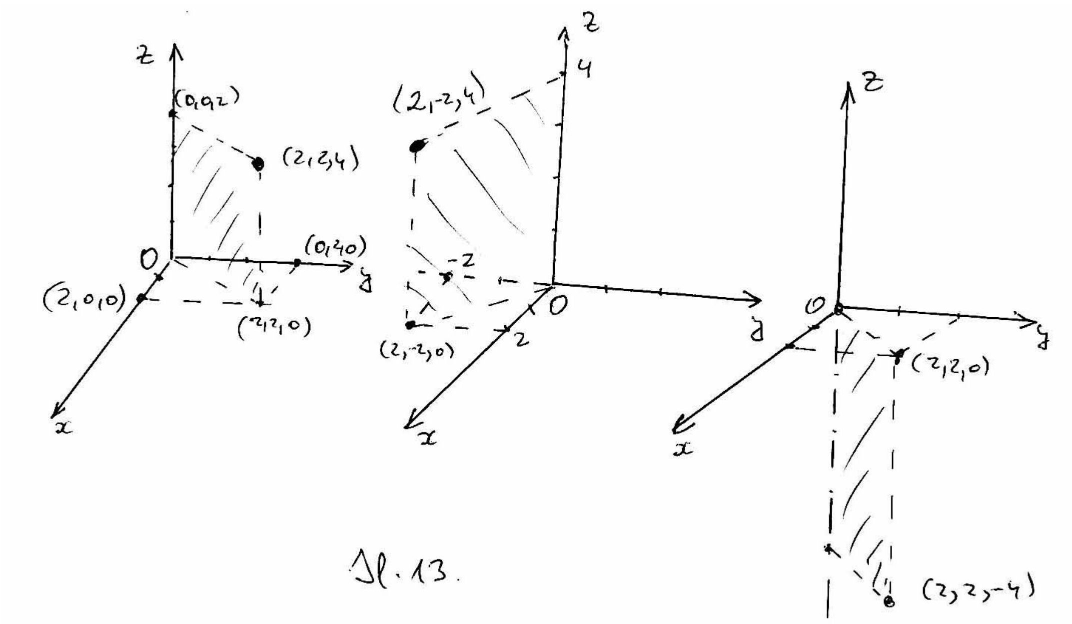
Sl. 11

U koordinatnom prostoru svaka je točka jednoznačno određena uređenom trojkom brojeva (x, y i z koordinatama točke), slika 12.



Sl. 12

Primjer 3.
Predočimo sljedeće točke u koordinatnom prostoru (Slika 13):
a) $A(2,2,4)$,
b) $B(2,-2,4)$,
c) $C(2,2,-4)$.



Sl. 13.

n-dimenzionalni prostor - koordinatni sustav

Vidimo da se
1. koordinatni pravac može poistovjetiti sa skupom realnih brojeva $\mathbf{R}$; to je jednodimenzionalni koordinatni prostor
2. koordinatna ravnina može poistovjetiti sa skupom svih uredjenih parova realnih brojeva (oznaka $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ ili $\mathbf{R}^2$; to je dvodimenzionalni koordinatni prostor
3. koordinatni prostor može poistovjetiti sa skupom svih uredjenih trojka realnih brojeva (oznaka $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ ili $\mathbf{R}^2$; to je trodimenzionalni koordinatni prostor

Analogno se definira n-dimenzionalni koordinatni prostor - koordinatni sustav (za bilo koji prirodni broj n);
to je skup svih uredjenih n-torka realnih brojeva

$$(x_1, x_2, ..., x_n);\ x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbf{N}$$

(oznaka $\mathbf{R}^n$).

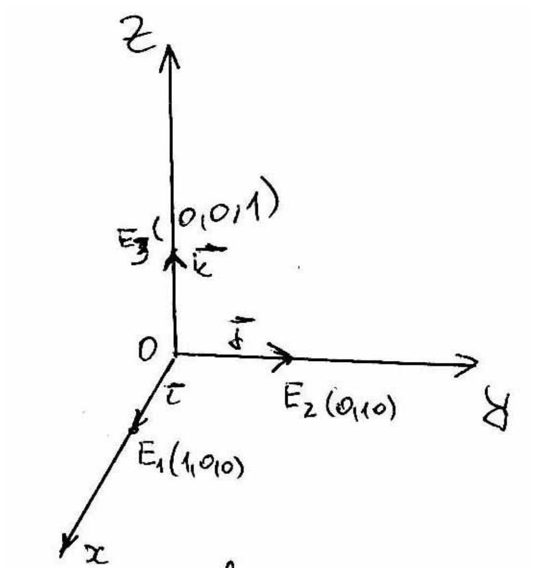
Jedinični vektori

Uočimo u koordinatnom prostoru tri točke (redom na pozitivnim dijelovima x, y odnosno z osi, na jediničnoj udaljenosti od ishodišta):

$$E_1 := (1,0,0),\ E_2 := (0,1,0),\ E_3 := (0,0,1)$$

Te točke određuju tri jedinična vektora (Slika 14):

$$\overrightarrow{i} := \overrightarrow{OE_1};\ \overrightarrow{j} := \overrightarrow{OE_2};\ \overrightarrow{k} := \overrightarrow{OE_3}.$$



Sl. 14.

Jedinični vektori zapisuju se i pomoću jednostupčanih **matrica**.

$$\overrightarrow{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \ \overrightarrow{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \ \overrightarrow{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Uočite da je to samo drukčiji zapis koordinata završnih točaka tih vektora.

Jedinični vektori u n-dimenzionalnom prostoru

Analogno jediničnim vektorima u ravnini i prostru, definiraju se jedinični vektori u n-dimenzionalnom prostoru: to je n vektora:

$$\mathbf{e_1}, \ \mathbf{e_2}, ..., \mathbf{e_n}$$

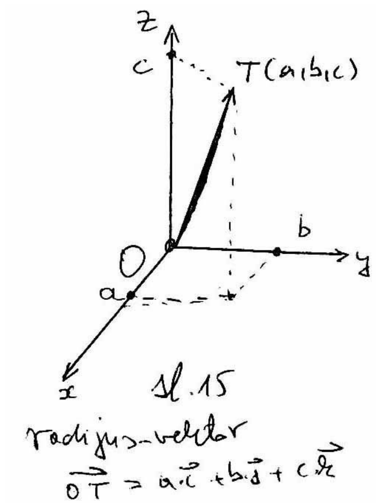
$$\mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \\ 0 \end{bmatrix}, ..., \mathbf{e_n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

(kod $\mathbf{e_i}$ na i-tom je mjestu 1, a na ostalima je 0.

Radijus vektori - analitički prikaz vektora u koordinatnom prostoru

Točka $T(a, b, c)$ koordinatnog prostora prostora određuje jedinstven vektor $\overrightarrow{OT}$ s početkom u ishodištu i završetkom u T (**radijus vektor**), slika 15. Vidimo da svaki vektor prostora možemo shvatiti kao radijus vektor. Vidimo, također, da vrijedi:

$$\overrightarrow{OT} = a \cdot \overrightarrow{i} + b \cdot \overrightarrow{j} + c \cdot \overrightarrow{k}$$



Kažemo da smo vektor $\overrightarrow{OT}$ zapisali kao **linearnu kombinaciju** vektora $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Tu linearnu kombinaciju zapisujemo i kao:

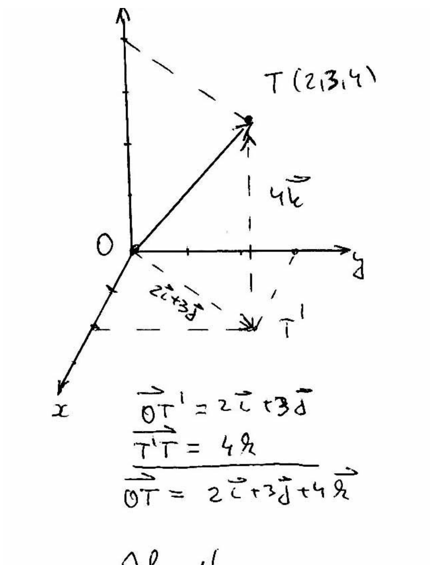
$$\overrightarrow{OT} = \begin{bmatrix} \text{a} \\ \text{b} \\ \text{c} \end{bmatrix}$$

(to je samo drukčiji zapis koordinata točke T). Na primjer, za $T(2,3,4)$ izravno iz slike 16 vidi se da je

$$\overrightarrow{OT} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

odnosno da je

$$\overrightarrow{OT} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$



Sl. 16.

Uočite:
Vektori u prostoru mogu se poistovjetiti s točkama u prostoru (tako da ta točka bude završetak, a ishodište početak), a točke u prostoru s jednostupčanim matricama sastavljenim od koordinata tih točaka, dakle:

$$\text{Skup vektora prostora} = \text{Skup matrica oblika} \begin{bmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \\ \mathrm{c} \end{bmatrix}$$

gdje su a, b, c realni brojevi .
Kad vektor predočimo ovako ili kao linearnu kombinaciju jediničnih vektora $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$, kažemo da smo ga predočili **analitički**.

U n-dimenzionalnom prostoru $\mathbf{R^n}$ za radijus vektor $\mathbf{v} = \overrightarrow{OT}$ gdje je $T(a_1, ..., a_n)$, vrijedi

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{e_1} + ... + \mathbf{a_n e_n}.$$

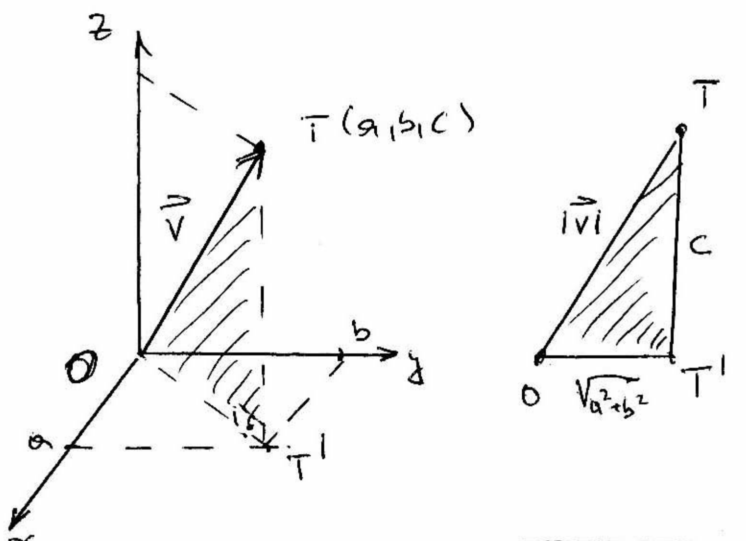
Formula za duljinu vektora $a \cdot \overrightarrow{i} + b \cdot \overrightarrow{j} + c \cdot \overrightarrow{k}$

Izravno iz slike 17 vidimo da je

$$|a \cdot \overrightarrow{i} + b \cdot \overrightarrow{j} + c \cdot \overrightarrow{k}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

tj. ako je $\overrightarrow{v} = a \cdot \overrightarrow{i} + b \cdot \overrightarrow{j} + c \cdot \overrightarrow{k}$, onda je

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



Sl. 17.

$$|\vec{v}| = \sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 + c^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Primjer 4. Odredimo duljinu vektora $\overrightarrow{v} = 4 \cdot \overrightarrow{i} + 7 \cdot \overrightarrow{j} - 4 \cdot \overrightarrow{k}$
Koristeći se formulom za duljinu vektora u koordinatnom sustavu, dobijemo:

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{4^2 + 7^2 + (-4)^2} = 9$$

U n dimenzionalnom prostoru općenito vrijedi

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}$$

gdje je $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + ... + a_n\mathbf{v_n}$.

Algebarske operacije s vektorima u koordinatnom sustavu.

Vektore s analitičkim prikazom zbrajamo i množimo sa skalarom kao u primjeru.

Primjer 5. Odredimo $2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v}$ ako je
$\overrightarrow{u} = 4\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{k}$

$2\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v} = 2(4\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) + 3(3\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{k}) =$
$(8\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}) + (9\overrightarrow{i} - 15\overrightarrow{k}) = 17\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} - 13\overrightarrow{k}$

Ako bismo se koristili zapisom pomoću jednostupčanih matrica (i ako bismo vektore zapisali masnim slovima, umjesto strjelicama), imali bismo:

$$2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = 2\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -4 \\ -13 \end{bmatrix}$$

Slično je s operacijama na vektorima u n-dimenzionalnom prostoru.

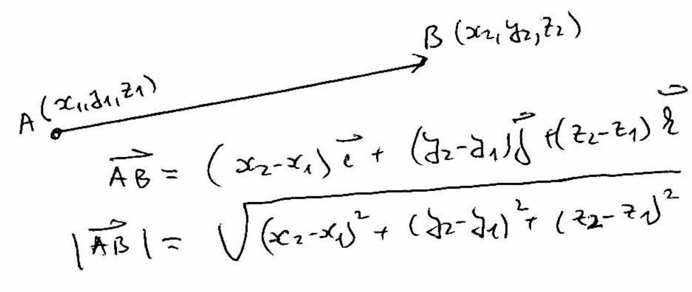
Analitički prikaz i duljina vektora $\overrightarrow{AB}$

Ako je $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ onda je (Slika 18)

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\overrightarrow{i} + (y_2 - y_1)\overrightarrow{j} + (z_2 - z_1)\overrightarrow{k}$$

i

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



Sl. 18

Primjer 6. Odredimo analitički zapis i duljinu vektora $\overrightarrow{AB}$ ako je $A(2,1,3),\ B(1,-2,5)$.

$$\overrightarrow{AB} = (1-2)\overrightarrow{i} + (-2-1)\overrightarrow{j} + (5-3)\overrightarrow{k} = -\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{15}$$

U n dimenzionalnom prostoru vrijede analogne formule:
Ako je $A(a_1, ..., a_n),\ B(b_1, ..., b_n$ onda je:

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1)\mathbf{e_1} + ... + (b_n - a_n)\mathbf{e_n}$$

i

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - x_1)^2 + ... + (b_n - a_n)^2}$$

Kriterij kolinearnosti vektora.

Vektori $\overrightarrow{v_1} = a_1 \cdot \overrightarrow{i} + b_1 \cdot \overrightarrow{j} + c_1 \cdot \overrightarrow{k}$ i $\overrightarrow{v_2} = a_2 \cdot \overrightarrow{i} + b_2 \cdot \overrightarrow{j} + c_2 \cdot \overrightarrow{k}$ su kolinearni (proporcionalni) ako su im odgovarajuće komponente proporcionalne, tj. ako je

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \lambda$$

Pritom, ako je $\lambda > 0$ vektori su jednako usmjereni, a ako je $\lambda < 0$ oni su suprotno usmjereni.

Primjer 7. Provjerimo kolinearnost vektora $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ako je:

(i) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

(ii) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$

(iii) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

(i) Tu je

$$\frac{8}{4} = \frac{-4}{-2} \neq \frac{1}{1}$$

pa vektori nisu kolinearni.
(ii) Tu je

$$\frac{8}{4} = \frac{-4}{-2} = \frac{2}{1} = 2$$

pa su vektori kolinearni, a jer je omjer koeficijenata pozitivan, oni su i isto usmjereni (orijentirani).
(iii) Tu je

$$\frac{-8}{4} = \frac{4}{-2} = \frac{-2}{1} = -2$$

pa su vektori kolinearni, a jer je omjer koeficijenata negativan, oni su suprotno usmjereni.

Analogan kriterij vrijedi za kolinearnost vektora u n-dimenzionalnom prostoru.