

VJEŽBE IZ MATEMATIKE 1

Ivana Baranović
Miroslav Jerković

Lekcija 13

Linearna aproksimacija
funkcije, kvadratna aproksimacija.
Taylorov red.

Vježbe iz Matematike 1.

13. Linearna aproksimacija funkcije, kvadratna aproksimacija. Taylorov red.

Zadatak 1 Koristeći linearnu aproksimaciju izračunajte približno:

- 1) $\sqrt{3.99}$
- 2) $\sqrt[3]{8.02}$
- 3) $\sqrt{64.03} + \sqrt[3]{64.03}$
- 4) $\log_4 16.02$.

Rješenje: U rješenju koristimo formulu

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + \Delta x \cdot f'(x_0).$$

- 1) Ovdje je $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$, $\Delta x = -0.01$. Stoga je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, pa je $f(x_0) = \sqrt{4} = 2$, $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$, pa imamo

$$\sqrt{3.99} \approx 2 - 0.01 \cdot \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{400}.$$

- 2) Analogno kao u prethodnom zadatku, uz $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$, $\Delta x = 0.02$.
- 3) Definiramo $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$. Računamo $f(64.03)$. Premo gornjoj formuli je

$$f(64.03) \approx f(64) + 0.03 \cdot f'(64.03).$$

Očito je $f(64) = \sqrt{64} + \sqrt[3]{64} = 8 + 4 = 12$. Dalje,

$$f'(x) = (x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

pa je

$$f'(64) = \frac{1}{2 \cdot 8} + \frac{1}{3 \cdot 16} = \frac{1}{16} + \frac{1}{48} = \frac{1}{12}.$$

Konačno imamo

$$f(64.03) \approx 12 + 0.03 \cdot \frac{1}{12} = 12 + \frac{3}{100} \cdot \frac{1}{12} = 12 + \frac{1}{400}.$$

- 4) Ovdje je $f(x) = \log_4 x$, $x_0 = 16$, $\Delta x = 0.02$, pa je $f'(x) = \frac{1}{\ln 4} \cdot \log_4 x$ te konačno

$$\log_4 16.02 \approx \log_4 16 + 0.02 \cdot \frac{1}{\ln 4} \cdot \log_4 16 = 2 + \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{\ln 4} \cdot 2 = 2 + \frac{1}{25 \ln 4}.$$

Zadatak 2 Napišite jednadžbu tangente na graf funkcije f u zadanoj točki $(x_0, f(x_0))$, ako je:

- 1) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$
- 2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$
- 3) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 64$
- 4) $f(x) = \log_4 x$, $x = 16$.

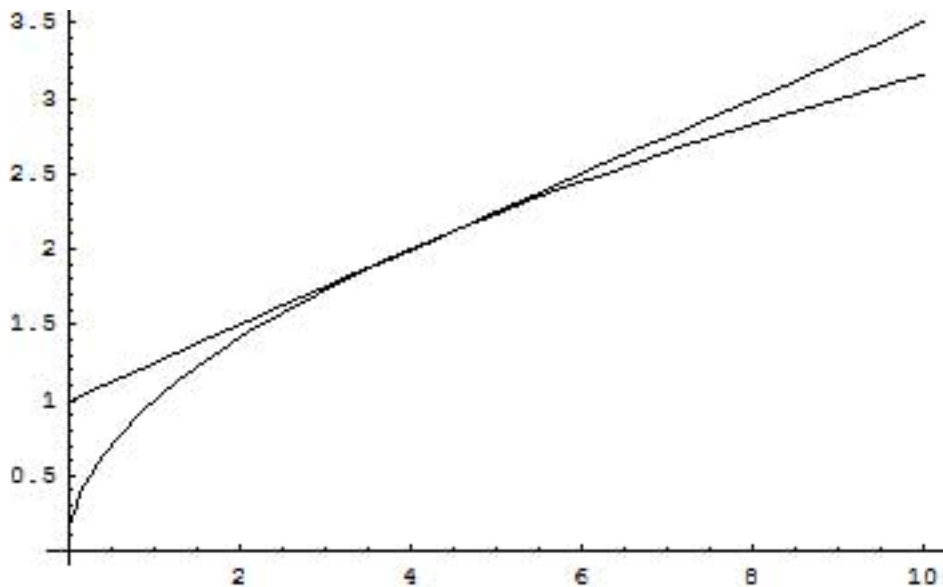
Skicirajte u istom koordinatnom sustavu graf funkcije i graf tangente za 1).

Rješenje: Formula za tangentu na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$ glasi

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

S obzirom da za zadanu točku x_0 treba još samo izračunati $f(x_0)$ i $f'(x_0)$, a te smo račune obavili već u prethodnom zadatku, pa rješavanje ide lako:

$$1) y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + 1$$



$$2) y - 2 = \frac{1}{12}(x - 8) \Rightarrow y = \frac{1}{12}x + \frac{4}{3}$$

$$3) y - 12 = \frac{1}{12}(x - 64) \Rightarrow y = \frac{1}{12}x + \frac{20}{3}$$

$$4) y - 2 = \frac{2}{\ln 4}(x - 16) \Rightarrow y = \frac{2}{\ln 4}x + 2 - \frac{32}{\ln 4}$$

Zadatak 3 Interpretirajte rješenja zadatka 1 u terminima jednadžbi za tangente dobivenima u zadatku 2!

Rješenje: Vrijednosti dobivene za linearnu aproksimaciju u zadanim točkama točno su jednake vrijednostima na tangenti koje odgovaraju tim točkama. Na primjer, u prvom zadatku, podzatak 1), tražili smo približnu vrijednost broja $\sqrt{3.99}$, dobivena vrijednost bila je $4 - \frac{1}{400}$. No, ako u jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ u točki $x_0 = 4$ uvrstimo $x = 3.99$, dobivamo

$$y = \frac{1}{4} \cdot 3.99 + 1 = \frac{1}{4}(4 - 0.01) + 1 = 2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{100} = 2 - \frac{1}{400},$$

i to je upravo vrijednost dobivena u prvom zadatku.

Zaključujemo da približnu vrijednost funkcije u nekoj točki koja je "blizu" točke u kojoj znamo tangentu na graf funkcije možemo dobiti kao y -vrijednost tangente u toj točki.

Provjerite za ostale podzadatke prvog zadatka da dobivate na ovaj način iste vrijednosti koje ste dobili i tamo!

Formulu za linearnu aproksimaciju stoga možemo shvatiti kao formulu

$$f(x) \approx g_1(x),$$

gdje je

$$g_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Ovdje formulom izričemo istu onu tvrdnju koju smo riječima iskazali na kraju prethodnog zadatka; pritom g_1 označava funkciju čiji je graf točno tangenta na graf funkcije f u točki x_0 . Naravno, shvaćamo da gornja približna jednakost vrijedi za točke x koje se nalaze "dovoljno blizu" točki x_0 u kojoj smo računali tangentu na graf funkcije f .

Nije teško vidjeti da će kvadratna aproksimacija vrijednosti funkcije f u točki x blizu točke x_0 biti dana sljedećom formulom:

$$f(x) \approx g_2(x_0),$$

gdje je

$$g_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Može se pokazati da "dovoljno dobre" funkcije u nekoj okolini točke x_0 možemo aproksimirati polinomom proizvoljnog stupnja n (dakle, da ćemo moći izračunati približnu vrijednost funkcije f u svakoj točki x koja je u nekoj okolini točke x_0):

$$f(x) \approx g_n(x),$$

$$\begin{aligned} g_n(x) = & f(x_0) + \\ & f'(x_0)(x - x_0) + \\ & \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \\ & \frac{1}{6}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \\ & \dots + \\ & \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Pritom smo definirali da je

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n.$$

Sada vidimo da, ako definiramo da je $0! = 1$ i $f^{(0)} = f$, imamo da je

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Zadatak 4 Korištenjem kvadratne aproksimacije riješite 1) i 2) u prvom zadatku. Usporedite dobivena rješenja s onima iz prvog zadatka i nacrtajte u istom koordinatnom sustavu funkciju, tangentu i kvadratnu aproksimaciju za prvi podzadatak.

Rješenje:

Koristimo formulu $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$. Pritom smo za konkretne zadatke već izračunali $f(x_0)$ i $f'(x_0)$, pa preostaje još samo izračunati $f''(x_0)$.

1) Imamo da je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, pa je

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}.$$

Stoga je

$$f''(4) = -\frac{1}{4 \cdot \sqrt{64}} = -\frac{1}{32}$$

i imamo

$$\sqrt{3.99} \approx 2 - \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{100}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{32}\right) = 2 - \frac{1}{400} - \frac{1}{640000}.$$

Vidimo da je ovaj rezultat zapravo sličan rezultatu u prvom zadatku. To je posljedica činjenice da g_2 ima isti "početak" kao i g_1 (provjerite!), pa će i rezultat kvadratne aproksimacije u nekoj točki izgledati kao rezultat linearne aproksimacije u toj točki, uz dodatak vrijednosti kvadratnog člana $\frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$. Kako je $x - x_0$ jako mala vrijednost (u pravilu po apsolutnoj vrijednosti manja od 1, ovdje -0.01), to će njen kvadrat biti još manji od nje same, što direktno povlači da će doprinos kvadratnog člana biti još manji nego onaj linearnog. Možemo to shvatiti kao činjenicu da kvadratna aproksimacija još "malo popravlja" linearnu aproksimaciju, ovdje za $-\frac{1}{640000} = -0.0000015625$.

Kako glasi funkcija kvadratne aproksimacije? Imamo

$$g_2(x) = 2 + \frac{1}{4}(x - 4) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{32}\right)(x - 4)^2 = \dots = -\frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

2) Znamo da je $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ ($\Rightarrow f''(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{12}$), pa je

$$f''(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

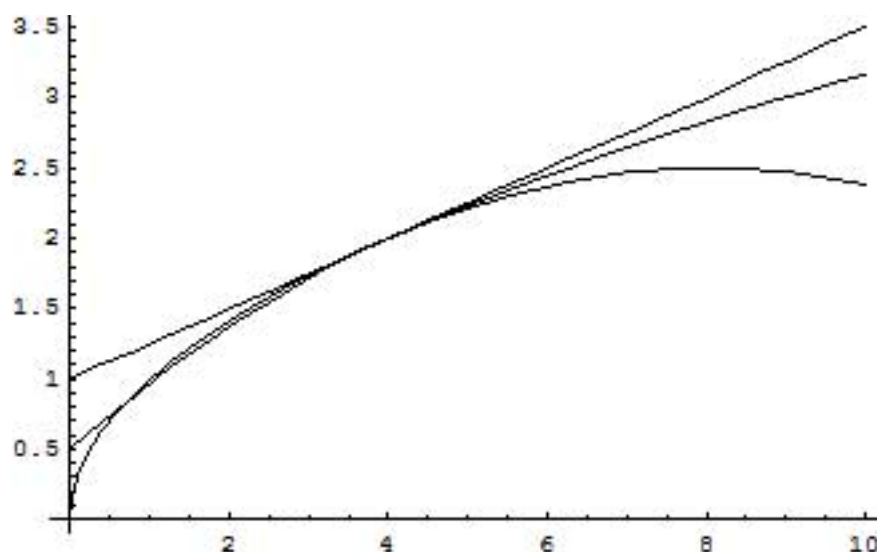
i stoga je

$$f''(8) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{8^5}} = -\frac{2}{9 \cdot 32} = -\frac{1}{144}.$$

Sada imamo

$$\sqrt[3]{8.02} \approx 2 + 0.02 \cdot \frac{1}{12} - 0.02^2 \cdot \frac{1}{144} = \dots = 2 + \frac{1}{600} - \frac{1}{360000}.$$

Za kraj evo sliku koja za prvi podzatak u istom koordinatnom sustavu prikazuje funkciju $f(x) = \sqrt{x}$, te linearnu i kvadratnu aproksimaciju:



Ako sada "dozvolimo" da $g_n(x)$ ima beskonačno mnogo članova, dolazimo do $g_\infty(x)$, kojeg obično označavamo s $T(x)$ i zovemo Taylorov red funkcije f u točki x_0 :

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Pritom vrijedi

$$f(x) = T(x),$$

tj. vrijednost funkcije i vrijednost Taylorovog reda se podudaraju za sve x iz neke okoline (tzv. područja konvergencije reda) točke x_0 . To je i logično, jer aproksimacijama polinomima sve većeg i većeg stupnja dobivamo vrijednost sve bližu i bližu stvarnoj vrijednosti funkcije f , pa u limesu, tj. beskonačnosti i postizemo tu stvarnu vrijednost.

Sada ćemo računati Taylorov red za neke elementarne funkcije u zadanoj točki - kažemo da smo zadanu funkciju f "razvili" u Taylorov red u toj točki. Najčešće se funkcija razvija u Taylorov red u okolini nule (kada je to moguće).

Zadatak 5 Izračunajte Taylorov red sljedećih funkcija u zadanoj točki:

1) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

- 2) $f(x) = a^x, x_0 = 0$
- 3) $f(x) = \ln x, x_0 = 1$ (zašto f ne razvijamo u Taylorov red u okolini nule?)
- 4) $f(x) = \log_a x, x_0 = 1$
- 5) $f(x) = \sin x, x_0 = 0$
- 6) $f(x) = \cos x, x_0 = 0$
- 7) $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 1$
- 8) $f(x) = \frac{1}{1-x}, x_0 = 0$
- 9) $f(x) = \frac{1}{1+x}, x_0 = 0$
- 10) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}, x_0 = 0$
- 11) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x_0 = 0$
- 12) $f(x) = 2 \cos^2 x, x_0 = 0$.

Rješenje:

Ako je $x_0 = 0$, onda formula za $T(x)$ poprima nešto jednostavniji izgled:

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Vidimo da jedini član kojeg treba računati jest izraz za opću (k-tu) derivaciju funkcije f , a potom je evaluirati u zadanoj točki x_0 .

- 1) Znamo da je prva derivacija funkcije $f(x) = e^x$ opet ona sama, pa je takva i druga, treća i sve ostale derivacije. Stoga je općenito $f^{(k)}(x) = e^x$, pa je $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$, pa je

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{1}{k!}x^k + \dots$$

- 2) Računamo prvih nekoliko derivacija funkcije $f(x) = a^x$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln a \cdot a^x \\ f''(x) &= \ln a \cdot \ln a \cdot a^x = \ln^2 a \cdot a^x \\ f'''(x) &= \ln^3 a \cdot a^x, \end{aligned}$$

pa zaključujemo da je

$$f^{(k)}(x) = \ln^k a \cdot a^x.$$

Stoga je

$$f^{(k)}(0) = \ln^k a \cdot a^0 = \ln^k a,$$

što uvrštavanjem u izraz za Taylorov red funkcije u nuli daje

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln^k a}{k!} x^k = 1 + \ln a \cdot x + \frac{\ln^2 a}{2} x^2 + \dots + \frac{\ln^k a}{k!} x^k + \dots$$

Vidimo da je Taylorov red za funkciju $f(x) = e^x$ poseban slučaj Taylorovog reda za funkciju $f(x) = a^x$ koji se dobiva uvrštavanjem $a = e$.

- 3) Najprije odgovorimo na pitanje zašto ne razvijamo $f(x) = \ln x$ u nuli - razlog je taj što logaritamska funkcija u nuli nije niti definirana, pa nema smisla raditi razvoj te funkcije u red u toj točki.

Sada računamo, kao i gore, nekoliko prvih derivacija zadane funkcije:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} \\ f''(x) &= -1 \cdot x^{-2} \\ f'''(x) &= (-1) \cdot (-2) \cdot x^{-3}, \end{aligned}$$

pa je općenito

$$f^{(k)}(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot \dots \cdot (-(k-1)) \cdot x^{-k},$$

gdje produkt $(-1) \cdot (-2) \cdot \dots \cdot (-(k-1))$ možemo shvatiti kao produkt $k-1$ puta -1 s $(k-1)!$. Stoga je

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot x^{-k},$$

pa je

$$f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot 1^k = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!$$

Primijetimo da ova formula vrijedi za sve k veće od nule, dok za $k=0$ imamo $f^{(0)}(x) = f(x) = \ln x$, što daje $f(1) = \ln 1 = 0$. No, to znači da prvi član Taylorovog reda iščezava. Stoga ćemo red pisati kao sumu kod koje indeks sumacije počinje s 1, a ne s 0, kao što je uobičajeno. Uvrštavanjem u izraz za Taylorov red funkcije f u $x_0 = 1$ izraz za opću derivaciju zadane funkcije u točki $x_0 = 1$ imamo

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{k!} (x-1)^k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{(k-1)! \cdot k} (x-1)^k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k = \\ &= x-1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{k!} (x-1)^k + \dots \end{aligned}$$

- 4) Dobije se sličan red kao pod 3), samo uz dodatni faktor - slično kao što se 2) odnosi prema 1)
- 5) Računamo prvih nekoliko derivacija:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\sin x \\ f'''(x) &= -\cos x \\ f^4(x) &= \sin x = f(x) \end{aligned}$$

Vidimo dakle da je četvrta derivacija jednaka početnoj funkciji, peta derivacija je jednaka prvoj derivaciji, šesta drugoj, sedma trećoj itd. Općenito, možemo dati ovakvo pravilo:

$$\begin{aligned} f^{(4k)}(x) &= \sin x \\ f^{(4k+1)}(x) &= \cos x \\ f^{(4k+2)}(x) &= -\sin x \\ f^{(4k+3)}(x) &= -\cos x, \end{aligned}$$

gdje je $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zato je

$$\begin{aligned} f^{(4k)}(0) &= \sin 0 = 0 \\ f^{(4k+1)}(0) &= \cos 0 = 1 \\ f^{(4k+2)}(0) &= -\sin 0 = 0 \\ f^{(4k+3)}(0) &= -\cos 0 = -1, \end{aligned}$$

pa vidimo da je za sve parne derivacije vrijednost u nuli jednaka nula, dok za neparne derivacije vrijednost u nuli alterira između 1 i -1 . Nije odmah jasno kako treba izgledati Taylorov red, pa ćemo napisati samo prvih nekoliko članova tog reda:

$$T(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

To znači da se u redu pojavljuju samo neparne potencije od x . Kako sumaciju radimo obično po svim potencijama od x , a ne samo neparanima, uvest ćemo takvu ovisnost potencije od x o indeksu sumacije koja će generirati samo neparne potencije. Očito možemo pisati

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

jer ovaj red generira točno onaj kojeg smo prvih nekoliko članova ispisali (provjerite sami!). Stoga je ovaj red traženi Taylorov red funkcije $f(x) = \sin x$ u nuli.

- 6) Zadatak se rješava analogno 5), s tim da se sada u Taylorovom redu pojavljuju samo parne potencije od x (provjerite!).
- 7) Zadatak je sličan zadatku 3), jer je $\frac{1}{x} = (\ln x)'$, pa će općenito k -ta derivacija funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ biti jednaka $(k+1)$ -oj derivaciji logaritamske funkcije s bazom e (uvjerite se u ovaj argument direktnim računom!):

$$f^{(k)}(x) = (\ln x)^{(k+1)}(x) = (-1)^k \cdot k! \cdot x^{k+1},$$

pa je

$$f^{(k)}(1) = (-1)^k \cdot k! \cdot 1^{k+1} = (-1)^k \cdot k!$$

Stoga je

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot k!}{k!} (x-1)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot (x-1)^k = \\ &= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \dots + (-1)^k \cdot (x-1)^k + \dots \end{aligned}$$

- 8) Kao i prije, računamo prvih nekoliko derivacija zadane funkcije i potom zaključujemo kako glasi izraz za opću derivaciju:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \\ f'(x) &= (-1) \cdot (1-x)^{-2} \cdot (-1) = (-1)^2 \cdot (1-x)^{-2} = (1-x)^{-2} \\ f''(x) &= (-2) \cdot (1-x)^{-3} \cdot (-1) = (-1)^2 \cdot 2! \cdot (1-x)^{-3} = 2! \cdot (1-x)^{-3} \\ f'''(x) &= 2! \cdot (-3) \cdot (1-x)^{-4} \cdot (-1) = (-1)^2 \cdot 3! \cdot (1-x)^{-4} = 3! \cdot (1-x)^{-4}, \end{aligned}$$

pa vidimo da je općenito

$$f^k(x) = k! \cdot (1-x)^{-(k+1)}$$

i stoga

$$f^k(0) = k! \cdot 1^{-(k+1)} = k!$$

Uvrštavanjem u opću formulu za Taylorov red dobivamo

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k!} x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^k + \dots \end{aligned}$$

Napomenimo da ovu formulu načelno možemo izvesti iz formule za geometrijski red: označimo

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Pomnožimo ovu jednakost s x oduzmimo tako dobivenu jednakost od gornje. Dobivamo:

$$\begin{aligned} S &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \\ xS &= x + x^2 + x^3 + \dots \\ \Rightarrow \\ S - xS &= 1 \\ (1-x)S &= 1 \\ S &= \frac{1}{1-x}, \end{aligned}$$

pa imamo

$$(*) \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots,$$

što je jednako

$$f(x) = T(x).$$

Poznavajući činjenicu da geometrijski red konvergira za $-1 < x < 1$ (što znači da jednakost (*) vrijedi samo za brojeve iz tog intervala), imamo i odgovor na pitanje koje je područje konvergencije dobivenog Taylorovog reda: $< -1, 1 >$.

9) Možemo se poslužiti trikom:

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)},$$

pa je Taylorov red ove funkcije u biti jednak Taylorovom redu funkcije iz prethodnog podzdatka, s tim da je sada argument tog reda $-x$:

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1 \cdot x)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot x^k = \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^k \cdot x^k + \dots \end{aligned}$$

Stoga je i područje konvergencije isto, jer red konvergira (i u tom području je $f(x) = T(x)$) za $-1 < -x < 1$, što je ekvivalentno $-1 < x < 1$, tj. intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

Ovaj smo rezultat mogli dobiti i direktno, računajući prvih nekoliko derivacija funkcije f , pronalazeći formulu za opću derivaciju funkcije f , uvrštavajući u tu formulu $x_0 = 0$ i potom taj izraz uvrštavajući u opću formulu za Taylorov red. Provjerite!

10) Slično kao u 9), možemo se referirati na 8), pa će biti

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \\ &= x^2 + x^4 + \dots + x^{2k} + \dots \end{aligned}$$

Koje je ovdje područje konvergencije? Koristite nejednakost za konvergenciju reda 8), tj. nejednakost $-1 < x < 1$, koju sada zapišite kao $|x| < 1$. Uvrštavanjem x^2 umjesto x u tu nejednakost dobivamo novu nejednakost čije rješenje predstavlja interval područja konvergencije.

Ako računamo Taylorov red na uobičajeni način doći ćemo do problema već pri računanju prvih nekoliko derivacija (provjerite!). Zato ćemo morati pribjeći rastavu na parcijalne razlomke, tj. napisat ćemo

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right).$$

Sada će Taylorov red zadane funkcije $T(x)$ biti linearna kombinacija Taylorovih redova $T_1(x)$ i $T_2(x)$ funkcija $g_1 = \frac{1}{1-x}$ i $g_2(x) = \frac{1}{1+x}$:

$$T(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot x^k \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (x^k + (-1)^k \cdot x^k) = \\
&= \frac{1}{2} (1 + 1 + x - x + x^2 - x^2 + x^3 - x^3 + \dots) = \\
&= \frac{1}{2} (2 + 2x^2 + 2x^4 + \dots) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x^k,
\end{aligned}$$

pa vidimo da dobivamo isti rezultat kao gore.

11) Slično kao prethodni podzadatak - Taylorov red će biti jednak Taylorovom redu prethodnog podzadatka u kojemu smo umjesto x^2 uvrstili $-x^2$ (zašto?).

12) Koristimo formulu

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos(2x).$$

Kako je Taylorov red $T_{\cos}(x)$ kosinusa dan s (provjerite, tj. riješite 6))

$$T_{\cos}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k},$$

to Taylorov red funkcije $g(x) = \cos(2x)$ dobivamo tako da u $T_{\cos}(x)$ uvrstimo argument $2x$, pa je on jednak

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (2x)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

Konačno za Taylorov red $T(x)$ zadane funkcije imamo

$$T(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$