

VJEŽBE IZ MATEMATIKE 1

Ivana Baranović

Miroslav Jerković

Lekcija 14

Rast, pad, konkavnost,
konveksnost, točke infleksije i
ekstremi funkcija

Poglavlje 1

Rast, pad, konkavnost, konveksnost, točke infleksije i ekstremi funkcija

1.0.1 Rast, pad i ekstremi funkcija

Pad i rast funkcije: Neka je zadana funkcije f , zanima nas gdje je područje pada, odnosno rasta. Kao što smo vidjeli na predavanjima, to možemo odrediti koristeći prvu derivaciju. Prva derivacija u nekoj točki je ujedino i koeficijent smjera tangente na graf krivulje u toj točki pa jasno da funkcija raste u okolini x_0 ako je $f'(x_0) > 0$ odnosno pada ako je $f'(x_0) < 0$.

Primjer 1 Nađite područje pada i rasta funkcije $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$.

Rješenje: Tražimo prvo derivaciju zadane funkcije: $f'(x) = x^2 - 4$. Rješavamo nejednadžbu

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x^2 > 4$$

pa funkcija raste na intervalima $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. Funkcija pada tamo gdje je $f'(x) < 0$, odnosno gdje vrijedi $x^2 < 4$ pa je jasno da pada na intervalu $(-2, 2)$.

Zadatak 2 Nađite područje pada i rasta funkcije $f(x) = e^{x^2} - x^2$.

Zadatak 3 Nađite područje pada i rasta funkcije $f(x) = \sin(2x)$ na intervalu $(-2\pi, 2\pi)$.

Zadatak 4 Nađite područje pada i rasta funkcije $f(x) = \frac{1}{x-3} + 4$.

Ekstremi funkcije: Neka je zadana funkcija f . Ako postoji okolina točke x_0 takva da za svaku točku $x \neq x_0$ te okoline vrijedi nejednakost $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$), onda točku x_0 nazivamo lokalnim minimumom (maksimumom) funkcije f . Točku lokalnog minimuma ili maksimuma funkcije nazivamo točkom lokalnog ekstrema. Ako je x_0 točka lokalnog ekstrema funkcije f , onda je nužno ili $f'(x_0) = 0$ (stacionarna točka) ili $f'(x_0)$ ne postoji. Obrat ne vrijedi, točke u kojima $f'(x_0) = 0$ ili $f'(x_0)$ ne postoji (kritične točke) nisu uvijek točke

ekstrema (vidi npr točke infleksije). Zato, ukoliko nađemo točku kandidata za ekstrem (tj onu u kojoj je prva derivacija jednaka nuli ili ne postoji) treba ili provjeriti da prve derivacija u toj točki kandidatu mijenja predznak ili ispitati drugu derivaciju u točki kandidatu jer vrijedi sljedeće:

- a) ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) > 0$ u točki x_0 je lokalni minimum
- b) ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$ u točki x_0 je lokalni maksimum
- c) ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) = 0$ u točki x_0 ne znamo što je nego su potrebna daljnja ispitivanja

Primjer 5 Nađite lokalne ekstreme te područja pada i rasta funkcije $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$.

Rješenje: Prvo ispitujemo koje točke zadovoljavaju nužan uvjet, tj. za koje točke je $f'(x_0) = 0$:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0.$$

Rješimo gornju kvadratnu jednadžbu i dobivamo kandidate za ekstreme: $x_1 = 1$ i $x_2 = -2$. Provjeravamo vrijednost druge derivacije od f u tim točkama.

$$f''(x) = 12x + 6 \quad \text{pa} \quad f''(x_1) = 18, \quad f''(x_2) = -18.$$

Zaključujemo da f ima lokalni minimum u $x_1 = 1$ i lokalni maksimum u $x_2 = -2$. Ispitujemo područja pada i rasta:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 6x^2 + 6x - 12 > 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 > 0.$$

Znamo da su nultočke $x_1 = 1$ i $x_2 = -2$ a pošto gornja nejednakost ima pozitivan koeficijent uz x_2 , $f'(x) > 0$ na intervalima $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ to jest na tim intervalima funkcija raste. Sada je jasno da funkcija pada na intervalu $(-2, 1)$. Iz činjenice da f' mijenja predznak u točkama $x_1 = 1$ i $x_2 = -2$, tj. da u njima iz pada prelazi u rast i obratno mogli smo također zaključiti da su to točke ekstrema bez ispitivanja druge derivacije u tim točkama.

1. Istražite ekstreme slijedećih funkcija:

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------|
| (a) $f(x) = x^2(x - 12)^2$ | (d) $f(x) = x - \ln(1 + x)$ |
| (b) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2+8}}$ | (e) $f(x) = x^2e^{-x}$ |
| (c) $f(x) = 2 \sin 2x + \sin 4x$ | (f) $f(x) = x - \arctan x$. |

Zadatak 6 U skupu nenegativnih realnih brojeva odredite onaj koji zbrojen sa svojom recipročnom vrijednošću daje minimalan zbroj. Odredite taj zbroj!

Rješenje: Formiramo funkciju čiji minimum želimo naći: $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Tražimo kandidate za ekstreme

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

pa su kandidati $x_1 = 1$ i $x_2 = -1$. Ispitujemo drugu derivaciju u tim točkama:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(1) = \frac{2}{3} > 0, \quad f''(-1) = -\frac{2}{3} < 0$$

Očito je traženi nenegativni minimum u $x_1 = 1$ i iznosi $f(1) = 2$.

1.0.2 Konkavnost, konveksnost i točke infleksije funkcija

Konkavnost i konveksnost: Za funkciju kažemo da je konveksna u okolini x_0 ako se tangenta na graf funkcije u x_0 nalazi ispod grafa funkcije. Ukoliko je iznad, govorimo o konkavnosti. Kriterij za ispitivanje je druga derivacija u točki x_0 : ako je ona veća od nule, funkcija je tu konveksna a ako je manja od nule, funkcija je konkavna.

Primjer 1 Odredite područje konveksnosti i konkavnosti funkcije $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$.

Rješenje: Kao što smo za pad i rast ispitivali prvu derivaciju, tako ovdje ispitujemo drugu.

$$f'(x) = x^2 - 4 \Rightarrow f''(x) = 2x$$

Očito je $f''(x) > 0$ za $x > 0$ i $f''(x) < 0$ za $x < 0$ pa je područje konkavnosti $(-\infty, 0)$ a konveksnosti $(0, +\infty)$.

1. Istražite područje konveksnosti i konkavnosti slijedećih funkcija:

$$(a) f(x) = e^x - 2x \qquad (c) f(x) = \frac{1}{x} - x^2$$

$$(b) f(x) = 2 \sin 2x - 4x$$

Točke infleksije: Točke u kojima funkcija prelazi iz konkavne u konveksnu ili obratno nazivaju se točke infleksije. Druga derivacija u tim točkama je ili jednaka nuli ili nije definirana. Međutim, slično kao kod traženja ekstrema, nije dovoljno provjeriti samo drugu derivaciju jer nam ona daje tek kandidate. Moramo se još uvjeriti da funkcija u tim točkama stvarno prelazi iz konveksne u konkavnu (ili obratno) tako što ćemo ispitati drugu derivaciju lijevo i desno od kandidata pa vidjeti da ona ima suprotan predznak. Ako je kojim slučajem i prva derivacija u tom kandidatu jednaka nuli, onda umjesto ispitivanja predznaka druge derivacije lijevo i desno od točke, možemo jednostavno izračunati treću derivaciju u toj točki i ako je ona različita od nule, to je točka infleksije.

Primjer 2 Ispitajte konkavnost i konveksnost te nađite točke infleksije funkcije $f(x) = e^{-x^2}$.

Rješenje: Tražimo drugu derivaciju:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \Rightarrow f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$$

pa je $f''(x) > 0$ ako je $2x^2 - 1 > 0$ jer $e^{-x^2} \geq 0$ za svako x (analogno za $f'(x) < 0$). Stoga je $f''(x) > 0$ na intervalu $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ i $f''(x) < 0$ na intervalu $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ pa su to područja konveksnosti, odnosno konkavnosti. Točke infleksije su očito $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ i $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ jer je tu druga derivacija jednaka nuli i funkcija se mijenja iz konveksne u konkavnu u x_1 , odnosno iz konkavne u konveksnu u x_2 .

Primjer 3 Nađite točke infleksije funkcije $f(x) = (x - 1)^3 + 5$.

Rješenje: Tražimo drugu derivaciju:

$$f'(x) = 3(x - 1)^2 \Rightarrow f''(x) = 6(x - 1)$$

i odmah vidimo da je jedini kandidat $x_1 = 1$. No, za njega je očito i prva derivacija jednaka nuli, tj $f'(x_1) = 0$ pa provjeravamo trecu derivaciju umjesto da gledamo predznak druge derivacije lijevo i desno od x_1 .

$$f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(1) = 6 \neq 0$$

pa je tu točka infleksije.

Zadatak 4

1. Istražite područje konveksnosti i konkavnosti te nađite točke infleksije sljedećih funkcija:

(a) $f(x) = (x + 1)^4$

(c) $f(x) = \frac{1}{x+3}$

(b) $f(x) = x - \sin x$

(d) $f(x) = (1 + x^2)e^x$

Imamo sljedeće definicije:

Ubrzani rast: područje na kojem funkcija raste i konveksna je

Usporeni rast: područje na kojem funkcija raste i konkavna je

Ubrzani pad: područje na kojem funkcija pada i konkavna je

Usporeni pad: područje na kojem funkcija pada i konveksna je

Primjer 5 Odredite područja ubrzanog i usporenog pada, odnosno rasta funkcije $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$.

Rješenje: Već znamo da je prva derivacija (vidi Primjer 1) jednaka $f'(x) = x^2 - 4$ pa funkcija raste na intervalu $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ odnosno pada na $(-2, 2)$. Provjeravamo drugu derivaciju na tim intervalima:

$$f''(x) = 2x \Rightarrow f''(x) > 0 \text{ za } x > 0, \quad f''(x) < 0 \text{ za } x < 0.$$

Očito je točka infleksije $x_0 = 0$ i zaključujemo:

- a) na intervalu $(-\infty, -2)$ funkcija raste i konkavna je pa imamo usporeni rast
- b) na intervalu $(-2, 0)$ funkcija pada i konkavna je pa imamo ubrzani pad
- c) na intervalu $(0, 2)$ funkcija pada i konveksna je pa imamo usporeni pad
- d) na intervalu $(2, +\infty)$ funkcija raste i konveksna je pa imamo ubrzani rast

1.0.3 Ispitivanje toka funkcije i crtanje grafa

Kod crtanja grafa funkcije moramo prvo u nekoliko koraka odrediti sljedeće parametre:

- (1) domena funkcije,
- (2) nultočke,
- (3) asimptote,

- (4) kandidate za ekstreme (prva derivacija),
- (5) ekstreme i točke infleksije (druga derivacija),
- (6) tok (prva derivacija).

Asimptote :

vertikalne asimptote: točke prekida funkcije

horizontalne asimptote: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow$ lijeva horizontalna asimptota,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow$ desna horizontalna asimptota

kosa asimptota: $y = kx + l$ gdje je $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$,
 $l = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$.

Ekstremi : $f'(x_0) = 0 \rightarrow x_0$ je kandidat; $f''(x_0) > 0$ lokalni minimum,
 $f''(x_0) < 0$ lokalni maksimum

Točke infleksije : $f''(x_0) = 0$ ili $f''(x_0)$ ne postoji: x_0 je točka infleksije ako f''
u intervalima $(x_0 - \delta, x_0)$ i $(x_0, x_0 + \delta)$
za neko δ zadržava konstantne predznake
i ako su ti predznaci suprotni.

Tok :

$f'(x) > 0$ funkcija raste,
 $f'(x) < 0$ funkcija pada.

Primjer 1 Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x - x^2}$.

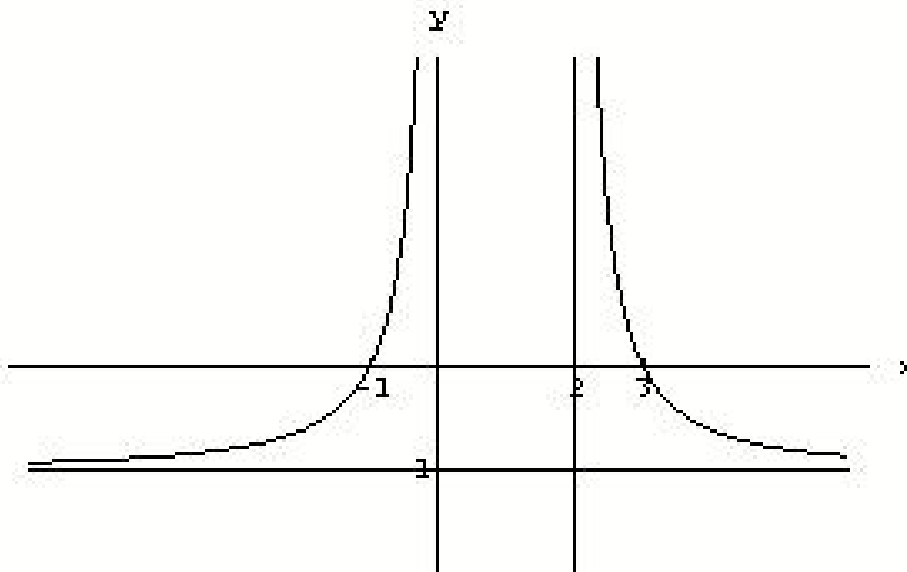
Rješenje: Jednostavno slijedimo upute:

- (1) Domena: $2x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, 2$ pa je domena $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.
- (2) Nultočke: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$
 $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = 1 \pm 2 \Rightarrow$
 $x_1 = -1 \quad (-1, 0),$
 $x_2 = 3 \quad (3, 0).$
- (3) Asimptote:
V.A. $x = 0, x = 2$
H.A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{2x - x^2} = -1$ pa je horizontalna asimptota $y = -1$.
K.A. nema
- (4) Kandidati za ekstreme: $f'(x) = \dots = \frac{-6x + 6}{(2x - x^2)^2}$ pa $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$.
- (5) Ekstremi i točke infleksije: $f''(x) = \dots = \frac{-6 - 2(-6x + 6)(2x - x^2)(2 - 2x)}{(2x - x^2)^4}$.
Sada imamo

$f''(1) = -6 < 0$ pa je u $x = 1$ lokalni maksimum.

- (6) Tok:

$f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (1, +\infty)$ pa tu funkcija pada,
 $f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1)$ pa tu funkcija raste.



Slika 1.1: Graf funkcije $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x - x^2}$

Na temelju gornjih opažanja sada je lako nacrtati graf:

Primjer 2 Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = x^3 e^{-x^2}$.

Rješenje:

- (1) Domena: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$
- (2) Nultočke: $x = 0$
- (3) Asimptote:
V.A. nema
H.A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^{x^2}} = L'H = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{2xe^{x^2}} = 0$ pa je horizontalna asimptota u oba smjera $y = 0$.
K.A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = L'H = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = 0$ pa kosih asimptota nema.
- (4) Kandidati za ekstreme: $f'(x) = 3x^2 e^{-x^2} + x^3 e^{-x^2} (-2x) = 0$ pa su kandidati $x_1 = 0$ i $x_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$.
- (5) Ekstremi i točke infleksije: $f''(x) = \dots = xe^{-x^2} (4x^4 - 14x^2 + 6)$. Sada imamo

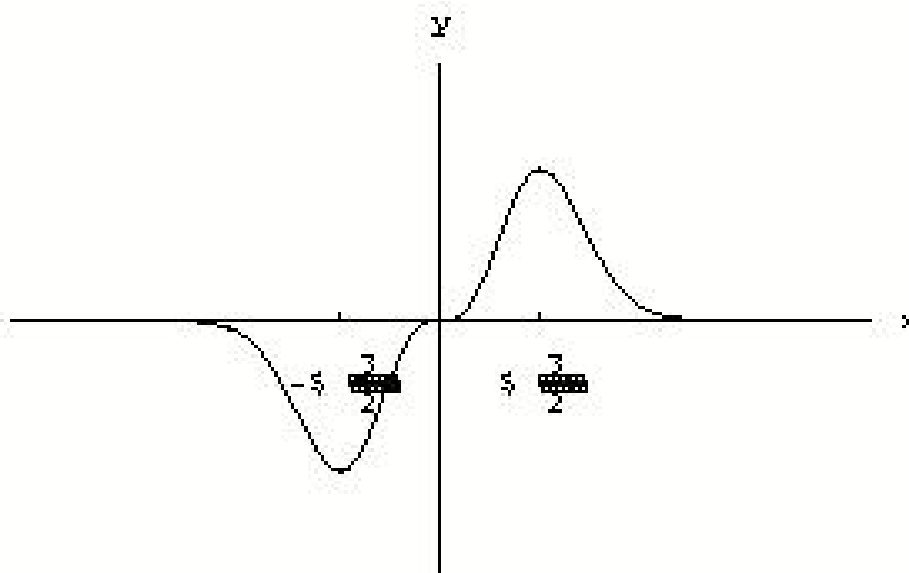
$$f''(0) = 0 \text{ pa je } x = 0 \text{ točka infleksije,}$$

$$f''\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) < 0 \text{ pa je u } x = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ lokalni maksimum,}$$

$$f''\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) > 0 \text{ pa je u } x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ lokalni minimum.}$$

- (6) Tok: $f'(x) < 0 \Rightarrow 3 - 2x^2 < 0 \Rightarrow |x| > \sqrt{\frac{3}{2}}$ pa tu funkcija pada,
 a $f'(x) > 0 \Rightarrow |x| < \sqrt{\frac{3}{2}}$ pa na tom intervalu funkcija raste.

Crtamo graf:



Slika 1.2: Graf funkcije $f(x) = x^3 e^{-x^2}$

Zadaci sa rokova:

1. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = e^{\sin x}$.
2. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
3. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = \arctan\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.
4. Odredite graf funkcije $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.
5. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = (1 + x^3)^{-1}$.
6. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = \arctan x - x$.
7. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 5$.
8. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5) - \ln 2$.
9. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = x^2 2^{-x}$.
10. Nacrtajte kvalitativni graf funkcije $f(x) = 1 - e^{-\cos x}$.
11. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = \frac{x^3 + 8x^2 + 27x + 27}{2(x+2)^2}$.
12. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije: $f(x) = x - 1 + e^{\frac{1}{1-x}}$.

13. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije: $f(x) = \arctan(1 - \frac{1}{x})$.
14. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^{\frac{1}{3}}}$.
15. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$.
16. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = (x - 1)^{-1/2} \cdot \ln(x - 1)$.
17. Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$.
18. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = x \cdot \sqrt{8 - x^2}$.
19. Odredite kvalitativni graf funkcije $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2}$.