

# VJEŽBE IZ MATEMATIKE 1

Ivana Baranović  
Miroslav Jerković

Lekcija 6  
Linearni sustavi

# Poglavlje 1

## Linearni sustavi

Linearne sustave možemo općenito zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

što označava sustav od  $m$  linearnih jednažbi s  $n$  realnih nepoznanica  $x_1, \dots, x_n$ . Realne brojeve  $a_{ij}$ , gdje je  $i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , zovemo **koeffijenti** sustava, dok realne brojeve  $b_1, b_2, \dots, b_m$  zovemo **slobodni članovi** sustava. Očito je da sve informacije o sustavu nose upravo ovi brojevi. U primjenama pojavljuju se sustavi koji imaju i po nekoliko stotina jednaždbi i nepoznanica. Radi praktičnijeg zapisivanja ovakvih sustava uvedeno je tabelarno zapisivanje koeficijenata i slobodnih članova.

Pravokutnu tablicu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

zovemo **matrica sustava**, a tablicu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

**proširena matrica sustava**. Ako definiramo **matricu slobodnih članova**

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

te **matricu nepoznanica**

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

naš linearni sustav može se zapisati jednostavno kao:

$$AX = B$$

Iz gornje formule slijedi da, ako je matrica sustava  $A$  regularna, rješenje postoji, jedinstveno je i dano sa

$$X = A^{-1}B$$

**Zadatak 1** *Nalaženjem inverzne matrice riješite sljedeći sustav:*

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 2 \\ x + 2y - z &= 1 \\ -4x + 4y + z &= 1 \end{aligned}$$

*Rješenje:* Matrični zapis našeg sustava je:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dakle, tražimo inverz matrice  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ . Primjenom metode iz lekcije "Algebra matrica" tj. nalaženjem adjunkte vidimo da je inverz matrice  $A$  matrica

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Sada dobivamo:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Zadatak 2** *Nalaženjem inverzne matrice riješite sljedeći sustav:*

$$\begin{aligned} -x + y + z &= 3 \\ x + z &= 2 \\ x + 2y - z &= 1 \end{aligned}$$

Regularni sustavi mogu se riješavati i tzv. Cramerovim pravilom. Označimo stupce matrice  $A$  sada redom slovima  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ , a stupac matrice  $B$  s  $\mathbf{b}$ . Ako je matrica  $A$  sustava  $A \cdot X = B$  invertibilna, onda je rješenje sustava jedinstveno i dano sa

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \dots \quad x_n = \frac{D_n}{D},$$

gdje je  $D = \det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n] = \det A$ ,  $D_1 = \det[\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n]$ ,  $\dots$ ,  $D_n = \det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{b}]$ , tj. determinante  $D_1, D_2, \dots, D_n$  su determinante matrica koje su dobivene tako da se u matricu  $A$  ubacuje stupac  $\mathbf{b}$  umjesto stupca  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ , redom.

**Zadatak 3** Pomoću Cramerovog pravila riješite slijedeći sustav:

$$\begin{aligned} x + 2y - z + u &= -1 \\ 2x + 5y - z + 2u &= -2 \\ 3x - y - 2z + u &= 5 \\ x - y + 3z - 5u &= 6. \end{aligned}$$

*Rješenje:* Sustav najprije zapisujemo matrično:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Treba izračunati determinantu  $D = \det A$  ( $A$  je matrica sustava) - dobije se  $D = -34$  (ostavljamo za vježbu). Dalje, računamo determinantu matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix},$$

koja se dobije tako da se prvi stupac matrice  $A$  zamijeni stupcem matrice  $B$  ( $B$  je matrica slobodnih koeficijenata). Dobije se  $D_1 = -68$ . Analogno postupamo za ostala tri stupca matrice  $A$  - determinante matrica koje tako dobivamo redom iznose  $D_2 = 34, D_3 = -34, D_4 = 0$ , što prema Cramerovom pravilu daje konačno rješenje sustava:  $x_1 = \frac{-68}{-34} = 2, x_2 = \frac{34}{-34} = -1, x_3 = \frac{-34}{-34} = 1, x_4 = \frac{0}{-34} = 0$ .

**Zadatak 4** Cramerovim pravilom riješite sustav:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1. \end{aligned}$$

**Zadatak 5** Cramerovim pravilom riješite sustav:

$$\begin{aligned} x + 2y - z + u &= 0 \\ 2x + 5y - z + 2u &= 1 \\ 3x - y - 2z + u &= 2 \\ x - y + 3z - 5u &= 3. \end{aligned}$$

Determinante potrebne za Cramerovo pravilo i determinante općenito mogu se osim razvojem po nekom retku (ili stupcu) računati i pomoću elementarnih transformacija. Naime, vrijedi:

- (1) Ako svi elementi nekog stupca ili nekog retka matrice  $A$  iščezavaju, onda je  $\det A = 0$ .
- (2) Ako dva stupca ili dva retka determinante zamijene mjesta, ona mijenja predznak.
- (3) Ako matrica ima dva stupca ili dva retka jednaka, onda je  $\det A = 0$ .
- (4) Ako stupac ili redak matrice  $A$  pomnožimo sa nekim realnim brojem  $k$ , onda je determinanta nove matrice  $B$  jednaka  $k$  puta determinanta stare matrice, tj.  $\det B = k \det A$ .
- (5) Ako nekom stupcu ili retku matrice  $A$  dodamo linearnu kombinaciju ostalih redaka (stupaca), determinanta se ne mijenja.

**Zadatak 6** Koristeći gornja svojstva nađite svodenjem na trokutastu formu  $\det A$  gdje je:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

*Rješenje:* Imamo redom:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(2)}{=} -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(3)}{=} -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = -3 \left( -\frac{1}{3} \right) = 1$$

gdje smo u

- (1) prvi redak množili s  $-2$  i dodali drugom pa zatim s  $-3$  i dodali trećem kako bi postigli nule u prvom stupcu,
- (2) izlučili  $-3$  iz drugog retka kako bi na drugom mjestu dobili 1 s kojim ćemo poništiti  $-4$  u trećem redu
- (3) množili drugi redak s 4 i dodali trećem.

Determinanta je na kraju imala gornju trokutastu formu pa je bilo dovoljno samo izmnožiti elemente na dijagonali da je izračunamo.

**Zadatak 7** Koristeći svojstva determinante svedite  $\det A$  na gornju trokutastu formu te zatim provjerite da je jednaka nuli ako je

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 8 & -7 & 2 & 1 & -4 \\ -4 & 2 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformacije koje smo koristili prilikom računanja determinante zovu se elementarne transformacije i vrlo su korisne kod još dva tipa problema: traženja inverza matrice i rješavanja lineranih sustava. Popišimo ih:

Elementarne matrične transformacije:

- (1) zamjena dvaju redaka (stupaca)
- (2) množenje jednog retka (stupca) realnim brojem različitim od nule
- (3) dodavanje jednog retka (stupca) pomnoženog realnim brojem drugom retku (stupcu)

Kad tražimo inverz matrice  $A$ , gornjim transformacijama je svodimo na jediničnu matricu, a istovremeno sve što radimo s  $A$  radimo i sa jediničnom matricom. Rezultat je inverzna matrica  $A^{-1}$ .

**Zadatak 8** Za matricu  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  izračunajte  $A^{-1}$ .

*Rješenje:*

$$\begin{aligned} (A|I) &= \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim^1 \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim^2 \\ &\sim^2 \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim^3 \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim^4 \\ &\sim^4 \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) = (I|A^{-1}), \end{aligned}$$

gdje su redom primjenjene sljedeće transformacije:

- (1) zamjena prvog i drugog retka
- (2) prvi redak pomnožen s  $-2$  i dodan drugom retku
- (3) drugi redak pomnožen s  $2$  i dodan prvom retku
- (4) prvi redak pomnožen s  $-1$ .

Odavdje jednostavno pročitamo desni dio matrice  $(I|A^{-1})$  - to je inverzna matrica:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Zadatak 9** Koristeći transformacije matrica odredite inverz sljedećih matrica:

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(c) C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(d) D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kada radimo s linearnim sustavim, postupak je vrlo sličan; proširena matrica sustava se analognim transformacijama svodi na gornji (donji) trokutasti ili dijagonalni oblik iz kojeg se onda lako očita rješenje. Pri tome se smiju koristiti samo transformacije na retcima, manipuliranje sa stupcima nije dozvoljeno. To je tzv. Gauss-Jordanova metoda.

**Zadatak 10** *Gaussovom metodom riješite sustav:*

$$\begin{aligned} 5x + 4z + 2t &= 3 \\ x - y + 2z + t &= 1 \\ 4x + y + 2z &= 1 \\ x + y + z + t &= 0. \end{aligned}$$

*Rješenje:* Napravimo proširenu matricu sustava i transformiramo:

$$\begin{aligned} &\left( \begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim^1 \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim^2 \\ &\sim^2 \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & 3 \end{array} \right) \sim^3 \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 3 \end{array} \right) \sim^4 \\ &\sim^4 \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -3 & 4 \end{array} \right) \sim^5 \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim^6 \\ &\sim^6 \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim^7 \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim^8 \\ &\sim^8 \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right), \end{aligned}$$

gdje su redom korištene sljedeće transformacije:

- (1) zamjena prvog i četvrtog retka (kako bismo u gornjem lijevom kutu imali jedinicu, što je standardni početak rješavanja sustava putem elementarnih transformacija - želimo na kraju imati dijagonalnu formu s jedinicama na dijagonali!)
- (2) prvi redak pomnožen redom s  $-1$ ,  $-4$  i  $-5$  i dodan redom drugom, trećem i četvrtom retku (želja nam je dobiti nule na svim nedijagonalnim elementima)
- (3) zamjena drugog i trećeg stupca (kako bismo kao drugi dijagonalni element - na presjeku drugog retka i drugog stupca - također imali jedinicu) - bitno je ovdje primjetiti da su time varijable  $y$  i  $z$  zamijenile mjesta. Naime, varijabli  $y$  sada pripada treći, a varijabli  $z$  drugi stupac.

- (4) drugi redak pomnožen redom s  $-1$ ,  $2$  i  $1$  i dodan redom prvom, trećem i četvrtom retku (vidi napomenu uz (2))
- (5) treći redak pomnožen s  $-1$  i dodan četvrtom retku (kako bismo dobili nulu na jedinom preostalom nedijagonalnom elementu četvrtog retka i jedinicu na dijagonalnom elementu)
- (6) četvrti redak pomnožen redom s  $-1$  i  $4$  i dodan redom prvom i trećem retku (vidi napomenu uz (2))
- (7) treći redak podijeljen s  $-7$  (kako bi na dijagonalnom elementu trećeg retka dobili jedinicu)
- (8) treći redak pomnožen redom s  $-3$  i  $2$  i dodan redom prvom i drugom retku (vidi napomenu uz (2))

Ovim postupkom dolazimo do proširene matrice sustava koji je ekvivalentan početnom, pa ima isto rješenje. Međutim, rješenje ovog sustava možemo jednostavno pročitati iz proširene matrice koju smo dobili (uz napomenu da su  $y$  i  $z$  zamijenili mjesta):  $x = 1$ ,  $z = -1$ ,  $y = -1$ ,  $t = 1$ , pa uređena četvorka  $(1, -1, -1, 1)$  čini jedinstveno rješenje početnog sustava.

**Zadatak 11** *Gaussovom metodom riješite sustav:*

$$\begin{aligned}
 2x_1 - x_2 + x_4 - 2x_5 &= 0 \\
 -x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1 \\
 8x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 - 4x_5 &= 2 \\
 -4x_1 + 2x_2 - 2x_4 + 4x_5 &= 0 \\
 x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 1.
 \end{aligned}$$

**Zadatak 12** *Gaussovom metodom riješite sustav:*

$$\begin{aligned}
 4x - y + z + 2u &= 14 \\
 2x + y - 3u &= 2 \\
 x - y + 2z + u &= 3 \\
 2x + y + z - 4u &= 0.
 \end{aligned}$$

**Zadatak 13** *Gaussovom metodom riješite sustav:*

$$\begin{aligned}
 -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= -11 \\
 -2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 3 \\
 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= -2 \\
 4x_1 - 2x_2 + 9x_3 - x_4 &= -33.
 \end{aligned}$$