

# VJEŽBE IZ MATEMATIKE 1

Ivana Baranović  
Miroslav Jerković

## Lekcija 8

Pojam funkcije, grafa i inverzne  
funkcije

# Poglavlje 1

## Funkcije

Neka su  $X$  i  $Y$  dva neprazna skupa. Ako je po nekom pravilu, označimo ga sa  $f$ , svakom elementu  $x$  iz  $X$  pridružen točno jedan element  $y$  iz  $Y$ , kažemo da je na skupu  $X$  zadana funkcija  $f$  sa vrijednostima u  $Y$ . To simbolički označavamo sa  $f : X \longrightarrow Y$ .

Skup  $X$  nazivamo *područje definicije* ili *domena* funkcije  $f$ , a skup  $Y$  *područje vrijednosti* ili *kodomena* of  $f$ . Vrijednost  $x$  zovemo ponekad *varijabla*. Ako je kodomena funkcije  $f$  podskup skupa realnih brojeva  $\mathbb{R}$ , kažemo da je  $f$  *realna* funkcija.

Neka je zadana funkcija  $f : X \longrightarrow Y$ . Podskup skupa  $Y$ ,

$$f(X) = \{y | y = f(x), \quad x \in X\}$$

zove se *slika funkcije*  $f$ .

*Graf* realne funkcije realne varijable  $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$  je skup točaka ravnine  $\Gamma_f = \{(x, f(x)) = x \in X\}$ .

**Zadatak 1** Izračunajte  $f(-1), f(0), f(1), f(3)$  i  $f(5)$  ako je  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ .

*Rješenje:* Redom uvrštavamo zadane vrijednosti na mjesto varijable  $x$  u pravilu pa imamo:

i)  $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 2(-1) - 5 = -1 - 3 - 2 - 5 = -11$

ii)  $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 5 = -5$

iii)  $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 5 = 1 - 3 + 2 - 5 = -5$

**Zadatak 2** Neka je  $f(x) = 2x + 3$ . Odredite:

(a)  $f(-2), f(1)$  i  $f(\frac{1}{4})$ ,

(b)  $f(a^2)$ ,

(c)  $f^2(a)$ ,

(d)  $f(1) - f(-1)$  i  $f(a^2 + 1) - f^2(a + 1)$ .

Rješenje:

(b)  $f(a^2) = 2a^2 + 3$

(c)  $f^2(a) = (2a + 3)^2$

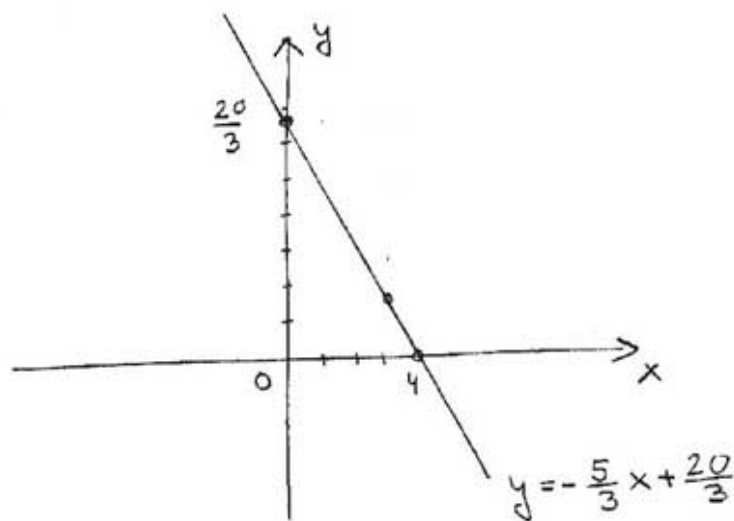
**Zadatak 3** Odredite  $f(0)$ ,  $f(-1)$  i  $\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})$  ako je  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

Funkcije oblika  $f(x) = ax + b$  nazivamo linearne funkcije. Njihov je graf pravac  $y = ax + b$ .

**Zadatak 4** Odredite linearnu funkciju  $f(x) = ax + b$  i nacrtajte njen graf ako je

(a)  $f(-2) = 10$  i  $f(1) = -5$ ,

(b)  $f(-3) = 3$  i  $f(b) = 0$ .



Slika 1: graf funkcije  $f(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{20}{3}$   
je pravac

Rješenje:

(a)  $f(-2) = 10 \Rightarrow a(-2) + b = 10$ ,  $f(1) = -5 \Rightarrow a + b = -5$

Dakle, rješavamo sustav  $-2a + b = 10$ ,  $a + b = -5$  što daje  $a = -\frac{5}{3}$ ,  $b = \frac{20}{3}$   
pa je tražena funkcija  $f(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{20}{3}$ .

**Zadatak 5** Odredite kvadratnu funkciju  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ako je:

(a)  $f(-1) = -1, f(3) = -3$  i  $f(6) = 12,$

(b)  $f(-\sqrt{2}) = -4, f(2) = -5$  i  $f(2\sqrt{2}) = -7.$

**Zadatak 6** Neka je dano pridruživanje:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1] \\ 3x, & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Da li je  $f$  funkcija?

*Rješenje:* Dano pridruživanje nije funkcija jer po pravilu za interval  $[0, 1]$  imamo  $f(1) = 2$  a po pravilu za interval  $[1, 2]$  slijedi da je  $f(1) = 3$  što znači da su broju 1 pridružene dvije različite vrijednosti.

**Zadatak 7** Izračunajte  $f(x+1)$  ako je  $f(x-1) = x^2$ .

*Rješenje:* Problem je što umjesto  $f(x)$  imamo zadano  $f(x-1)$ . Zato radimo supstituciju  $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$  pa dobivamo  $f(t) = (t+1)^2$  iz čega slijedi da je  $f(x+1) = (x+1+1)^2 = (x+2)^2$ .

Funkcije mogu imati različita svojstva. Za funkciju  $f : X \rightarrow Y$  kažemo da je *injekcija* ako za bilo koja dva elementa  $x_1, x_2 \in X$  iz  $x_1 \neq x_2$  slijedi  $f(x_1) \neq f(x_2)$  ili, ekvivalentno tome, ako iz  $f(x_1) = f(x_2)$  slijedi  $x_1 = x_2$ . Ako je  $f(X) = Y$ , tj. ako za svako  $y \in Y$  postoji  $x \in X$  tako da je  $f(x) = y$ , kažemo da je  $f$  *surjekcija*. Za funkciju koja je istovremeno i surjekcija i injekcija, kažemo da je *bijekcija*.

**Zadatak 8** Provjerite injektivnost sljedećih funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  :

(a)  $f(x) = 3,$  (b)  $f(x) = 2x+1,$  (c)  $f(x) = 3x^2+1,$  (d)  $f(x) = x^3.$

*Rješenje:*

(a) Ova funkcija očito nije injektivna jer je  $f(x) = 3$  za svako  $x$  pa možemo npr. uzeti  $x_1 = 1, x_2 = 2$  i imamo  $f(x_1) = f(x_2)$  iako je  $1 \neq 2$ .

(b) Koristit ćemo drugi kriterij injektivnosti da pokažemo da je ova linearna funkcija injektivna. Želimo da iz  $f(x_1) = f(x_2)$  slijedi  $x_1 = x_2$ . Imamo

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

pa je to injektivna funkcija. Općenito vrijedi da su linearne funkcije injektivne.

(c) Kako je  $(-x)^2 = x^2$  lako ćemo naći primjer koji pokazuje da kvadratna funkcija  $f(x) = 3x^2 + 1$  nije injektivna. Uzmemo  $x_1 = 1$  i  $x_2 = -1$  pa imamo  $f(1) = 3 \cdot 1^2 + 1 = 4$  i s druge strane  $f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 1 = 4$ . Jer je  $1 \neq -1$  pokazali smo da funkcija nije injektivna.

Injektivnost funkcije se ponekad može postići restrikcijom domene.

**Zadatak 9** Restringirajte domenu slijedeći funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tako da one postanu injektivne:

$$(a) \quad f(x) = x^2, \quad (b) \quad f(x) = |x + 1|, \quad (c) \quad f(x) = \sin x$$

*Rješenje:*

- (a) Ovdje možemo uzeti npr. samo pozitivne  $x$ -eve odnosno domenu sa  $\mathbb{R}$  restringirati na  $\mathbb{R}_+ = \{ x \geq 0 \mid x \in \mathbb{R} \}$ . Sada imamo:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = x_2$$

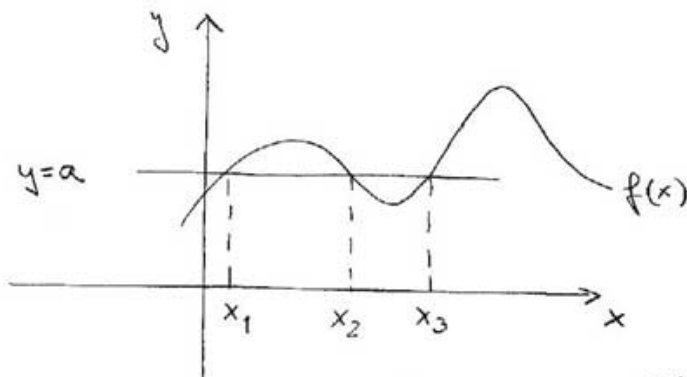
jer su  $x_1$  i  $x_2$  pozitivni pa  $|x_1| = x_1$  i  $|x_2| = x_2$ .

**Zadatak 10** Neka je  $f(x) = x^2 + 1$ . Odredite  $Y$  tako da  $f : \mathbb{R} \rightarrow Y$  bude surjekcija.

*Rješenje:* Ako je  $f : \mathbb{R} \rightarrow Y$  surjekcija onda za svako  $y \in Y$  mora postojati  $x \in \mathbb{R}$  takav da je  $f(x) = y$ . To znači da je  $y = x^2 + 1$ . Jer je  $x^2 \geq 0$  za svako  $x \in \mathbb{R}$  slijedi da je  $y = x^2 + 1 \geq 1$ . Prema tome, ako definiramo  $Y = [1, +\infty)$  imamo surjektivnost jer u tom slučaju za dani  $y$  odgovarajući  $x$  ima oblik  $\sqrt{y - 1}$ .

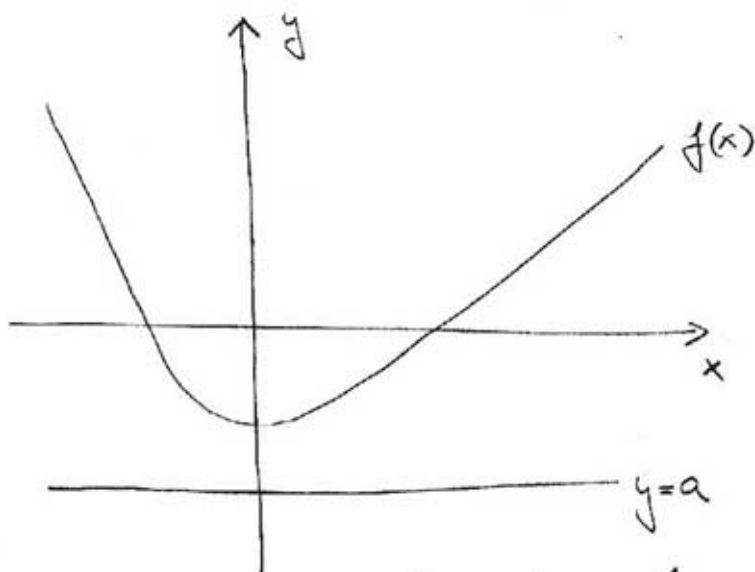
Surjektivnost i injektivnost se lako mogu vidjeti iz grafa funkcije:

- (i) injektivnost: povlačimo pravce paralelene s  $x$ -osi, tj. pravce oblika  $y = b$ . Ako graf funkcije presiječemo s nekim takvim pravcem u više od jedne točke to znači da funkcija nije injektivna. Naime, te točke presjeka imaju koordinate  $(x_1, b)$  i  $(x_2, b)$  gdje je  $x_1 \neq x_2$ . Jer leže na grafu slijedi da je  $f(x_1) = f(x_2) = b$  (vidi sliku 2.)



Slika 2: graf funkcije koja nije injektivna; pravac  $y = a$  siječe graf u tri točke pa  $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = a$  dok je istovremeno  $x_1 \neq x_2, x_2 \neq x_3, x_1 \neq x_3$

- (ii) surjektivnost: ponovno povlačimo pravce paralelne s  $x$ -osi tj. one oblika  $y = b$  za neko  $b$ . Ako nađemo  $b$  takav da je  $b$  u kodomeni  $Y$  zadane funkcije  $f$ , ali pravac  $y = b$  ne siječe graf te funkcije, to znači da dana funkcija  $f : X \rightarrow Y$  nije surjektivna. Naime, za taj  $b \in Y$  nema odgovarajućeg  $x \in X$  takvog da  $f(x) = b$  jer bi inače pravac  $y = b$  sijekao graf u točki  $(x, f(x)) = (x, b)$ . (vidi sliku 3.)



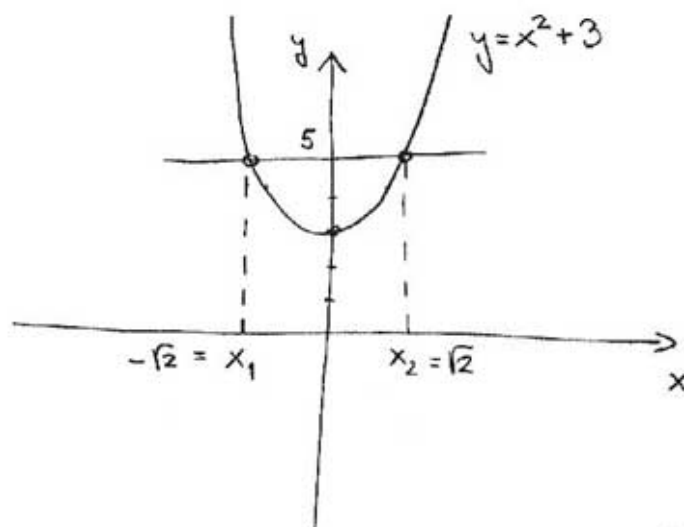
Slika 3: ako funkciji  $f$  gledamo kao funkciju sa  $\mathbb{R}$  u  $\mathbb{R}$ , onda ona očito nije surjektivna jer pravac  $y=a$  ne siječe njen graf  $\Rightarrow$  ne postoji  $x \in \mathbb{R}$  t.d.  $f(x)=a$

**Zadatak 11** Provjerite grafički injektivnost i surjektivnost slijedećih funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

(a)  $f(x) = x^2 + 3$ ,      (b)  $f(x) = |x + 1|$ ,      (c)  $f(x) = x + 3$

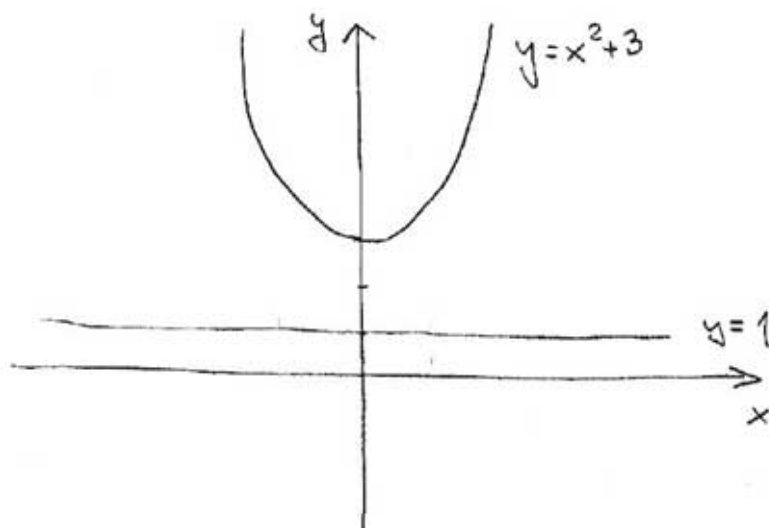
*Rješenje:*

- (a) Gledamo da li možemo naći pravac oblika  $y = b$  koji bi sjeкао naš graf u barem dvije točke, uzmemo npr.  $y = 5$  i vidimo da funkcija nije injektivna.



Slika 4: različiti  $x_1$  i  $x_2$  sa svojstvom da  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f$  nije injektivna

Sada tražimo  $y = b$  takav da ne siječe graf niti u jednoj točki, to je npr  $y = 1$  pa  $f$  nije ni surjektivna.



Slika 5: pravac  $y = 1$  nikadje ne siječe graf pa  $f$  nije surjektivna

Neka su zadane dvije funkcije,  $f : X \rightarrow Y$  i  $g : Y_1 \rightarrow Z$  uz uvjet  $Y \subset Y_1$ . Funkcija koja svakom elementu  $x \in X$  pridružuje element  $g(f(x)) \in Z$  zove se kompozicija funkcija  $f$  i  $g$  i označava sa  $g \circ f$ . Dakle, po definiciji je

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Neka je sada  $f : X \rightarrow Y$  bijekcija. Onda za svaki element  $y \in f(X)$  postoji jedinstveni  $x \in X$  takav da je  $y = f(x)$ . To nam omogućuje da definiramo novu funkciju,  $f^{-1}$ . Funkcija  $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$  koja svakom elementu  $y \in f(X)$  pridružuje  $x \in X$  sa svojstvom da  $f(x) = y$  zove se inverzna funkcija polazne funkcije  $f$ . Primjetimo da vrijedi:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{i} \quad (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y$$

pa je

$$f^{-1} \circ f = id_X \quad \text{i} \quad f \circ f^{-1} = id_Y.$$

**Zadatak 12** Neka je  $f(x) = x^3 - x$ . Odredite:

$$(a) \quad f \circ f, \quad (b) \quad (f \circ (f \circ f))(-1).$$

**Zadatak 13**

(i) Neka je  $f(x) = x + 2$ ,  $g(x) = 3 - x^2$ . Da li vrijedi  $f \circ g = g \circ f$ ? Za koje  $x \in \mathbb{R}$  vrijedi  $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ ?

(ii) Neka je  $f(x) = x + 2$ ,  $g(x) = 1 - \sqrt{x}$  i  $h(x) = x^2 + 3$ . Provjerite:  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .

Navedena tvrdnja,  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ , vrijedi za sve funkcije  $f$ ,  $g$  i  $h$  za koje su te kompozicije dobro definirane, tj. operacija kompozicije ima svojstvo asocijativnosti.

**Zadatak 14** Za funkciju  $f(x)$  izračunajte inverznu funkciju ako je

$$(a) \quad f(x) = x^2 - 1,$$

$$(b) \quad f(x) = \log \frac{x}{2},$$

$$(c) \quad f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3},$$

$$(d) \quad f(x) = (5 + 3^x)^2.$$

*Rješenje:*

(a) Prvo trebamo odrediti područje na kojem je zadana funkcija bijektivna. Imamo  $x^2 - 1 \geq -1$  pa ćemo kodomenu ograničiti na  $[-1, +\infty)$ . Ako domenu ograničimo na  $x \geq 0$  imamo i injektivnost:  $x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$  jer  $|x| = x$  ako  $x \geq 0$ . Stoga promatramo  $f : [0, +\infty) \rightarrow [-1, +\infty)$  i tu se inverz dobiva na slijedeći način: stavimo  $y = x^2 - 1 \Rightarrow y + 1 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y + 1}$  pa je  $f^{-1}(y) = \sqrt{y + 1}$ . To je, zbog ograničenja kodomene na  $[-1, +\infty)$  dobro definirano (vidi sliku).

- (b) Domena ove funkcije je  $x > 0$  zbog svojstava logaritma. Iz istih razloga je kodomena čitav  $\mathbb{R}$ . Injektivnost imamo na čitavoj domeni jer  $\log \frac{x_1}{2} = \log \frac{x_2}{2} \Rightarrow 10^{\log \frac{x_1}{2}} = 10^{\log \frac{x_2}{2}} \Rightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{2} \Rightarrow x_1 = x_2$ . Znači, imat ćemo  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  i nalazimo je na sljedeći način:  $y = \log \frac{x}{2} \Rightarrow 10^y = 10^{\log \frac{x}{2}} \Rightarrow 10^y = \frac{x}{2}$  pa  $2 \cdot 10^y = x$  i konačno  $f^{-1}(y) = 2 \cdot 10^y$ .

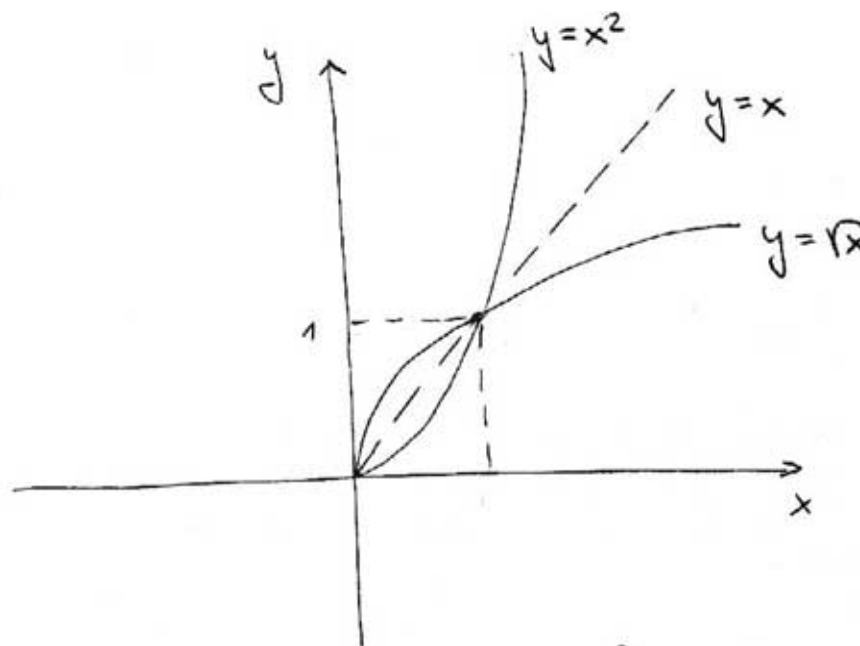
Graf inverzne funkcije dobijemo tako da preslikmo graf početne funkcije oko pravca  $y = x$ .

**Zadatak 15** Nacrtajte graf inverzne funkcije ako je početna funkcija zadana s:

- (a)  $f(x) = x^2$   
 (b)  $f(x) = -x + 1$   
 (c)  $f(x) = x^3 - 1$

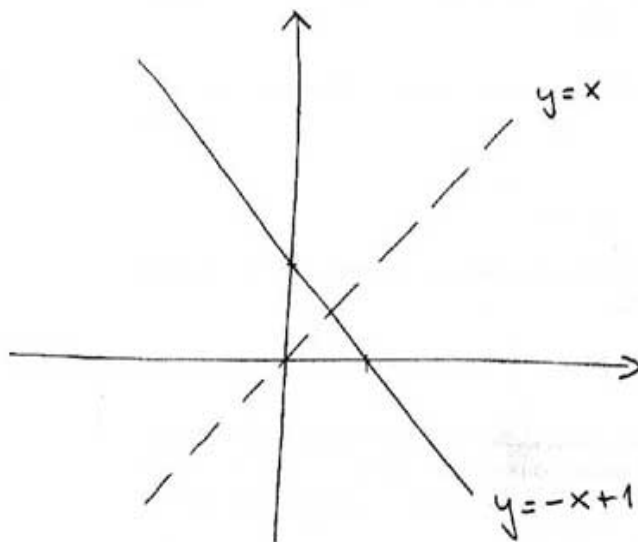
*Rješenje:*

- (a) Funkcija  $f(x) = x^2$  bijektivna je ako joj npr. ograničimo domenu na  $x \geq 0$  a kodomenu na  $y \geq 0$ . Tu je inverz dan sa  $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ :



Slika 6: parabolu  $y = x^2, x \geq 0$  smo preslikali oko pravca  $y = x$  i dobili graf inverzne funkcije  $y = \sqrt{x}$

- (b) Linearne funkcije su sve bijektivne pa možemo odmah tražiti inverz:  
 $y = -x + 1 \Rightarrow y - 1 = -x \Rightarrow x = -y + 1$  i dobivamo  $f^{-1}(y) = -y + 1$ .  
 Zaključujemo da je graf inverzne funkcije istovjetan grafu početne funkcije:



Slika 7: pravac  $y = -x + 1$  se preslikava u pravac  $y = x$  preslikavanjem oko pravca  $y = x$  preslika sam u sebe pa zaključujemo da je inverzna funkcija od  $f(x) = -x + 1$  upravo ona sama.

Funkciju  $f(x)$  definiranu u simetričnom području  $-l < x < l$  (ovdje  $l \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$ ) nazivamo parnom ako je  $f(-x) = f(x)$  i neparnom ako je  $f(-x) = -f(x)$  za svako  $x$  iz domene od  $f$ .

### Zadatak 16

Odredite parnost ili neparnost sljedećih funkcija:

- (a)  $f(x) = x^2 - x^4$ ,
- (b)  $f(x) = \sin(\cos x)$ ,
- (c)  $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$ ,
- (d)  $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$ ,
- (e)  $f(x) = \frac{|x|+1}{(1-x^2)\sin x}$ ,
- (f)  $f(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$ .

*Rješenje:*

- (a) Jednostavno uvrštavamo  $-x$  umjesto  $x$  i imamo:

$$f(-x) = (-x)^2 - (-x)^4 = x^2 - x^4 = f(x)$$

što pokazuje da je funkcija parna.

- (b)  $f(-x) = \sin(\cos(-x)) = \sin(\cos x) = f(x)$

i vidimo da je  $f$  parna funkcija jer je  $\cos$  paran.

- (c)  $f(-x) = \sqrt{1 + (-x) + (-x)^2} - \sqrt{1 - (-x) + (-x)^2} = \sqrt{1 - x + x^2} - \sqrt{1 + x + x^2} = -(-\sqrt{1 - x + x^2} + \sqrt{1 + x + x^2}) = -f(x)$   
pa je  $f$  neparna funkcija.

Parnost ili neparnost se isto može isčitati iz grafa funkcije; graf parne funkcije je simetričan s obzirom na os  $y$ , a graf neparne dobijemo tako da nacrtamo funkciju na području  $x \geq 0$ , preslikamo dobiveno prvo oko osi  $y$  pa onda oko osi  $x$  (vidi sliku)

**Zadatak 17** *Odredite pomoću grafa parnost ili neparnost slijedećih funkcija*

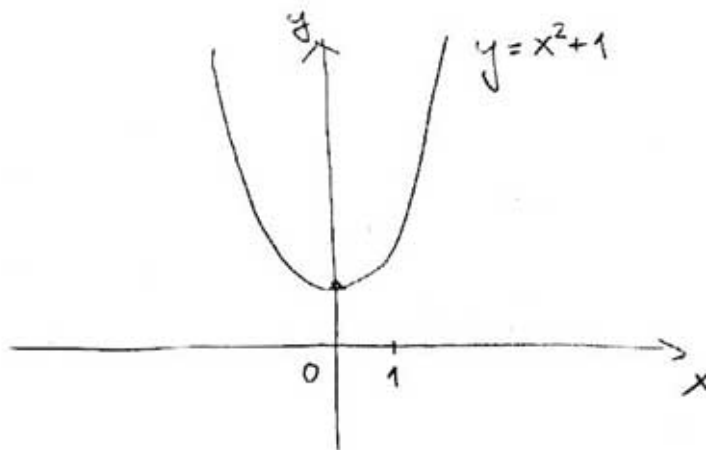
(a)  $f(x) = x^2 + 1$

(b)  $f(x) = x^3$

(c)  $f(x) = \sin x$

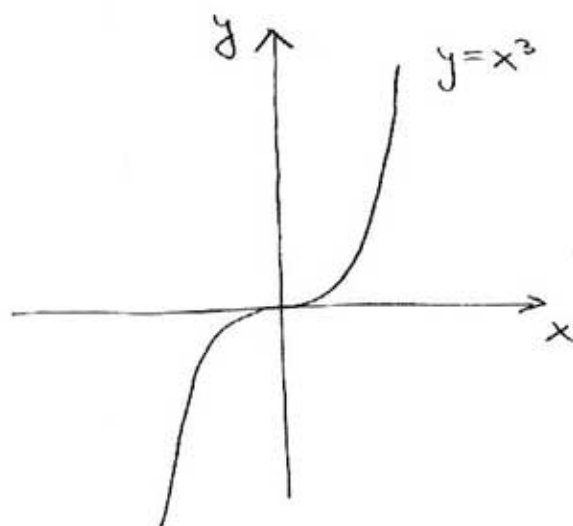
*Rješenje:*

- (a) Graf je očito simetričan s obzirom na os  $y$  (vidi sliku) pa zaključujemo da je funkcija parna.



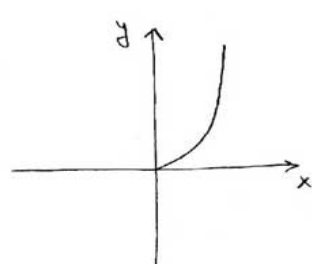
Slika 8

(b) Graf funkcije  $f(x) = x^3$  :

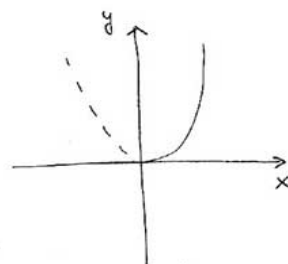


Slika 9

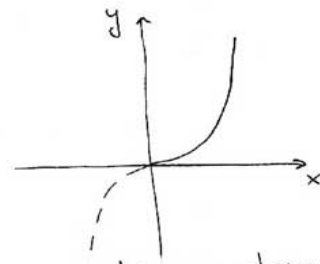
Iz slike je jasno da dio grafa za  $x < 0$  možemo dobiti tako da graf za  $x \geq 0$  preslikamo oko osi  $y$  pa zatim oko osi  $x$ . Stoga je to neparna funkcija.



$f(x) = x^3$  i  $x \geq 0$



simetrija s obzirom na os  $y$



simetrija s obzirom na os  $x$  gdje graf