# Matematika 1
# Skripta za seminar

Miroslav Jerković

# Sadržaj

# Poglavlje 1

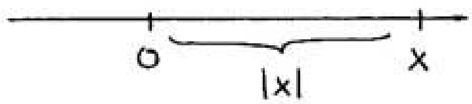
# Realni i kompleksni brojevi

## 1.1 Realni brojevi

Skup realnih brojeva sadrži racionalne brojeve (razlomke) i iracionalne brojeve. Svaki element tog skupa može se zapisati u konačnom ili beskonačnom decimalnom zapisu, npr. 3.16, 4.5678, 1.333..., 9.131313..., a možemo ga zamišljati i kao točku na brojevnom pravcu.

**Definicija.** ***Apsolutna vrijednost realnog broja*** *geometrijski se definira kao udaljenost točke koja predstavlja taj broj od ishodišta na brojevnom pravcu (vidi Sliku 1.1) ili*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ako je} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{ako je} \quad x < 0. \end{cases}$$




Slika 1.1: Apsolutna vrijednost realnog broja

**Zadatak 1.1.** *Najprije geometrijski, a potom analitički (računski) riješite nejednadžbu* $|x-1| < 2$.

*Rješenje.*

Geometrijski: uz supstituciju $t = x - 1$ nejednadžba postaje $|t| < 2$, što znači da rješenje čine svi brojevi udaljeni od nule za manje od dva. Dakle, $x - 1$ mora biti udaljen od nule za manje od dva, tj. $x$ je udaljen od 1 za manje od dva. Stoga je rješenje interval $\langle -1, 3\rangle$.

Analitički: promatramo dva slučaja

$$\begin{array}{llllll} \text{(a)} & x-1\geq 0 & \Rightarrow & |x-1|=x-1 & \Rightarrow & 1\leq x<3 \\ \text{(b)} & x-1<0 & \Rightarrow & |x-1|=1-x & \Rightarrow & -1<x\leq 1. \end{array}$$

Konačno rješenje je unija rješenja dobivenih u ova dva slučaja: $x \in \langle -1, 3\rangle$.

□

**Zadatak 1.2.** *Riješite nejednadžbu:*

$$|x+1|+|y-2|\leq 1.$$

*Rješenje.* Trebamo razmotriti četiri neovisna slučaja:

(i) $x+1\geq 0,\ y-2\geq 0$

(ii) $x+1<0,\ y-2\geq 0$

(iii) $x+1\geq 0,\ y-2<0$

(iv) $x+1<0,\ y-2<0$.

Podijelimo koordinatnu ravninu pravcima $x=-1$ i $y=2$. Pogledajmo prvi "kvadrant", tj. prvi gore navedeni slučaj: zbog $|x+1|=x+1$ i $|y-2|=y-2$ nejednadžba sada glasi

$$\begin{aligned} x+1+y-2 &\leq 1 \\ y &\leq -x+2. \end{aligned}$$

Stoga u tom području crtamo pravac $y=-x+2$ i uzimamo područje ispod njega. Analogno se rješavaju i ostala tri slučaja (vidi Sliku 1.2). □

## 1.2 Kompleksni brojevi

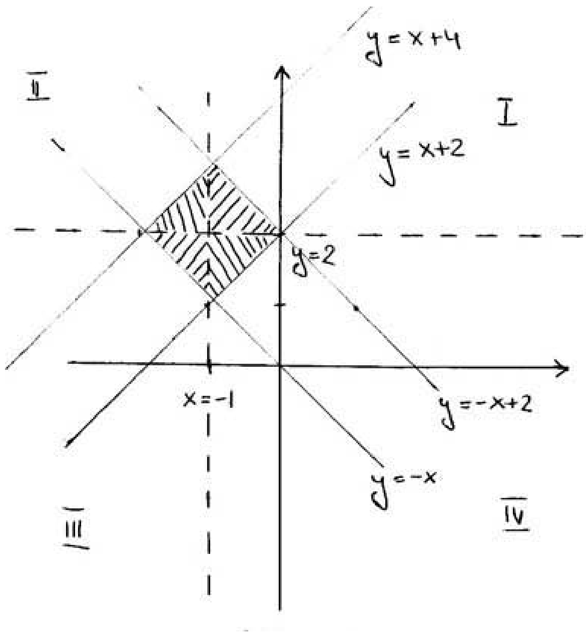
**Definicija.** ***Kompleksan broj*** *je veličina koja se može zapisati kao $z=x+yi$ gdje su $x$ i $y$ realni brojevi, a $i$ imaginarna jedinica koja ima svojstvo da vrijedi $i^2=-1$. Brojevi $x$ i $y$ se zovu* ***realni****, odnosno* ***imaginarni dio*** *broja $z$. Pišemo:*

$$x=Re(z),\quad y=Im(z).$$

*Dva kompleksna broja $z_1=x_1+y_1i$ i $z_2=x_2+y_2i$ su* ***jednaka****, tj. vrijedi $z_1=z_2$ ako i samo ako su zadovoljene jednakosti $x_1=x_2$ i $y_1=y_2$. Dalje, definiramo* ***zbrajanje*** *i* ***množenje*** *kompleksnih brojeva:*

$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= (x_1+y_1i)+(x_2+y_2i)=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i, \\ z_1\cdot z_2 &= (x_1+y_1i)\cdot(x_2+y_2i)=(x_1y_2-x_2y_1)+(x_1y_2+x_2y_1)i. \end{aligned}$$

*Ako je $z=x+yi$, kažemo da je kompleksan broj $\overline{z}=x-yi$* ***kompleksno konjugiran*** *broju $z$.*




Slika 1.2: Zadatak 1.2

**Napomena.** *Uz identifikaciju* $x = x + 0 \cdot i$, *skup realnih brojeva možemo promatrati kao podskup skupa kompleksnih brojeva.*

**Napomena.** *Kompleksno konjugiranje ima sljedeća svojstva:*

*(i)* $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

*(ii)* $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$

*(iii)* $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

*(iv)* $\overline{\overline{z}} = z$

*(v)* $z\overline{z}$ *je realan i pozitivan broj (ili nula za* $z = 0$*).*

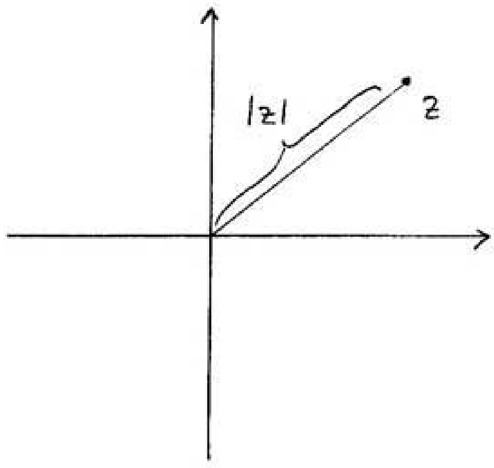
**Definicija.** ***Apsolutna vrijednost*** *ili* ***modul*** *kompleksnog broja* $z = x + yi$, *u oznaci* $|z|$, *definira se kao*

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

*U* ***kompleksnoj ravnini*** *apsolutnu vrijednost možemo predočiti kao udaljenost točke* $(x, y)$ *od ishodišta (vidi Sliku 1.3).*

**Napomena.** *Apsolutna vrijednost ima sljedeća svojstva:*

*(i)* $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$




Slika 1.3: Apsolutna vrijednost kompleksnog broja

*(ii)* $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

*(iii)* $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

**Zadatak 1.3.** *Neka je $z$ kompleksan broj takav da je $|z| = 1$. Izračunajte $|1+z|^2 + |1-z|^2$.*

*Rješenje.* Imamo:

$$\begin{aligned}
|1+z|^2 + |1-z|^2 &= (1+z)\overline{(1+z)} + (1-z)\overline{(1-z)} = \\
&= (1+z)(\overline{1}+\overline{z}) + (1-z)(\overline{1}-\overline{z}) = \\
&= (1+z)(1+\overline{z}) + (1-z)(1-\overline{z}) = \\
&= 1 + z + \overline{z} + z\overline{z} + 1 - z - \overline{z} + z\overline{z} = \\
&= 2 + 2|z|^2 = 4
\end{aligned}$$

□

**Zadatak 1.4.** *Riješite sljedeće jednadžbe, odnosno sustave jednadžbi:*

*(i)* $|z+1| = |z+i|$

*(ii)* $z^2 + iz + 2 = 0$

*(iii)* $\left|\frac{z}{z+i}\right| = 1$, $\frac{z}{i\overline{z}} = 1$

*(iv)* $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1-z|$.

*Rješenje.*

(i) Uz oznaku $z = x + yi$ imamo

$$|x + 1 + yi| = |x + (y + 1)i|.$$

Kvadriranjem slijedi:

$$(x + 1)^2 + y^2 = x^2 + (y + 1)^2$$

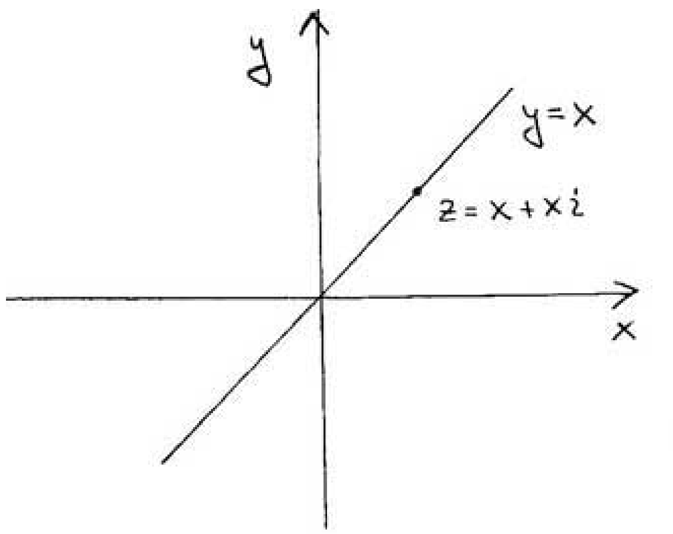
odnosno

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 + y^2 &= x^2 + y^2 + 2y + 1 \\ y &= x \end{aligned}$$

pa je skup rješenja

$$z = \{x + xi \mid x \in \mathbf{R}\}.$$

U kompleksnoj ravnini rješenje predstavlja skup svih kompleksnih brojeva $z = x + yi$ koji leže na pravcu $y = x$. (vidi Sliku 1.4).




Slika 1.4: Zadatak 1.4.1.

(ii) Uz oznaku $z = x + yi$ jednadžba postaje

$$x^2 - y^2 + 2xyi + i(x + yi) + 2 = x^2 - y^2 - y + 2 + (2xy + x)i = 0$$

pa slijedi

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - y + 2 &= 0 \\ 2xy + x &= 0. \end{aligned}$$

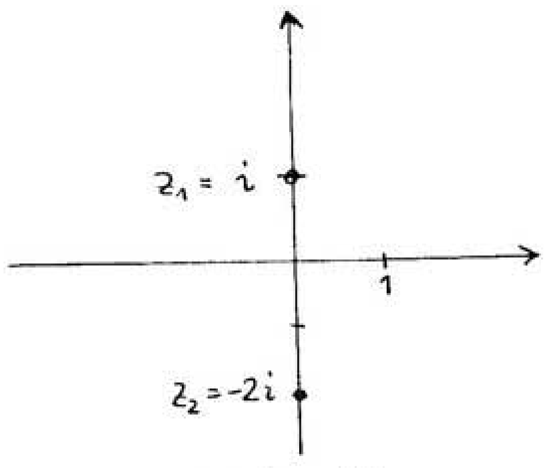
Iz druge jednadžbe dobivamo $x = 0$ ili $y = -\frac{1}{2}$. Neka $x = 0$. U tom slučaju prva jednadžba daje:

$$y^2 + y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 1,\ y_2 = -2.$$

Ako je $y = -\frac{1}{2}$, onda iz prve jednadžba dobivamo

$$x^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{9}{4}$$

što ne može biti jer je $x$ realan. Stoga su jedina rješenja $z_1 = i$ i $z_2 = -2i$ (vidi Sliku 1.5).




Slika 1.5: Zadatak 1.4.2.

(iii) Uz $z = x + yi$ imamo

$$\begin{aligned} |x + yi| &= |x + (y+1)i| \\ x + yi &= ix + y. \end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe slijedi da je $x = y$ pa prva jednadžba daje

$$\begin{aligned} 2x^2 &= x^2 + (x+1)^2 \\ 2x^2 &= x^2 + x^2 + 2x + 1 \\ 2x + 1 &= 0 \\ x &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Jedino rješenje je, dakle, $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

□

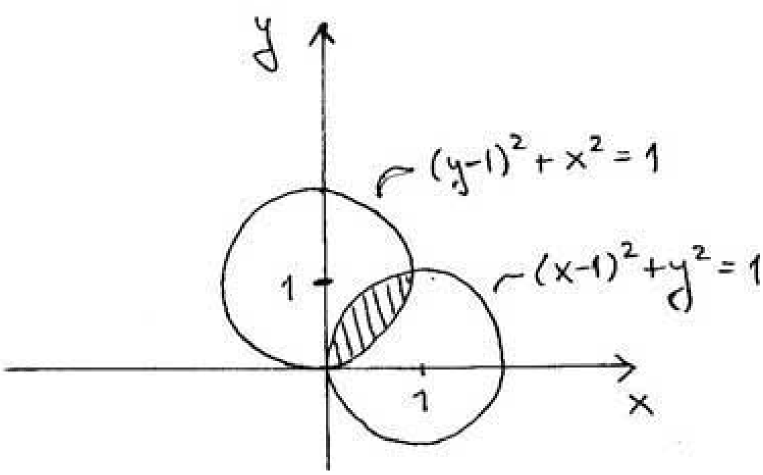
**Zadatak 1.5.** *Skicirajte u kompleksnoj ravnini brojeve koji zadovoljavaju sljedeći sustav nejednadžbi:*

$$\begin{aligned} |z-i| &\leq 1 \\ |z-1| &\leq 1. \end{aligned}$$

*Rješenje.* Uvrstimo $z = x + yi$ i kvadrirajmo gornje nejednadžbe. Dobivamo

$$\begin{aligned} x^2 + (y-1)^2 &\leq 1 \\ (x-1)^2 + y^2 &\leq 1 \end{aligned}$$

pa je rješenje presjek krugova $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$ i $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ (vidi Sliku 1.6). □




Slika 1.6: Zadatak 1.5

**Zadatak 1.6.** *Geometrijski prikažite rješenja sljedeće nejednadžbe:*

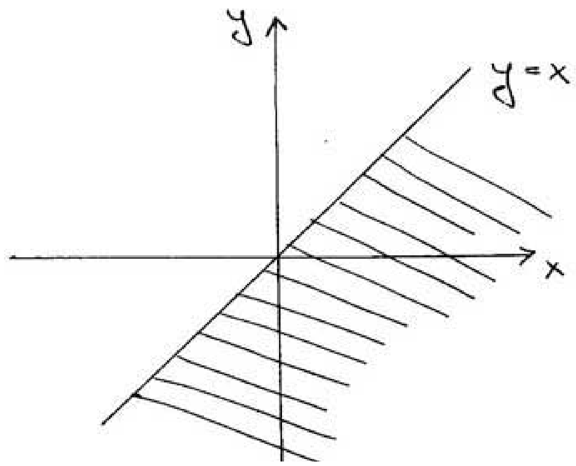
$$Re((1+i)z) \geq 0.$$

*Rješenje.* Imamo

$$(1+i)z = (1+i)(x+yi) = x + yi + xi - y = x - y + (x+y)i,$$

odakle slijedi $Re((1+i)z) = x - y \geq 0$ pa je rješenje poluravnina $y \leq x$ (vidi Sliku 1.7). □

**Zadatak 1.7.** *Predočite grafički skup kompleksnih brojeva koji zadovoljavaju sustav nejednadžbi:* $2 \leq |iz - 1| \leq 3$.




Slika 1.7: Zadatak 1.6

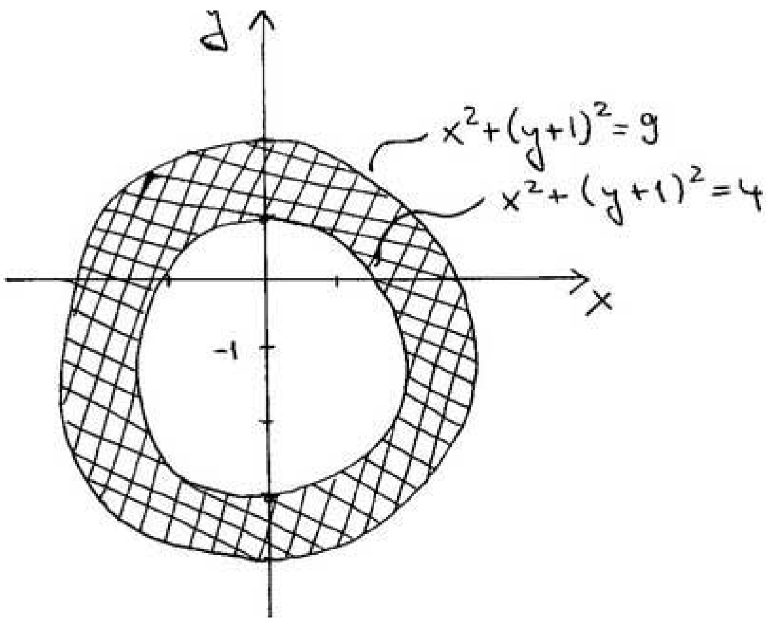
*Rješenje.* Uvrstimo $z = x + yi$

$$2 \leq |ix - y - 1| \leq 3$$

i kvadriramo

$$4 \leq (y+1)^2 + x^2 \leq 9.$$

Riječ je o kružnom vijencu omeđenom kružnicama $x^2+(y+1)^2 = 4$ i $x^2+(y+1)^2 = 9$ (vidi Sliku 1.8). $\square$




Slika 1.8: Zadatak 1.7

**Zadatak 1.8.** *Predočite grafički sljedeće skupove kompleksnih brojeva:*

*(i)* $\left|\frac{z+1+i}{z-1-i}\right| = 1$

*(ii)* $\left|\frac{z-2}{z+1-i}\right| \geq 1$

*(iii)* $\left|\frac{z+2-i}{z+i}\right| \leq 1.$

*Rješenje.*

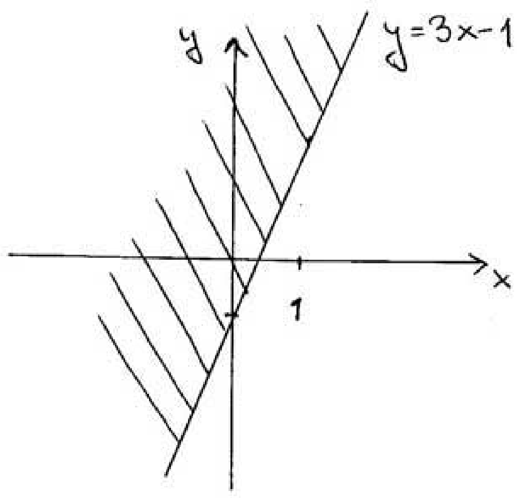
(ii) Množenjem nejednadžbe s nazivnikom lijeve strane imamo

$$|z-2| \geq |z+1-i|.$$

Uvrštavanjem $z = x + yi$ i kvadriranjem slijedi:

$$\begin{aligned}
(x-2)^2 + y^2 &\geq (x+1)^2 + (y-1)^2 \\
x^2 - 4x + 4 + y^2 - x^2 - 2x - 1 - y^2 + 2y - 1 &\geq 0 \\
-6x + 2y + 2 &\geq 0 \\
y &\geq 3x - 1.
\end{aligned}$$

Rješenje je dano područjem iznad pravca $y = 3x - 1$ (vidi Sliku 1.9).




Slika 1.9: Zadatak 1.8.2.

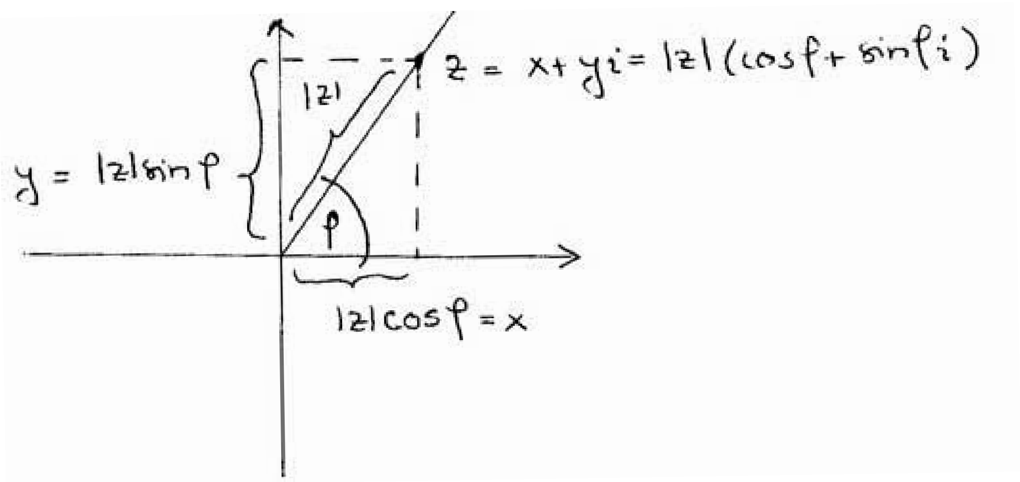
□

## 1.3 Trigonometrijski zapis kompleksnog broja

**Definicija.** *Za proizvoljan kompleksan broj $z = x + yi$ (različit od nule) je apsolutna vrijednost broja $\frac{z}{|z|}$ jednaka jedan. Slijedi da postoji kut $\varphi$ takav da vrijedi*

$$\frac{z}{|z|} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad \rightarrow \quad z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

*Ovaj zapis kompleksnog broja zovemo* ***polarni*** *ili* ***trigonometrijski zapis*** *broja $z$, a $(|z|, \varphi)$ zovemo* ***polarnim koordinatama*** *kompleksnog broja. Pri tome je $\varphi$* ***argument****, $arg(z)$, a $|z|$* ***modul*** *broja $z$ (vidi Sliku 1.10).*




Slika 1.10: Trigonometrijski zapis kompleksnog broja

**Napomena.** *Dva kompleksna broja u trigonometrijskom zapisu $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ i $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ su jednaka ako i samo ako vrijedi*

$$\begin{aligned} |z_1| &= |z_2| \\ \varphi_1 &= \varphi_2 + 2k\pi \quad \textit{za neki} \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

**Teorem.** *Vrijede sljedeće formule za* ***množenje i dijeljenje*** *dva kompleksna broja u trigonometrijskom zapisu:*

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned}$$

**Napomena.** *Vidimo da je trigonometrijski zapis kompleksnog broja posebno pogodan za množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva, jer se ono svodi na množenje (dijeljenje) modula, koji su realni brojevi, i zbrajanje (oduzimanje) argumenata.*

**Primjer 1.9.** *Računamo umnožak i kvocijent sljedeća dva kompleksna broja:* $z_1 = 4(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$ *i* $z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$*:*

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= 4\cdot 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right) = \\
&= 8\left(\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}\right) = 8\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -8i \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{4}{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right).
\end{aligned}$$

Pri računanju trigonometrijskog zapisa zadanog kompleksnog broja $z = x + yi$ najprije računamo modul po formuli $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, a potom nalazimo argument $\varphi$ iz sustava jednadžbi $\cos\varphi = \frac{x}{|z|}$, $\sin\varphi = \frac{y}{|z|}$. Drugi način za računanje argumenta $\varphi$ je da koristimo tangens: $\tan\varphi = \frac{y}{x}$.

**Zadatak 1.10.** *Nađite trigonometrijski prikaz sljedećih kompleksnih brojeva:*

*(i)* $z = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$

*(ii)* $z = -2 + 2\sqrt{3}i$

*(iii)* $z = -\sqrt{3} - i.$

*Rješenje.*

(i) Računamo modul i argument zadanog kompleksnog broja:

$$|z| = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (-3\sqrt{2})^2} = 6,$$

odakle slijedi $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ pa je $\varphi = \frac{7\pi}{4}$ i trigonometrijski zapis glasi:

$$z = 6\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

(iii) Modul $|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = 2$ pa je $\cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi = -\frac{1}{2}$ i $\varphi = \frac{7\pi}{6}$. Trigonometrijski zapis broje $z$ je dan s

$$z = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right).$$

□

Formula za množenje pokazuje i to kako se kvadrira odnosno općenito potencira kompleksan broj u trigonometrijskom zapisu: ako u formulu za množenje uvrstimo $z_1 = z_2 = z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, imamo

$$\begin{aligned} z^2 &= |z|^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) \\ z^n &= |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \end{aligned}$$

za proizvoljan prirodan broj $n$.

**Zadatak 1.11.** *Izračunajte:*

*(i)* $(1-i)^{15}$

*(ii)* $(1+i\sqrt{3})^7$.

*Rješenje.*

(i) Najprije broj $|z| = 1 - i$ zapisujemo u trigonometrijskom obliku. Računamo $|z| = \sqrt{2}$ pa je $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\sin\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, odakle slijedi $\varphi = \frac{7\pi}{4}$ i konačno

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Sada imamo

$$z^{15} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right)^{15} = \sqrt{2}^{15}\left(\cos\frac{15\cdot 7\pi}{4} + i\sin\frac{15\cdot 7\pi}{4}\right).$$

Primijetimo da je $15\cdot 7 = 105 = 26\cdot 4 + 1$ (koristimo svojstvo periodičnosti trigonometrijskih funkcija) pa je

$$z^{15} = \sqrt{2}^{15}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}^{15}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2^7 + 2^7 i.$$

(ii) Slično, računamo najprije modul: $|z| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2$ te $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ i $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pa je $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Stoga je

$$z^7 = 2^7\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^7 = 2^7\left(\cos\frac{7\pi}{3} + i\sin\frac{7\pi}{3}\right).$$

Ovdje imamo $7 = 2\cdot 3 + 1$ pa zbog periodičnosti možemo pisati

$$z^7 = 2^7\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2^7\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^6(1 + \sqrt{3}i).$$

□

# Poglavlje 2

# Dvodimenzionalni, trodimenzionalni i $n$-dimenzionalni realni vektorski prostor

## 2.1 Vektori

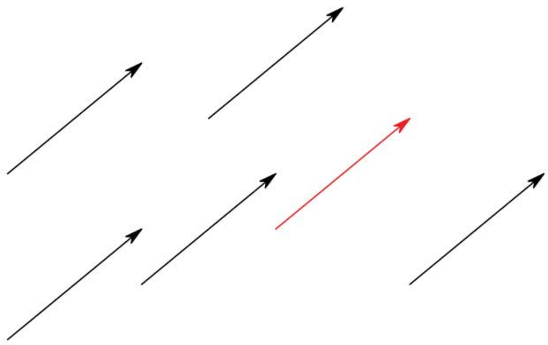
**Definicija.** *Dužinu* $\overline{AB}$ *zovemo* ***usmjerena dužina*** *ako ima uređene rubne točke, tj. zna se koja je početna, a koja krajnja točka. Ako je* $A$ *početna, a* $B$ *krajnja točka, usmjerenu dužinu označavamo s* $\overrightarrow{AB}$. *Dvije usmjerene dužine* $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{CD}$ *su* ***ekvivalentne*** *ako dužine* $\overline{AD}$ *i* $\overline{BC}$ *imaju zajedničko polovište.* ***Vektor*** *je skup svih međusobno ekvivalentnih usmjerenih dužina, a označavamo ga obično nekim od sljedećih slova:* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$.

**Napomena.** *Kada govorimo o nekom vektoru, zamišljamo* ***samo jednog predstavnika****, tj. konkretnu usmjerenu dužinu. Tako na primjer u govoru usmjerenu dužinu* $\overrightarrow{AB}$ *zovemo vektorom* $\overrightarrow{AB}$ *iako pritom mislimo na* ***sve*** *usmjerene dužine koje su ekvivalentne* $\overrightarrow{AB}$. *U tom smislu ćemo pisati* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *(vidi Sliku 2.1).*

**Definicija.** *Svaki vektor je jedinstveno određen sljedećim svojstvima:*

*(i)* ***Duljina*** *ili* ***modul*** *vektora* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *definira se kao duljina dužine* $\overline{AB}$. *Pišemo:* $|\vec{a}|$. *Vektor jedinične duljine zovemo* ***jedinični vektor****. Vektor duljine nula zovemo* ***nul-vektor*** *i označavamo s* $\vec{0}$, *a zamišljamo ga kao usmjerenu dužinu* $\overrightarrow{AA}$ *koja ima početak i kraj u istoj točki.*

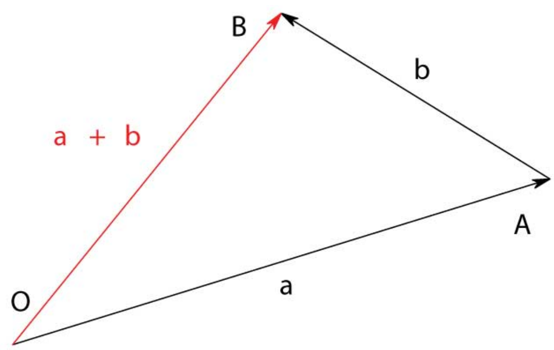
*(ii)* ***Smjer*** *vektora je skup svih međusobno paralelnih pravaca: za vektore čiji predstavnici leže na istom ili na paralelnim pravcima kažemo da su istog* ***smjera*** *ili da su* ***kolinearni****.*



Slika 2.1: Izabrani predstavnik zadane klase vektora

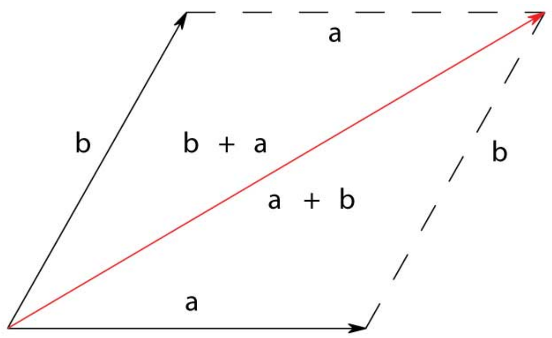
*(iii)* ***Usmjerenje*** *ili* ***orijentacija****: za svaka dva kolinearna vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *možemo pronaći predstavnike* $\overrightarrow{OA}$ *i* $\overrightarrow{OB}$*, gdje je* $O$ *fiksna točka prostora. Ako se točke* $A$ *i* $B$ *nalaze s iste strane točke* $O$*, kažemo da su ti vektori* ***istog usmjerenja****. Ako to nije slučaj, kažemo da su vektori* ***suprotnog usmjerenja****.*
***Suprotan vektor*** *zadanog vektora* $\vec{a}$ *je takav vektor* $-\vec{a}$ *koji ima istu duljinu i smjer kao i* $\vec{a}$*, ali suprotno usmjerenje.*

**Definicija.** ***Zbroj vektora*** $\vec{a}+\vec{b}$ *je vektor koji se dobije na sljedeći način: odaberimo proizvoljnu fiksnu točku* $O$ *i nađimo točke* $A$ *i* $B$ *takve da je* $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ *i* $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$*. Vektor* $\overrightarrow{OB}$ *zovemo zbrojem vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$*. Dakle, zbroj vektora definira se kao vektor koji ima početak u početnoj točki prvog vektora, a kraj u krajnjoj točki drugog vektora u zbroju (vidi Sliku 2.2). Ovu definiciju zovemo* ***pravilo trokuta****. Zapisano simbolički, zbrajanje glasi:* $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$.




Slika 2.2: Pravilo trokuta za zbrajanje vektora

**Napomena.** *Važno svojstvo zbrajanja vektora je* ***komutativnost****, slikovno izraženo* ***pravilom paralelograma*** *(vidi Sliku 2.3): Ako vektoru* $\vec{a}$ *po pravilu trokuta do-*




Slika 2.3: Pravilo paralelograma za zbrajanje vektora

*damo vektor $\vec{b}$, dobijemo dijagonalu $\vec{a}+\vec{b}$ zamišljenog paralelograma određenog vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. No, u tom paralelogramu možemo poći i od vektora $\vec{b}$, kojem po pravilu trokuta dodajemo $\vec{a}$, čime dolazimo do iste dijagonale, ali ona ovog puta čini vektor $\vec{b}+\vec{a}$, što očito dokazuje komutativnost zbrajanja vektora.*
*Pravilo paralelograma se pomoću svojstva asocijativnosti zbrajanja može proširiti do* ***pravila mnogokuta*** *za zbrajanje vektora.*

**Definicija.** *Za skalar $\lambda$ i vektor $\vec{a}$ definiramo* ***umnožak vektora i skalara*** $\lambda \cdot \vec{a}$ *kao nul-vektor ako je $\vec{a}=\vec{0}$ ili $\lambda = 0$, a inače kao vektor sa sljedećim svojstvima:*

*(i)* *duljina:* $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

*(ii)* *smjer: jednak smjeru vektora $\vec{a}$*

*(iii)* *usmjerenje: ako je $\lambda < 0$, usmjerenje je suprotno usmjerenju vektora $\vec{a}$, a ako je $\lambda > 0$, usmjerenje je jednako usmjerenju vektora $\vec{a}$.*

**Definicija.** ***Linearna kombinacija*** *vektora $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ i skalara $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ je vektor $\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_n\overrightarrow{a_n}$. Skalare $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ zovemo* ***koeficijenti*** *linearne kombinacije.*
*Vektori $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ su* ***linearno zavisni*** *ako postoje skalari $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_n$ (koji nisu svi nula!) takvi da je $\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_n\overrightarrow{a_n} = \vec{0}$. Ako takvi skalari ne postoje, tj. ako $\lambda_1\overrightarrow{a_1} + \lambda_2\overrightarrow{a_2} + \ldots + \lambda_n\overrightarrow{a_n} = \vec{0}$ nužno povlači $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, kažemo da su vektori $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$* ***linearno nezavisni****.*

**Napomena.** *Dva kolinearna vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su linearno zavisni, tj. postoji skalar $\lambda$ tako da vrijedi $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.*

Čest je i bitan problem zadani vektor $\vec{a}$ napisati kao linearnu kombinaciju zadanih linearno nezavisnih vektora.

**Zadatak 2.1.** *Neka je $ABCD$ paralelogram i neka je $E$ sjecište dijagonala, $F$ polovište stranice $\overline{BC}$, a $G$ polovište stranice $\overline{CD}$. Izračunajte vektore $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{FG}$ i $\overrightarrow{FD}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$.*

*Rješenje.*

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{BF} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} = 0 \cdot \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{EF} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CG} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{DC} = -\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

□

**Zadatak 2.2.** *Neka je dana dužina $\overline{AB}$ i točka $C$ na pravcu kroz $A$ i $B$ te proizvoljna točka $O$. Izrazite $\overrightarrow{OC}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ ako je $|\overline{AC}| = 2|\overline{BC}|$ i:*

*(i)* $C \in \overline{AB}$

*(ii)* $C \notin \overline{AB}$.

*Rješenje.* Uputa: napišite $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$, gdje je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$. Koristeći $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB}$ iz te jednakosti izrazite $\overrightarrow{AC}$. □

**Zadatak 2.3.** *Neka je $T$ težište trokuta $ABC$, a $O$ prozvoljna točka. Izrazite vektor $\overrightarrow{OT}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$.*

*Rješenje.* Sa Slike 2.4 očito slijedi:

$$\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AO} = \vec{0}$$

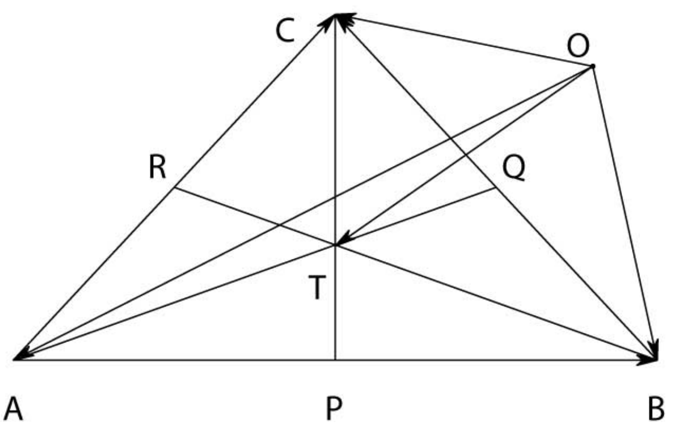
$$\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}$$

Zbrajanjem ovih jednakosti dobije se

$$3\overrightarrow{OT} + (\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC}) + (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}) = \vec{0}, \text{ tj.}$$

$$3\overrightarrow{OT} + (\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \quad (*).$$




Slika 2.4: Zadatak 2.3

Želimo pokazati da je $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{0}$. U tu svrhu računamo $\overrightarrow{TA}$, pritom koristeći činjenicu da težište dijeli težišnicu u omjeru 2 : 1 (računajući od vrha):

$$\overrightarrow{TA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{QA} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BA}) = \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}.$$

Analogno se dobiva $\overrightarrow{TB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ i $\overrightarrow{TC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Zbrajanjem ove tri jednakosti daju $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{0}$, što uvrštanjem u jednakost $(*)$ daje $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. □

**Zadatak 2.4.** *Neka su $A, B, C, D$ bilo koje četiri točke prostora. Ako su točke $K, L, M, N$ redom polovišta dužina $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, dokažite da je tada $KLMN$ paralelogram.*

*Rješenje.* Označimo $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{d} = \overrightarrow{DA}$. Očito je

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

S druge strane je

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KL} &= \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BL} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \\ \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}, \end{aligned}$$

odakle dobivamo

$$\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}) = \vec{0},$$

tj. $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$, dakle $KLMN$ jest paralelogram. □

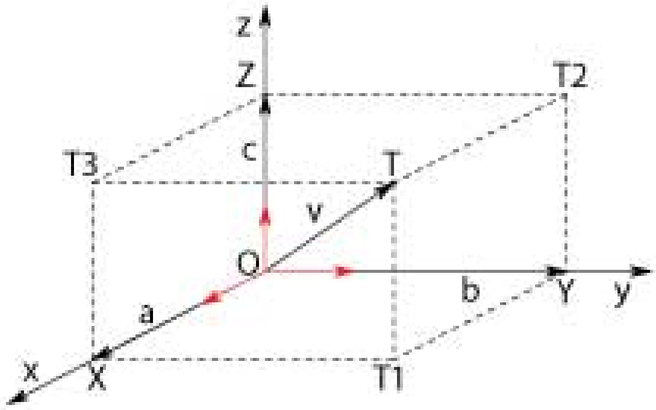
## 2.2 Analitički zapis vektora

**Definicija.** *Neka je u prostoru zadan pravokutni koordinatni sustav. Na koordinatnim osima $x$, $y$ i $z$ uočimo jedinične vektore $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ s početkom u ishodištu, a krajevima u točkama $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$, redom. Ova tri vektora zovemo* ***koordinatnim vektorima u prostoru*** *(vidi Sliku 2.5).*
*Vektor $\vec{v}$ s početkom u ishodištu, a krajem u točki $T=(a,b,c)$, može se na jedinstven način zapisati kao linearna kombinacija koordinatnih vektora. Uz oznake kao na Slici 2.5 imamo*

$$\vec{v} = \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT_1} + \overrightarrow{T_1T} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OZ} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$

*Ovaj zapis vektora zovemo* ***koordinatni*** *ili* ***analitički zapis vektora****. Drugi mogući oblik analitičkog zapisa vektora je pomoću stupčane matrice (vidi Poglavlje 4):*

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$




Slika 2.5: Koordinatizacija vektora u prostoru

**Napomena.** *Osim gornje formule, postoji i formula za vektor $\overrightarrow{T_1T_2}$ zadan početnom točkom $T_1(a_1,b_1,c_1)$ i završnom točkom $T_2(a_2,b_2,c_2)$:*

$$\overrightarrow{T_1T_2} = \overrightarrow{T_1O} + \overrightarrow{OT_2} = \overrightarrow{OT_2} - \overrightarrow{OT_1} = (a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}) - (a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}),$$

*odnosno*

$$\overrightarrow{T_1T_2} = (a_2 - a_1)\vec{i} + (b_2 - b_1)\vec{j} + (c_2 - c_1)\vec{k}.$$

*Zapisana pomoću matrica ova formula glasi:*

$$\overrightarrow{T_1T_2} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 - a_1 \\ b_2 - b_1 \\ c_2 - c_1 \end{bmatrix}.$$

**Napomena.** *Postupak koordinatizacije vektora na analogan se način može provesti i za ravninske vektora ili pak vektore u višedimenzionalnom prostoru.*

**Teorem.** *Za dane vektore* $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ *i* $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ *te skalar* $\lambda$ *vrijede sljedeće formule:*

***Jednakost vektora***

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$$

***Zbroj vektora***

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} + (a_3 + b_3)\vec{k}$$

***Umnožak vektora i skalara***

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_1\vec{i} + \lambda a_2\vec{j} + \lambda a_3\vec{k}$$

***Modul vektora***

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

***Kriterij kolinearnosti***

$$\vec{a}, \vec{b} \quad \textit{kolinearni} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = \lambda\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

**Primjer 2.5.** *Za zadane vektore* $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ *i* $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ *imamo*

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= (2-1)\vec{i} + (-1+2)\vec{j} + (3-5)\vec{k} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} \\ |a| &= \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14} \\ -2\vec{a} &= -2(2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) = -4\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}. \end{aligned}$$

**Zadatak 2.6.** *Zadane su točke* $A(3, 1, 4)$, $B(2, 5, 1)$. *Odredite sve vrijednosti za koordinatu* $\gamma$ *točke* $C(3, 2, \gamma)$ *tako da* $\overrightarrow{AB}$ *i* $\overrightarrow{AC}$ *budu jednakih duljina.*

*Rješenje.* Računamo najprije tražene vektore:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (2-3)\vec{i}+(5-1)\vec{j}+(1-4)\vec{k} = -\vec{i}+4\vec{j}-3\vec{k}\\ \overrightarrow{AC} &= (3-3)\vec{i}+(2-1)\vec{j}+(\gamma-4)\vec{k} = \vec{j}+(\gamma-4)\vec{k},\end{aligned}$$

što uvrštavanjem u $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ i kvadriranjem daje

$$\begin{aligned}\sqrt{(-1)^2+4^2+(-3)^2} &= \sqrt{1^2+(\gamma-4)^2}\\ 26 &= 1+(\gamma-4)^2,\end{aligned}$$

odakle slijedi da zadatak ima dva rješenja $\gamma_1 = -1$ i $\gamma_2 = 9$. □

**Zadatak 2.7.** *Zadana su tri vrha paralelograma $ABCD$: $A(-2,-1,1)$, $B(4,-2,2)$ i $C(6,1,3)$. Odredite koordinate točke $D$.*

*Rješenje.* U paralelogramu vrijedi jednakost vektora $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. Ako označimo $D = (x,y,z)$, imamo

$$\begin{aligned}(6-x)\vec{i}+(1-y)\vec{j}+(3-z)\vec{k} &= (4+2)\vec{i}+(-2+1)\vec{j}+(2-1)\vec{k}\\ (6-x)\vec{i}+(1-y)\vec{j}+(3-z)\vec{k} &= 6\vec{i}-\vec{j}+\vec{k},\end{aligned}$$

odakle (iz jednakosti vektora s lijeve i s desne strane jednakosti) odmah slijedi rješenje: $D = (0,2,2)$.
Zadatak se može riješiti i u matričnom zapisu - iz jednakosti $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ slijedi

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}6\\1\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}4\\-2\\2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-2\\-1\\1\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}6\\1\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}6\\-1\\1\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}6\\1\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}6\\-1\\1\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix},\end{aligned}$$

odakle očitavamo da je $D(0,2,2)$. □

**Zadatak 2.8.** *Napišite završnu točku vektora $\vec{a} = 2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$, ako je početna točka tog vektora dana s $(1,2,-2)$.*

*Rješenje.* Označimo koordinate završne točke vektora $\vec{a}$ s $(x, y, z)$ i koristimo formulu za vektor zadan koordinatama početne i završne točke:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \vec{a}$$

pa dobivamo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix},$$

tj. završna točka vektora $\vec{a}$ glasi $(3, 5, -6)$. □

**Zadatak 2.9.** *Napišite završnu točku vektora kojem je početna točka* $(1, 1, 1)$*, a dva puta je dulji od vektora s početnom točkom* $(-1, 2, 3)$ *i završnom točkom* $(0, 1, -2)$*.*

*Rješenje.* Označimo prvi vektor s $\vec{a}$, drugi vektor s $\vec{b}$, a početnu točku vektora $\vec{a}$ s $(x, y, z)$. Iz $\vec{a} = 2\vec{b}$ slijedi

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} &= 2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) \\
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} &= 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -10 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -9 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

tj. završna točka vektora $\vec{a}$ glasi $(3, -1, -9)$. □

**Zadatak 2.10.** *Nađite točku* $B$ *usmjerene dužine* $\overrightarrow{AB}$ *takve da je* $A(1, 2, 3)$*, a* $P(2, 3, 7)$ *je polovište dužine* $\overline{AB}$*.*

*Rješenje.* Kako je $P$ polovište dužine $\overline{AB}$, to je $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AP}$. Ako označimo $B(x, y, z)$, mora vrijediti

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix},$$

odakle je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 11 \end{bmatrix},$$

dakle završna točka glasi $B(3,4,11)$. □

**Napomena.** *Prethodni zadatak nam daje ideju da izvedemo formulu za koordinate polovišta $P$ dužine $\overline{T_1T_2}$ dane s $T_1(x_1,y_1,z_1)$, $T_2(x_2,y_2,z_2)$. Označimo najprije $P(x,y,z)$. Iz jednakosti vektora $\overrightarrow{T_1P} = \frac{1}{2}\overrightarrow{T_1T_2}$ slijedi*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}\right) \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

*Vidimo da je **polovište dužine** $\overline{T_1T_2}$ dane s $T_1(x_1,y_1,z_1)$, $T_2(x_1,y_2,z_2)$ dano s*

$$P\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

*Slično se može izvesti formula za **težišta trokuta** $T_1T_2T_3$ zadanog s $T_1(x_1,y_1,z_1)$, $T_2(x_2,y_2,z_2)$, $T_3(x_3,y_3,z_3)$:*

$$T\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right).$$

**Zadatak 2.11.**

*(i) Provjerite koja dva od vektora $\vec{a} = 2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c} = -4\vec{i}+2\vec{j}-6\vec{k}$ su kolinearni.*

*(ii) Nađite realne brojeve $x$ i $y$ tako da vektori $\vec{a} = -\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ i $\vec{b} = 3\vec{i}+x\vec{j}+y\vec{k}$ budu kolinearni.*

*Rješenje.*

(i) Po kriteriju kolinearnosti dobivamo da za $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vrijedi

$$\frac{2}{3} \neq \frac{-1}{2} \neq \frac{3}{-1},$$

što znači da $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni. Također, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ nisu kolinearni. No, za $\vec{a}$ i $\vec{c}$ imamo

$$\frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{3}{-6}$$

pa su vektori $\vec{a}$ i $\vec{c}$ kolinearni.

(ii) Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni ako i samo ako vrijedi

$$\frac{-1}{3} = \frac{2}{x} = \frac{-1}{y},$$

što je sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice čijim se rješavanjem dobiva $x = -6$ i $y = 3$.

□

**Zadatak 2.12.** *Prikažite vektor $\vec{c} = -4\vec{j} - 3\vec{k}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$ i $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.*

*Rješenje.* Zapisati $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ znači naći koeficijente $\alpha$ i $\beta$ tako da vrijedi

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b},$$

tj.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} &= \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3\alpha + \beta \\ -\alpha + \beta \\ \beta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dobivamo sustav od tri jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} 3\alpha + \beta &= 0 \\ -\alpha + \beta &= -4 \\ \beta &= -3. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem $\beta = -3$ u prvu jednadžbu dobivamo da je $3\alpha = 3$, tj. $\alpha = 1$. Uvrštavanjem $\beta = -3$ i $\alpha = 1$ u drugu jednadžbu uvjeravamo se da rješenje zadovoljava sve tri jednadžbe. Dakle, dobili smo sljedeći zapis $\vec{c}$ kao linearne kombinacije vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$: $\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}$. □

**Napomena.** *Primijetimo da u prethodnom zadatku rješenje koje smo dobili iz prve i treće jednadžbe nije moralo zadovoljavati i drugu jednadžbu. Da se to dogodilo zaključili bismo da $\vec{c}$ nije moguće zapisati kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. To općenito i jest tako: da bismo zapisali općeniti vektor prostora kao linearnu kombinaciju vektora, potrebna su nam najmanje* ***tri*** *vektora (zato i imamo tri koordinatna vektora $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$).*

**Zadatak 2.13.** *Prikažite vektor* $\vec{d} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ *pomoću vektora* $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$*,* $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ *i* $\vec{c} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$*.*

*Rješenje.* Tražimo koeficijente $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ tako da vrijedi

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Imamo sada

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} &= \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2\alpha + 2\beta + 4\gamma \\ -3\alpha + 4\beta + 2\gamma \\ \alpha + 3\beta + 4\gamma \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Dobivamo sljedeći sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice:

$$\begin{aligned}
2\alpha + 2\beta + 4\gamma &= 2 \\
-3\alpha + 4\beta + 2\gamma &= 3 \\
\alpha + 3\beta + 4\gamma &= 3.
\end{aligned}$$

Jedinstveno rješenje je dano s $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = -1$, tako da je $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$. $\square$

# Poglavlje 3

# Zapis nekih transformacija ravnine i prostora - pojam matrice i linearnog operatora

## 3.1 Translacija

**Definicija.** ***Translaciju*** *trodimenzionalnog prostora zadajemo* ***vektorom translacije*** $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. *Vektor translacije svaku točka prostora* $T(x, y, z)$ *translatira u novu točku* $T'(x', y', z')$, *koju zovemo i slika točke* $T$ *pri zadanoj translaciji (ili, općenito, zadanoj transformaciji). Koordinate točke* $T'$ *računamo iz jednakosti* $\overrightarrow{TT'} = \vec{v}$:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \end{bmatrix}.$$

**Napomena.** *Translaciju možemo promatrati i u ravnini ili višedimenzionalnom prostoru, uz odgovarajuću formulu analognu gornjoj.*

**Zadatak 3.1.** *Nađite točku dobivenu translacijom točke* $T(-1, 0, 5)$ *za vektor* $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

*Rješenje.* Označimo traženu točku s $T'(x', y', z')$. Prema formuli za translaciju imamo

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

pa koordinate točke $T'$ glase $(2, 2, 4)$. □

**Zadatak 3.2.** *Nađite vektor translacije koji prevodi točku* $(2, 1, 3)$ *u točku* $(1, 1, 2)$.

*Rješenje.* Označimo traženi vektor s $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. Koristeći gornju formulu imamo

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

pa slijedi

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Vektor translacije glasi $\vec{v} = -\vec{i} - \vec{k}$. □

## 3.2 Rotacija

Promatrat ćemo rotacije u ravnini oko ishodišta za zadani kut rotacije te u prostoru oko neke istaknute koordinatne osi, također za zadani kut rotacije. Za razliku od translacije, za zadavanje rotacija ne koristimo vektor već matrice, dok za nalaženje slike točke pri zadanoj rotaciji trebamo poznavati osnove množenja matrica. Više o matricama i njihovom množenju možete pronaći u Poglavlju 4, a ovdje spominjemo samo ono što je nužno.

**Definicija.** ***Rotacija ravnine*** *oko ishodišta za kut $\alpha$ (u pozitivnom smjeru - smjeru suprotnom kretanju kazaljke sata) zadana je* ***matricom rotacije***

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

*Ukoliko želimo pronaći točku $T'(x', y')$ dobivenu rotacijom točke $T(x, y)$ oko ishodišta za kut $\alpha$, koristimo sljedeću formulu:*

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{bmatrix}.$$

**Primjer 3.3.** *Za neke specijalne kuteve imamo i specijalne transformacije ravnine, npr. za kut $\alpha = 0°$ dobivamo*

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 0° & -\sin 0° \\ \sin 0° & \cos 0° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Ovu matricu nazivamo jediničnom matricom (reda dva) zbog svojstva da ne mijenja stupčani vektor, što odgovara činjenici da je slika točke pri rotaciji za kut $\alpha = 0°$ opet ona sama:*

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot x + 0\cdot y \\ 0\cdot x + 1\cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

*S druge strane, za $\alpha = 180^\circ$ imamo*

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

*što znači da za sliku $T'(x', y')$ točke $T(x, y)$ imamo*

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)\cdot x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + (-1) \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}.$$

*Vidimo da je $T'$ zrcalno simetrična točki $T$ obzirom na ishodište, što odgovara činjenici da je rotacija za $\alpha = 180^\circ$ isto što i simetrija obzirom na ishodište. Provjerite da je gornja matrica rotacija jednaka matrici spomenute simetrije (vidi sljedeći odlomak).*

**Zadatak 3.4.** *Zapišite matrice rotacija u ravnini oko ishodišta za sljedeće kuteve:*

*(i)* $\alpha = 45^\circ$

*(ii)* $\alpha = 150^\circ$

*(iii)* $\alpha = 300^\circ$.

*Izračunajte sliku točke $T(-2, 4)$ pri ovim rotacijama. Prikažite grafički!*

*Rješenje.*

(iii) Koristimo formulu za matricu rotacije:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 300^\circ & -\sin 300^\circ \\ \sin 300^\circ & \cos 300^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Dalje, računamo sliku $T'$ točke $T$:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot (-2) + \frac{1}{2} \cdot 4 \\ (-\frac{1}{2}) \cdot (-2) + (-\frac{\sqrt{3}}{2}) \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} + 2 \\ 1 - 2\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Dakle, rješenje je $T'(\sqrt{3} + 2, 1 - 2\sqrt{3})$.
Grafički prikaz: Obzirom da je $\sqrt{3} \approx 1.7$, imamo $T' \approx (3.7, -2.4)$. Crtanjem točaka $T$ i $T'$ u istom koordinatnom sustavu uvjerite se da je kut s vrhom u ishodištu i krakovima kroz $T$ i $T'$ jednak upravo $\alpha = 300^\circ$.

□

**Zadatak 3.5.** *Dokažite računski i geometrijski da rotacija oko ishodišta za pravi kut točku $T(x, y)$ preslikava u točku $T'(-y, x)$.*

**Zadatak 3.6.** *Za koji kut treba rotirati točku* $(2,2)$ *da bismo dobili točku* $(-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3})$*? Napišite matricu te rotacije!*

*Rješenje.* Treba vrijediti:

$$\begin{bmatrix} -1-\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos\alpha - 2\sin\alpha \\ 2\sin\alpha + 2\cos\alpha \end{bmatrix},$$

odakle dolazimo do sustava jednadžbi:

$$\begin{aligned} 2\cos\alpha - 2\sin\alpha &= -1-\sqrt{3} \\ 2\sin\alpha + 2\cos\alpha &= -1+\sqrt{3} \end{aligned}$$

čije rješenje glasi $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, odakle vidimo da je $\alpha = 120°$. □

**Definicija.** *U trodimenzionalnom prostoru također promatramo rotaciju za zadni kut* $\alpha$*, ali ta* ***rotacija prostora*** *ne može biti oko ishodišta (jer ne bi bila dobro zadana), već oko nekog istaknutog pravca, najčešće neke od koordinatnih osi. Matrice rotacije za kut* $\alpha$ *oko* $x$*,* $y$ *i* $z$*-osi, redom, glase ovako:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.7.** *Napišite matricu prostorne rotacije oko* $y-$*osi za kut* $\alpha = 240°$ *te nađite sliku točke* $T(0,3,-2)$ *obzirom na tu transformaciju.*

*Rješenje.* Koristimo srednju matricu iz gornje definicije i dolazimo do sljedeće matrice rotacije:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 240° & 0 & -\sin 240° \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin 240° & 0 & \cos 240° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

što daje sljedeću sliku $T'(x', y', z')$ točke $T$:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

□

## 3.3 Simetrija i projekcija

**Definicija.** ***Simetrije*** *promatramo u ravnini i prostoru. Slično kao i kod rotacija, navodimo pripadne matrice simetrija:*

***Simetrije ravnine***

*(i) Centralna simetrija ravnine obzirom na ishodište:*

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

*(ii) Dvije osne simetrije obzirom na koordinatne osi $x$ i $y$:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

***Simetrije prostora***

*(i) Centralna simetrija prostora obzirom na ishodište:*

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

*(ii) Tri osne simetrije obzirom na koordinatne osi $x$, $y$ i $z$:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*(iii) Tri simetrije obzirom na koordinatne ravnine $xy$, $xz$ i $yz$:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Napomena.** *Primijetite da se u matričnom zapisu simetrija na dijagonali matrice nalaze brojke $1$ ili $-1$, ovisno o tome o kojoj se simetriji radi, dok su nedijagonalni elementi tih matrica jednaki nuli. Matrice je najlakše zapamtiti tako da zamislimo kako prvi element dijagonale matrice "pripada" $x$-koordinati, drugi $y$-koordinati (te treći $z-$koordinati ukoliko se radi o simetriji trodimenzionalnog prostora). Pritom su oni dijagonalni elementi koji odgovaraju koordinati (ili koordinatama) objekta obzirom na kojeg se izvodi simetrija jednaki $1$, dok su preostali elementi jednaki $-1$. Brojka $1$ na dijagonali sugerira da se odgovarajuća koordinata točke pri simetriji neće promijeniti, dok $-1$ govori da će se odgovarajuća koordinata promijeniti u suprotnu.*

**Definicija.** *Za svaku od gore navedenih simetrija možemo promatrati i pripadne* ***projekcije****, čije pripadne matrice dobivamo tako da u odgovarajućoj matrici simetrije sve elemente koji su jednaki* $-1$ *zamijenimo nulama, dok elemente jednake* $1$ *ostavljamo nepromijenjenima.*

**Primjer 3.8.** *Matrica prostorne projekcije na koordinatnu ravninu* $xz$ *glasi:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Ova matrica sugerira da će slika* $T'$ *projekcije točke* $T(x, y, z)$ *na* $xz-$*ravninu glasiti* $T'(x, 0, z)$.

**Zadatak 3.9.** *Napišite matrice sljedećih transformacija prostora:*

*(i) simetrija obzirom na* $xz-$*ravninu*

*(ii) projekcija na* $yz-$*ravninu*

*te ih primijenite na točku* $(2, -1, 4)$.

*Rješenje.*

(i) Matrica simetrije obzirom na $xz-$ravninu glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pa je slika $T'(x', y', z')$ točke $(2, -1, 4)$ dana s

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

□

## 3.4 Matrice i linearni operatori

Matrice rotacija, simetrija i projekcija su primjeri **kvadratnih matrica**, tj. matrica s **jednakim brojem redaka i stupaca**. Općenito, svaka kvadratna matrica predstavlja neku transformaciju ravnine u ravninu ili prostora u prostor, tj. transformaciju koja ne mijenja dimenziju promatranog prostora.

**Zadatak 3.10.** *Odredite sliku točke $T(x, y)$ pri transformaciji ravnine zadane kvadratnom matricom*

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

*Rješenje.* Računamo:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3) \cdot x + 1 \cdot y \\ 5 \cdot x + (-2) \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x + y \\ 5x - 2y \end{bmatrix}$$

pa je slika točke $T$ dana s $T'(-3x + y, 5x - 2y)$. □

Osim transformacija koje čuvaju dimenziju prostora, postoje transformacije koje preslikavaju ravninu u prostor ili prostor u ravninu. Takve transformacije će i dalje biti predstavljene matricama, uz uvjet da se radi o **linearnim transformacijama**, tj. transformacijama gdje je veza među koordinatama slike i početne točke linearna. Međutim, te matrice više neće biti kvadratne. Više o vezi linearnih transformacija i matrica možete pronaći u posljednjem odlomku Poglavlja 4.

**Primjer 3.11.** *Matrica*

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

*predstavlja primjer linearne transformacije prostora u ravninu. Na primjer, slika točke prostora $T(1, -1, 4)$ bit će točka ravnine $T'(-10, 28)$:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -7 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + (-7) \cdot (-1) + 5 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 28 \end{bmatrix}.$$

**Napomena.** *Općenito, linearna preslikavanja na vektorskim prostorima zovemo **linearni operatori**. Mi se ovdje njima nećemo baviti, dovoljno je da zapamtimo da su linearni operatori predstavljeni matricama, a mi ih možemo zamišljati kao gore opisane linearne transformacije.*

# Poglavlje 4

# Algebra matrica. Inverzna matrica. Determinanta

## 4.1 Definicija matrice

**Definicija.** *Neka su $m$ i $n$ prirodni brojevi. Shema u kojoj familiju $A$ realnih brojeva $a_{ij}$ $(i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\})$ zapisujemo na sljedeći način*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

*zove se* ***matrica*** *od* ***m redaka*** *i* ***n stupaca****, tj. matrica* ***tipa m × n****. Za element $a_{ij}$ kažemo da dolazi na mjestu $(i,j)$ u matrici $A$. Matricu zapisujemo i ovako: $A = (a_{ij})$.*
*Brojevi $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ čine* ***prvi redak****, $a_{21}$, $a_{22}$, $\ldots$, $a_{2n}$* ***drugi redak****, $a_{m1}$, $a_{m2}$, $\ldots$, $a_{mn}$* ***m-ti redak*** *matrice $A$. Brojevi $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}$ čine* ***prvi stupac****, $a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}$* ***drugi stupac****, a $a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}$* ***n-ti stupac*** *matrice $A$.*
*Dvije matrice su* ***jednake*** *ako su istog tipa i odgovarajući elementi su im jednaki.*

**Definicija.** *Za matricu kažemo je* ***kvadratna matrica*** *ako ima jednako mnogo redaka i stupaca (kažemo da je* ***reda*** *$n$, gdje je $n$ broj redaka, odnosno stupaca).*
*Kvadratnu matricu $A$ zovemo* ***dijagonalnom*** *ako je oblika*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

*Elementi $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ čine* ***glavnu dijagonalu*** *matrice $A$.*
***Jedinična matrica*** *$I$ je takva dijagonalna matrica čiji su svi dijagonalni elementi*

*jednaki* 1*, a* ***nul-matrica*** $O$ *je dijagonalna matrica čiji su svi dijagonalni elementi jednaki* 0 *(možemo jednostavnije reći da su svi elementi nul-matrice jednaki nuli).*

**Primjer 4.1.** $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *je jedinična matrica reda* 3*, a* $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *nul-matrica reda* 2*.*

## 4.2 Matrične operacije

**Definicija.** ***Zbroj matrica*** *moguće je definirati samo među matricama* ***istog tipa****: za* $A = (a_{ij})$ *i* $B = (b_{ij})$ *tipa* $m \times n$ *je matrica* $C = (c_{ij})$ *tipa* $m \times n$ *s elementima* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$*, što znači da se zbrajaju elementi na istim pozicijama.*

**Primjer 4.2.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2 & 3+(-1) & 2+5 \\ -1+(-3) & 0+(-1) & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -4 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Definicija.** ***Množenje matrice*** $A = (a_{ij})$ ***skalarom*** $\lambda$ *daje matricu* $\lambda A = (\lambda a_{ij})$*, što znači da se svaki element polazne matrice množi zadanim skalarom.*

**Primjer 4.3.**

$$(-3)\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3)\cdot 2 & (-3)\cdot(-1) & (-3)\cdot 3 \\ (-3)\cdot 0 & (-3)\cdot 1 & (-3)\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 3 & -9 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 4.4.** *Izračunajte* $A + 2B$ *za sljedeće matrice (ako postoji):*

*(i)* $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

*(ii)* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$

*Rješenje.*

(i)

$$\begin{aligned} A + 2B &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 8 & -1 & 2 \\ -4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(ii) Tražena matrica ne postoji jer $A$ i $B$ nisu istog tipa.

□

**Definicija.** ***Razliku matrica*** *$A - B$ treba shvatiti kao skraćeni zapis za $A + (-1) \cdot B$, što znači da se oduzimanje provodi na analogni način kao i zbrajanje i moguće je samo među matricama istog tipa.*

**Napomena.** *Za zbrajanje matrica i množenje matrica skalarom vrijede svojstva koja vrijede i za realne brojeve, dakle asocijativnost, komutativnost, te distributivnost množenja skalarom prema zbrajanju.*

**Definicija.** ***Umnožak matrica*** *$A$ i $B$ definira se samo ako matrica $A$ ima toliko stupaca koliko matrica $B$ ima redaka. Broj redaka matrice umnoška $A \cdot B$ jednak je onom matrice $A$, a broj stupaca onom matrice $B$.*
*Preciznije: neka je matrica $A$ tipa $m \times n$ i $B$ tipa $n \times p$. Tada matrica $C = A \cdot B$ ima tip $m \times p$, a elementi su joj dani s*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots a_{in}b_{nj},$$

*tj. na $ij$-tom mjestu je umnožak $i$-tog retka matrice $A$ i $j$-tog stupca matrice $B$.*

**Zadatak 4.5.** *Nađite $AB$ i $BA$ ako su $A$ i $B$ sljedeće matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Rješenje.*

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 1 & 3\cdot 5 + 1\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1 & 0\cdot 5 + (-1)\cdot 2 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 19 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 7 \\ -3 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

**Napomena.** *Iz definicije množenja matrica i Zadatka 4.5 se vidi da množenje matrica općenito* ***nije komutativno****, tj. vrijedi $AB \neq BA$. Dapače, čest je slučaj da za zadane matrice $A$ i $B$ postoji umnožak $AB$, ali nije definiran umnožak $BA$, ili obratno (a čak i da umnošci u oba poretka množenja i postoje, rezultati tih množenja ne moraju biti matrice istog tipa).*

**Zadatak 4.6.** *Za matrice $A$ i $B$ izračunajte $AB$ i $BA$ (ako postoje):*

*(i)* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

*(ii)* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

*(iii)* $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

*(iv)* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 2 & -6 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & -3 & 10 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

*Rješenje.*

(i)

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 3\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 1 & 3\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2\cdot 0 \\ 0\cdot 0 - 1\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 1 - 1\cdot 0 + 1\cdot 1 & 0\cdot 0 - 1\cdot 1 + 1\cdot 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$BA$ ne postoji jer je matrica $B$ tipa $3 \times 3$, a matrica $A$ tipa $2 \times 3$, što znači da broj redaka druge matrice u umnošku ne odgovara broju stupaca prve matrice u umnošku (a to je osnovni uvjet koji matrice moraju zadovoljavati da bi njihov umnožak bio definiran).

□

**Napomena.** *Za kvadratnu matricu $A$ vrijedi:*

$$\begin{aligned} A + O = O + A = A \\ A \cdot I = I \cdot A = A, \end{aligned}$$

*gdje je $O$ nul-matrica, a $I$ jedinična matrica istog reda kao i $A$. Kažemo da je nul-matrica $O$ neutralni element za zbrajanje, a jedinična matrica $I$ za množenje kvadratnih matrica.*

**Definicija.** *Formalno možemo uvesti i* ***potenciranje kvadratne matrice*** *prirodnim brojem: produkt $A \cdot A$ skraćeno pišemo kao $A^2$, $A \cdot A \cdot A = A^3$ itd.*

**Zadatak 4.7.** *Neka je* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$. *Izračunajte $A^3$.*

## 4.3 Determinanta matrice

**Definicija.** *Svakoj kvadratnoj matrici možemo pridružujemo realan broj kojeg zovemo* ***determinanta matrice****. Za matricu $A$ determinantu označavamo s $|A|$ ili s $\det A$. Determinanta zadovoljava sljedeća osnovna svojstva:*

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det A \cdot \det B = \det B \cdot \det A = \det(BA) \\ \det I &= 1. \end{aligned}$$

**Definicija.** *Za zadanu kvadratnu matricu $A$ determinanta $|A|$ se* ***računa razvojem po nekom izabranom retku ili stupcu****. Ovdje ćemo pokazati razvoj po prvom retku:*

*(i) Za kvadratnu matricu* ***prvog*** *reda (degenerirani slučaj, jer se matrica sastoji od samo jednog elementa) definiramo:* $\det[a] := |a|$.

*(ii) Za kvadratnu matricu* ***drugog*** *reda:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} := a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

*(iii) Za kvadratnu matricu* ***trećeg*** *reda:*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} := a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

*(iv) Za kvadratnu matricu* ***n-tog*** *reda $A = (a_{ij})$ definiramo*

$$\det A := a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{n-1} a_{1n} \det A_{1n},$$

*gdje je za $k \in \{1, \ldots, n\}$ matrica $A_{1k}$ kvadratna matrica $(n-1)$-og reda koja se od matrice $A$ dobije ispuštanjem prvog retka i $k$-tog stupca.*

**Primjer 4.8.** $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 7 \cdot 3 = -13.$

**Primjer 4.9.** *Razvojem po prvom retku računamo determinantu*

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot (-3+5) - 1 \cdot (9+2) + 2 \cdot (15+2) = 25.\end{aligned}$$

Determinatu ne moramo nužno računati razvojem po prvom retku. Može se pokazati da determinanta ne ovisi o tome po kojem smo retku ili stupcu radili razvoj, tako da se u praksi za razvoj koristi onaj redak ili stupac matrice koji sadrži najviše nula.

**Zadatak 4.10.** *Razvojem po drugom retku izračunajte*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

*Rješenje.* Račun determinante počinjem dodjelom predznaka elementima matrice koji se nalaze u drugom retku (jer po njemu radimo razvoj), tj. multiplikativnih faktora 1 ili $-1$, ovisno o tome na kojem se mjestu u matrici element nalazi. Na primjer, broj 4 se nalazi na presjeku drugog retka i drugog stupca, pa je njemu pridružen faktor $(-1)^{2+2}$, dakle broj 1 (općenito, elementu $a_{ij}$ pridružen je broj $(-1)^{i+j}$). Razvoj po drugom retku sada izgleda ovako:

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \\ = \; & (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot (-5) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \\ = \; & 1 \cdot (9+2) + 4 \cdot (6-1) + 5(-4-3) = -4.\end{aligned}$$

□

**Zadatak 4.11.** *Izračunajte determinatu matrice iz prethodnog zadatka razvojem po drugom stupcu, a potom po trećem retku te se uvjerite da dobivate uvijek isto rješenje.*

**Zadatak 4.12.** *Izračunajte determinantu matrice* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

*Rješenje.* Razvojem po trećem retku imamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

□

**Zadatak 4.13.**

*Izračunajte determinante sljedećih matrica:*

(i) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & \log_y x \\ \log_x y & 1 \end{bmatrix}$.

## 4.4 Inverzna matrica

**Definicija.** *Za kvadratnu matricu $A$ kažemo da je **regularna** ili **invertibilna** ako postoji kvadratna matrica $A^{-1}$ za koju vrijedi*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

*Matricu $A^{-1}$ zovemo **inverzna matrica** (ili, skraćeno, **inverz**) matrice $A$. Kvadratne matrice koje nemaju inverznu matricu zovemo **singularne** ili **neinvertibilne** matrice.*

**Teorem.** *Kvadratna matrica je regularna ako i samo ako joj determinanta nije nula.*

**Napomena.** *Gornji teorem predstavlja **kriterij za provjeru regularnosti** kvadratne matrice: one i samo one kvadratne matrice čija je determinanta različita od nule imaju inverznu matricu.*

**Primjer 4.14.** *Matrica iz Zadatka 4.10 jest regularna jer joj je determinanta različita od nule, što ukazuje na to da za nju postoji inverzna matrica, dok je ona iz Zadatka 4.12 singularna, tj. nema inverznu matricu.*

**Definicija.** ***Transponirana matrica*** *$A^\tau$ matrice $A$ tipa $m \times n$ matrica tipa $n \times m$ koju dobivamo tako da u matrici $A$ zamijenimo retke stupcima, a stupce retcima.*

**Primjer 4.15.** *Transponirana matrica matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *je* $A^\tau = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

**Definicija.** ***Adjungirana matrica*** *$A^*$ kvadratne matrice $A$ je matrica koja na $(i,j)$-om mjestu ima broj $(-1)^{j+i} \cdot \det A^\tau_{ij}$, gdje je $A^\tau_{ij}$ matrica dobivena iz transponirane matrice $A^\tau$ izbacivanjem $i$-og retka i $j$-og stupca.*

**Zadatak 4.16.** *Za matricu* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ *izračunajte adjungiranu matricu.*

*Rješenje.* Najprije računamo transponiranu matricu $A^\tau$ :

$$A^\tau = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zatim računamo $A^* = (a^*_{ij})$ po elementima:

$$\begin{aligned} a^*_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 - (-1) \cdot 5 = 2 \\ a^*_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(1 \cdot 3 - 2 \cdot 5) = 7 \\ &\vdots \\ a^*_{33} &= (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 = -4, \end{aligned}$$

što daje $A^* = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -11 & -1 & 7 \\ 17 & -3 & -4 \end{bmatrix}$. □

**Zadatak 4.17.** *Nađite adjungiranu matricu općenite kvadratne matrice drugog reda.*

*Rješenje.* Uz oznaku $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ nije teško vidjeti da je $A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. □

**Teorem.** *Za regularnu kvadratnu matricu A vrijedi sljedeća*

***Formula za inverznu matricu***

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*.$$

**Napomena.** *Uočite da zbog determinante u nazivniku ova formula ima smisla samo za regularne, ali ne i singularne matrice (jer je za njih determinanta jednaka nuli).*

**Zadatak 4.18.** *Nađite inverznu matricu općenite regularne kvadratne matrice drugog reda.*

*Rješenje.* Koristeći Zadatak 4.17 i činjenicu da je za $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ determinanta jednaka $|A| = ad - bc$ te prethodni teorem, imamo sljedeću formulu za inverz općenite regularne matrice drugog reda:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

□

**Zadatak 4.19.** *Izračunajte inverz matrice iz Zadatka 4.16.*

*Rješenje.* U Primjeru 4.9 smo izračunali determinantu, a u Zadatku 4.16 adjungiranu matricu. Korištenjem formule za inverznu matricu imamo:

$$A^{-1} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -11 & -1 & 7 \\ 17 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

□

**Zadatak 4.20.** *Provjerite da je matrica dobivena u Zadatku 4.19 doista inverzna matrici iz Zadatka 4.16.*

*Rješenje.* Uputa: treba provjeriti da vrijedi $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ (dovoljno je provjeriti samo jednu jednakost, npr. $A \cdot A^{-1} = I$). □

**Zadatak 4.21.**

*Odredite inverz matrice iz Zadatka 4.10.*

**Zadatak 4.22.** *Koju realnu vrijednost može poprimiti $x$ tako da matrica*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & x \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

*ima inverznu matricu?*

*Rješenje.* Prema kriteriju za postojanje inverzne matrice mora biti $\det A \neq 0$. Determinantu matrice računamo na uobičajeni način: $\det A = 3x - 15$. Dakle, matrica $A$ je regularna za sve $x$ za koje vrijedi $3x - 15 \neq 0$, tj. za sve $x \neq 5$. □

## 4.5 Primjena matrica na transformacije

U ovom odlomku nastavljamo s proučavanjem veze između linearnih transformacija i matrica, započete u Poglavlju 3. Promatramo samo one linearne transformacije koje "čuvaju" dimenziju prostora, tj. čija je pripadna matrica kvadratna.

**Teorem.** *Kompozicija linearnih transformacija je opet linearna transformacija, a matrica te kompozicijske transformacije dobiva se množenjem matrica polaznih transformacija:*
***Kompoziciji linearnih transformacija odgovara množenje matrica.***

**Zadatak 4.23.** *Provjerite pomoću matrica da je kompozicija ravninskih rotacija oko ishodišta za kuteve $\alpha$ i $\beta$ upravo ravninska rotacija oko ishodišta za kut $\alpha + \beta$.*

*Rješenje.* Ravninske rotacije oko ishodišta za kuteve $\alpha$ i $\beta$ imaju redom sljedeće matrične zapise:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

i njihov umnožak je doista matrica ravninske rotacije oko ishodišta za kut $\alpha+\beta$:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} = \\ = &\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} = \\ = &\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

**Zadatak 4.24.** *Na točku* $(2,2,1)$ *primijenite sljedeće transformacije prostora:*

*(i) transformaciju iz Zadatka 3.7, potom transformaciju iz Zadatka 3.9* $(i)$,

*(ii) transformaciju iz Zadatka 3.9* $(i)$, *potom transformaciju iz Zadatka 3.7.*

*Dobivate li iste točku? Objasnite zašto!*

*Rješenje.*

(i)

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \\ = &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 \\ -\sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -2 \\ -\sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(ii) Analogno kao gore, samo što je poredak matrica transfromacija suprotan - prva i druga matrica u gornjem izrazu mijenjaju mjesta. Međutim, rezultat je isti (provjerite!).

Geometrijski gledano, svejedno je jesmo li točku najprije rotirali za 240° oko osi $y$ pa je potom zrcalili obzirom na $xz-$ravninu, ili smo učinili obratno; u oba slučaja dobivamo isti rezultat. □

**Napomena.** *Prethodni smo zadatak mogli riješiti i tako da najprije pomnožimo zadane transformacije (u bilo kojem poretku):*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

*te potom dobivenom matricom pomnožimo stupčanu matricu koja odgovara točki* $(2, 2, 1)$.

**Zadatak 4.25.** *Pokažite da uzastopnom primjenom rotacije ravnine oko ishodišta za kut* $\alpha$*, centralne simetrije ravnine te rotacije ravnine oko ishodišta za kut* $180° - \alpha$ *dobivamo identitetu, tj. transformaciju koja preslikava svaku točku u nju samu. Interpretirajte zadatak geometrijski i analitički (tako da uočite koju matricu dobijete množenjem pripadnih matrica ovih transformacija)!*

**Teorem.** *Inverzna transformacija linearne transformacije je opet linearna transformacija, a matrica te inverzne transformacije je* ***inverzna matrica*** *matrice polazne transformacije:*
***Inverznoj linearnoj transformaciji odgovara inverzna matrica.***

**Zadatak 4.26.** *Koristeći matrični račun provjerite da je inverzna transformacija ravninske rotacije oko ishodišta za kut* $\alpha$ *opet ravninska rotacija oko ishodišta, i to za kut* $-\alpha$.

*Rješenje.* Računamo inverznu matricu matrice $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ ravninske rotacije oko ishodišta za kut $\alpha$. Vrijedi $detA = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ pa je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix},$$

što je upravo matrica ravninske rotacije oko ishodišta za kut $-\alpha$ (koristili smo sljedeća svojstva trigonometrijskih funkcija: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$). □

**Zadatak 4.27.** *Nađite inverznu transformaciju prostorne simetrije obzirom na* $xz-$*ravninu.*

*Rješenje.* Prema formuli za inverzu matricu računamo inverznu matricu spomenute simetrije:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \cdots = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

tj. dobivamo polaznu matricu. Zaključujemo da je inverzna transformacija zadane simetrije opet ista ta simetrija. Objasnite zašto (koristite geometrijski argument)! □

# Poglavlje 5

# Skalarni, vektorski i mješoviti produkt vektora

## 5.1 Skalarni produkt vektora

**Definicija.** *Pod* ***kutem između vektora*** $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *smatramo manji od kuteva koje zatvaraju zrake koje određuju vektori* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *kad imaju zajednički početak.*
*Za dva vektora kažemo da su* ***ortogonalni*** *ako je kut između njih pravi.*

**Definicija.** ***Skalarni produkt*** *ne-nul vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *dan je s*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi,$$

*gdje je* $\varphi$ *kut između vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$*. Ako je bar jedan od vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *jednak nul-vektoru, onda definiramo* $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$*.*
*Specijalno, za* $\vec{b} = \vec{a}$ *imamo*

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2.$$

**Napomena.** *Iz definicije se vidi da je skalarni produkt ne-nul vektora broj, i to:*

*(i) pozitivan broj ako i samo ako je kut među vektorima šiljast*

*(ii) nula ako i samo ako je kut među vektorima pravi*

*(iii) negativan ako i samo ako je taj kut tup.*

**Zadatak 5.1.** *Dokažite tvrdnje iz prethodne napomene.*

**Napomena.** *Za ortogonalne vektore zbog* $\cos\varphi = \cos 90^\circ = 0$ *vrijedi* $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$*. S druge strane, ako je* $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$*, onda je ili neki od vektora* $\vec{a}$*,* $\vec{b}$*, jednak nul-vektoru, ili su* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *ortogonalni.*

**Primjer 5.2.** *Specijalan slučaj međusobno ortogonalnih vektora su koordinatni vektori iz $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ iz Poglavlja 2. Za njih vrijedi:*

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$$
$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0.$$

**Napomena.** *Skalarni produkt zadovoljava sljedeća svojstva:*

*(i)* $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

*(ii)* $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$

*(iii)* $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$

**Zadatak 5.3.** *Koji kut zatvaraju jedinični vektori $\vec{m}$ i $\vec{n}$ ako su vektori $\vec{a} = \vec{m}+2\vec{n}$ i $\vec{b} = 5\vec{m}-4\vec{n}$ međusobno ortogonalni?*

*Rješenje.* Činjenicu da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ortogonalni pišemo preko skalarnog produkta:

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= 0\\
(\vec{m}+2\vec{n})\cdot(5\vec{m}-4\vec{n}) &= 0\\
5\vec{m}^2+10\vec{n}\vec{m}-4\vec{m}\vec{n}-8\vec{n}^2 &= 0\\
5|\vec{m}|^2+6\vec{m}\vec{n}-8|\vec{n}|^2 &= 0\\
5+6\cos\varphi-8 &= 0,
\end{aligned}$$

odakle slijedi $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$, odnosno $\varphi = 120°$. □

**Zadatak 5.4.** *Zadano je $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a}-\vec{b}| = 30$. Izračunajte $|\vec{a}+\vec{b}|$.*

*Rješenje.* Računamo:

$$\begin{aligned}
|\vec{a}+\vec{b}|^2 &= (\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2 = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\vec{b}\\
|\vec{a}-\vec{b}|^2 &= \cdots = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\vec{b}.
\end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih jednakosti imamo $|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$, odakle uvrštavanjem vrijednosti zadanih u zadatku odmah slijedi rješenje: $|\vec{a}+\vec{b}| = 20$. Zadatak ima i geometrijsku formulaciju: izračunaj duljinu kraće dijagonale paralelograma kojem su duljine stranica 11 i 23, a duljina duže dijagonale iznosi 30. □

Skalarni produkt vektora se lako računa ako su vektori zadani u analitičkom zapisu. Osim skalarnog produkta, analitički zapis vektora omogućuje provjeru ortogonalnosti vektora te izračun kuta među vektorima. Ove formule dajemo za prostorne vektore, no analogne formule mogu se napisati i za vektore u ravnini ili pak višedimenzionalnom vektorskom prostoru.

**Teorem.** *Za dva analitički zadana vektora* $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ *i* $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ *vrijedi sljedeća formula za skalarni produkt te (samo za ne-nul vektore!) dvije direktne posljedice te formule:*

***Formula za skalarni produkt***

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

***Kriterij ortogonalnosti***

$$\vec{a}, \vec{b} \quad \textit{ortogonalni} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

***Formula za kut među vektorima***

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}\sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2}}.$$

**Zadatak 5.5.** *Dokažite formulu za skalarni produkt iz gornjeg teorema.*

*Rješenje.* Uputa: koristite se svojstvima skalarnog produkta te Primjerom 5.2. □

**Primjer 5.6.** *Skalarni produkt vektora* $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$ *i* $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$ *računamo prema formuli za skalarni produkt na sljedeći način:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = -1.$$

*Vidimo da je kut među ovim vektorima tup, jer je skalarni produkt negativan.*

**Primjer 5.7.** *Vektori* $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ *i* $\vec{b} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ *su ortogonalni jer vrijedi*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0$$

*pa je zadovoljen kriterij ortogonalnosti.*

**Zadatak 5.8.** *Izračunajte kut među vektorima iz Primjera 5.6.*

*Rješenje.* U Primjeru 5.6 izračunali smo skalarni produkt ovih vektora, što koristimo u formuli za kut:

$$\cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = -\frac{1}{2},$$

iz čega zaključujemo da se radi o kutu $\varphi = 120°$. □

**Zadatak 5.9.** *Izračunajte kut među dijagonalama paralelograma iz Zadatka 6.6.*

*Rješenje.* Računamo vektore dijagonala $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BD}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= 8\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} \\ \overrightarrow{DB} &= 4\vec{i} - 4\vec{j}.\end{aligned}$$

Uz oznaku $\varphi$ za kut među dijagonalama, imamo:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|} = \frac{32 - 8}{\sqrt{8^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{4^2 + 4^2}} = \frac{1}{2}.$$

Dakle, kut među dijagonalama iznosi $\varphi = 60°$. □

## 5.2 Vektorski produkt vektora

Za razliku od skalarnog produkta, kojeg je moguće definirati u vektorskom prostoru bilo koje dimenzije, sljedeći produkt postoji isključivo za prostorne vektore. Uočite i da je rezultat skalarnog množenja vektora broj dok će rezultat vektorskog množenja biti vektor.

**Definicija.** ***Vektorski produkt*** *ne-nul prostornih vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ sa sljedećim svojstvima:*

*(i) duljina: modul vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ jednak je površini paralelograma određenog s $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tj. $|\vec{a} \times \vec{b}| := |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi$, gdje je $\varphi$ kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$*

*(ii) smjer: $\vec{a} \times \vec{b}$ je ortogonalan na ravninu određenu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tj. ortogonalan je i s $\vec{a}$ i s $\vec{b}$*

*(iii) usmjerenje: uređena trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ čini* ***desni sustav****: zakretanje vektora $\vec{a}$ u vektor $\vec{b}$ za kut $\varphi$ promatrano iz krajnje točke vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ ima pozitivan smjer (suprotan smjeru kretanja kazaljke sata).*

**Napomena.** *Za kolinearne vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je zbog $\sin\varphi = \sin 0° = 0$ duljina $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$. Obzirom da je nul-vektor jedini vektor koji ima duljinu nula, za kolinearne vektore definiramo $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. S druge strane, ako je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, onda je ili neki od tih vektora jednak nul-vektoru, ili su oni kolinearni.*

**Primjer 5.10.** *Za koordinatne vektore $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ vrijedi*

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$$

*Na primjer, želimo odrediti $\vec{i} \times \vec{j}$. Prema definiciji vektorskog produkta znamo da to mora biti jedinični vektor jer mu je duljina jednaka površini pravokutnika* *određenog jediničnim vektorima* $\vec{i}$ *i* $\vec{j}$*. S druge strane, mora biti ortogonalan na ravninu određenu vektorima* $\vec{i}$ *i* $\vec{j}$ *pa imamo samo dvije mogućnosti za rješenje:* $\vec{k}$ *ili* $-\vec{k}$*. No, zahtjev da uređena trojka* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{i} \times \vec{j})$ *čini desni sustav otklanja drugu mogućnost, dakle imamo* $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$*.*

**Napomena.** *Vektorski produkt zadovoljava sljedeća svojstva:*

*(i)* $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$

*(ii)* $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

*(iii)* $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

Kao za skalarni produkt, i za vektorski produkt imamo formule za računanje u analitičkom zapisu:

**Teorem.** *Za dva prostorna analitički zadana vektora* $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ *i* $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ *vrijedi sljedeća formula za vektorski produkt te (samo za ne-nul vektore!) jedna direktna posljedica te formule:*

***Formula za vektorski produkt***

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

***Kriterij kolinearnosti***

$$\vec{a}, \vec{b} \quad \textit{kolinearni} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

**Napomena.** *Podsjetimo se da smo u Poglavlju 2 dali drugačiji kriterij kolinearnosti vektora u analitičkom zapisu (s kojim je čak bilo lakše računati!).*

**Zadatak 5.11.** *Dokažite formulu za vektorski produkt iz gornjeg teorema.*

*Rješenje.* Uputa: koristite se svojstvima vektorskog produkta te Primjerom 5.10. □

**Primjer 5.12.** *Vektori* $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ *i* $\vec{b} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ *su kolinearni jer vrijedi*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

**Zadatak 5.13.** *Izračunajte vektorski produkt vektora* $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ *i* $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ *te površinu paralelograma kojeg određuju vektori* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$*. Jesu li vektori* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *kolinearni?*

*Rješenje.* Prema formuli iz Teorema imamo

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 2\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}.\end{aligned}$$

Prema definiciji vektorskog produkta, tražena površina $P$ jednaka je modulu vektorskog produkta $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$P = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{2^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{38}.$$

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ imaju vektorski produkt različit od nul-vektora pa ne zadovoljavaju kriterij kolinearnosti i očito nisu kolinearni. □

**Zadatak 5.14.** *Izračunajte površinu paralelograma iz Zadatka 5.9.*

*Rješenje.* Najprije računamo vektore stranica $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= 6\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \\ \overrightarrow{AD} &= 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k},\end{aligned}$$

a potom traženu površinu kao modul vektorskog produkta ovih vektora:

$$P = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 4\vec{j} + 20\vec{k} = \sqrt{4^2 + 4^2 + 20^2} = 12\sqrt{3}.$$

□

## 5.3 Mješoviti produkt vektora

Kao i kod vektorskog produkta, mješoviti produkt tri vektora definiran je isključivo za prostorne vektore.

**Definicija.** ***Mješoviti produkt*** *tri prostorna vektora* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *i* $\vec{c}$ *je broj zadan s*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c},$$

*gdje s* $\times$ *označavamo vektorski, a s* $\cdot$ *skalarni produkt vektora.*

**Definicija.** *Za tri linearno zavisna prostorna vektora kažemo da su* ***komplanarni****. Naziv dolazi odatle što komplanarnost geometrijski odgovara činjenici da ta tri vektora određuju istu ravninu. To za tri općenita prostorna vektora nije slučaj: naime, bilo koja dva od ta tri vektora određuju neku ravninu (ukoliko nisu kolinearni ili nul-vektori), ali ne mora nužno i treći vektor biti u toj ravnini.*

**Napomena.** *Za tri komplanarna prostorna vektora* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *i* $\vec{c}$ *mješoviti produkt je jednak nuli:* $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ *jer je* $\vec{a} \times \vec{b}$ *ortogonalan na ravninu koju određuju* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *pa tako i na* $\vec{c}$*, koji također leži u njoj. Po kriteriju ortogonalnosti slijedi da je skalarni produkt vektora* $\vec{a} \times \vec{b}$ *i vektora* $\vec{c}$ *jednak nuli, a to upravo znači da je mješoviti produkt ta tri vektora nula. S druge strane, ako je* $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$*, onda je ili neki od ta tri vektora jednak nul-vektoru, ili su* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *kolinearni, ili su* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *i* $\vec{c}$ *komplanarni.*

**Teorem.** *Za tri prostorna analitički zadana vektora* $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ *i* $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ *vrijedi sljedeća formula za mješoviti produkt te (samo za ne-nul vektore!) direktna posljedica te formule:*

***Formula za mješoviti produkt***

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

***Kriterij komplanarnosti***

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \quad \text{komplanarni} \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

**Zadatak 5.15.** *Dokažite formulu za mješoviti produkt iz gornjeg teorema.*

*Rješenje.* Uputa: koristite se formulama za skalarni i vektorski produkt vektora te definicijom mješovitog produkta. □

**Zadatak 5.16.** *Izračunajte mješoviti produkt vektora* $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + 2\vec{k}$ *i* $\vec{c} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$.

*Rješenje.* Prema formuli za mješoviti produkt imamo

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-2) - 2 \cdot 1 = -8.$$

□

**Primjer 5.17.** *Vektori iz Zadatka 5.16 očito nisu komplanarni, jer je njihov mješoviti produkt različit od nule.*

**Zadatak 5.18.** *Pokažite da su sljedeći vektori komplanarni:* $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ *i* $\vec{c} = \vec{i} + 4\vec{j} - 7\vec{k}$. *Izrazite vektor* $\vec{c}$ *kao linearnu kombinaciju vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$.

*Rješenje.* Vektori su komplanarni ako je njihov mješoviti produkt jednak nuli:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 2(-7+8) + (-7+2) + (4-1) = 0,$$

što ovdje jest slučaj. Da bismo izrazili vektor $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, trebamo pronaći skalare $\alpha$ i $\beta$ takve da je $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$:

$$\vec{i} + 4\vec{j} - 7\vec{k} = \alpha(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) + \beta(\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) = (2\alpha+\beta)\vec{i} + (-\alpha+\beta)\vec{j} + (\alpha - 2\beta)\vec{k},$$

odakle izjednačavanjem koeficijenata uz koordinatne vektore slijedi sustav

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta &= -1 \\ -\alpha + \beta &= 4 \\ \alpha - 2\beta &= -7. \end{aligned}$$

Rješavanjem prve dvije jednadžbe ovog sustava dobivamo $\alpha = -1$, $\beta = 3$, što zadovoljava i treću jednadžbu (to je još jedna potvrda da su vektori komplanarni). Zapis vektora $\vec{c}$ kao linearne kombinacije vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ glasi: $\vec{c} = -\vec{a} + 3\vec{b}$. □

**Zadatak 5.19.** *Odredite* $x \in \mathbb{R}$ *tako da vektori* $\vec{a} = (2x-6)\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = (3x-1)\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ *i* $\vec{c} = (3-8x)\vec{i} + (x-2)\vec{j} - 3x\vec{k}$ *budu komplanarni te u tom slučaju izrazite vektor* $\vec{c}$ *kao linearnu kombinaciju vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$.

*Rješenje.* Vektori će biti komplanarni ako je

$$\begin{vmatrix} 2x-6 & 4 & -3 \\ 3x-1 & 2 & 2 \\ 3-8x & x-2 & -3x \end{vmatrix} = 0,$$

odakle dobivamo dva rješenja: $x_1 = 4$ i $x_2 = -\frac{3}{11}$. Pogledajmo kako glase vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ za $x = 4$: $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 11\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ i $\vec{c} = -29\vec{i} + 2\vec{j} - 12\vec{k}$. Dalje, za vektor $\vec{c}$ tražimo $\alpha$ i $\beta$ tako da vrijedi $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, tj. $-29\vec{i} + 2\vec{j} - 12\vec{k} = \alpha(2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}) + \beta(11\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$, odakle dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 2\alpha + 11\beta &= -29 \\ 4\alpha + 2\beta &= 2 \\ -3\alpha + 2\beta &= -12. \end{aligned}$$

Ovaj sustav od tri jednadžbe s dvije nepoznanice ima jedinstveno rješenje i ono iznosi $\alpha = 2$, $\beta = -3$, pa je zapis vektora $\vec{c}$ kao linearne kombinacije vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dan s $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$. □

Mješoviti produkt tri prostorna vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ ima zanimljivu geometrijsku interpretaciju: zamišljamo da vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{b}$ određuju prostorno tijelo; zovemo ga paralelepiped). Može se pokazati da volumen $V$ tog paralelepipeda odgovara mješovitom produktu navedenih vektora. Točnije, vrijedi

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

**Napomena.** *Volumen paralelepipeda bit će točno jednak mješovitom produktu tri zadana vektora u slučaju da ti vektori čine desni sustav, a suprotan po predznaku mješovitom produktu ako vektori čine lijevi sustav.*
*Za komplanarne vektore je paralelepiped degeneriran, tj. ima volumen jednak nuli, što dodatno (obzirom na gornju formulu) potvrđuje već pokazanu činjenicu da je mješoviti produkt komplanarnih vektora nula.*

**Zadatak 5.20.** *Odredite volumen, površinu baze i visinu tijela određenog vektorima iz Zadatka 5.16.*

*Rješenje.* U Zadatku 5.16 smo već izračunali mješoviti produkt zadanih vektora. Obzirom da je rezultat negativan, uzimamo da je traženi volumen $V$ jednak $V = |-8| = 8$. Za bazu paralelepipeda možemo uzeti paralelogram određen vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Znamo da je površina $B$ tog paralelograma jednaka modulu njihovog vektorskog produkta

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 7\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

pa je

$$B = |\vec{a} \times \vec{b}| = |7\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}| = \sqrt{7^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{62}.$$

Konačno, visinu $h$ možemo dobiti iz klasične formule $V = B \cdot h$ za volumen prizme:

$$h = \frac{V}{B} = \frac{8}{\sqrt{62}} = \frac{8\sqrt{62}}{62} = \frac{4\sqrt{62}}{31}.$$

□

**Zadatak 5.21.** *Pokažite da su vektori $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{j} - 3\vec{k}$ linearno nezavisni i prikažite vektor $\vec{i}$ kao njihovu linearnu kombinaciju.*

*Rješenje.* Uputa: pokažite da zadani vektori nisu komplanarni (mješoviti produkt im nije nula), što dokazuje njihovu linearnu nezavisnost. Vektor $\vec{i}$ ćete zapisati kao njihovu linearnu kombinaciju ako nađete skalare $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ takve da vrijedi $\vec{i} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$ (pogledajte npr. Zadatak 5.18). □

# Poglavlje 6

# Linearni sustavi

## 6.1 Matrični zapis linearnih sustava

**Definicija.** ***Sustav linearnih jednadžbi*** *od $m$ linearnih jednažbi s $n$ realnih nepoznanica $x_1, \ldots, x_n$ zapisujemo općenito ovako:*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

*Realne brojeve $a_{ij}$, gdje je $i \in \{1, 2, \ldots, m\}, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, zovemo* ***koeficijenti*** *sustava, dok realne brojeve $b_1, b_2, \ldots, b_m$ zovemo* ***slobodni koeficijenti*** *sustava. Uvodimo oznake za sljedeće matrice:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

*i zovemo ih redom* ***matrica sustava***, ***matrica nepoznanica*** *i* ***matrica slobodnih članova***. *Uz ove oznake linearni sustav može se zapisati kao*

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

*Dodatno, matricu*

$$[A|\vec{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & | & b_m \end{bmatrix}$$

*zovemo* ***proširena matrica sustava***.

**Primjer 6.1.** *Matrični zapis sustava*

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 2 \\ x + 2y - z &= 1 \\ -4x + 4y + z &= 1, \end{aligned}$$

*uz oznake*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

*glasi jednostavno* $A\vec{x} = \vec{b}$*. Drugi način zapisivanja je taj da napišemo*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

## 6.2 Regularni sustavi

**Definicija.** ***Kvadratni*** *linearni sustav je sustav koji ima jednak broj jednadžbi i nepoznanica.* ***Regularni*** *linearni sustav je kvadratni linearni sustav čija je matrica sustava regularna.*

**Teorem.** *Regularni linearni sustav* $A\vec{x} = \vec{b}$ *ima* ***jedinstveno rješenje*** *dano s:*

***Rješenje regularnog sustava - pomoću inverza matrice sustava***

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b},$$

*gdje je* $A^{-1}$ *inverzna matrica matrice sustava* $A$*.*

**Napomena.** *Gornja formula jasno ukazuje da je rješenje regularnog sustava jedinstveno. Naime, inverzna matrica* $A^{-1}$ *je jedinstvena, pa je jedinstven i umnožak* $A^{-1}\vec{b}$ *koji daje rješenje sustava.*

Provjera regularnosti zadanog sustava radi se preko provjere regularnosti matrice sustava, što je najlakše napraviti provjerom da je njena determinanta različita od nule (vidi Poglavlje 4).

**Zadatak 6.2.** *Provjerite da je sustav iz Primjera 6.1 regularan i riješite ga pomoću gornje formule.*

*Rješenje.* Uočimo najprije da je sustav kvadratni, što je osnovni preduvjet regularnosti. Prema formuli za determinantu (vidi Poglavlje 4) imamo $\det A = 27$. Obzirom da je različita od nule, sustav je regularan.
Računamo adjungiranu matricu, a potom i inverznu matricu matrice $A$, također prema formulama iz Poglavlja 4:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

pa je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix},$$

tj. rješenje sustava glasi $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = 1$. □

**Zadatak 6.3.** *Nalaženjem inverzne matrice riješite sljedeći sustav:*

$$\begin{aligned} -x + y + z &= 3 \\ x + z &= 2 \\ x + 2y - z &= 1. \end{aligned}$$

Pored metode rješavanja regularnog sustava pomoću inverza matrice sustava, poznata je i sljedeća metoda:

**Teorem.** *Svaki regularni linearni sustav $A\vec{x} = \vec{b}$ može se riješiti* ***Cramerovim pravilom****: označimo stupce matrice $A$ redom slovima $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, ..., $\boldsymbol{a_n}$, a stupac matrice $\vec{b}$ s $\boldsymbol{b}$. Rješenje sustava je dano formulama*

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{D_n}{D},$$

*gdje je $D = \det[\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}] = \det A$, $D_1 = \det[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}]$, ..., $D_n = \det[\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{b}]$, tj. determinante $D_1, D_2, \ldots, D_n$ su determinante matrica dobivenih tako da se u matricu $A$ ubacuje stupac $\boldsymbol{b}$ umjesto stupca $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_n}$, redom.*

**Zadatak 6.4.** *Pomoću Cramerovog pravila riješite sljedeći sustav:*

$$\begin{aligned} x + 2y - z + u &= -1 \\ 2x + 5y - z + 2u &= -2 \\ 3x - y - 2z + u &= 5 \\ x - y + 3z - 5u &= 6. \end{aligned}$$

*Rješenje.* Sustav najprije zapisujemo matrično:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Za matricu sustava računamo determinantu $D = \cdots = -34$. Dalje, računamo determinantu $D_1$ matrice koja se dobije tako da se prvi stupac matrice sustava zamijeni stupcem matrice slobodnih koeficijenata:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \cdots = -68.$$

Analogno postupamo za ostala tri stupca matrice sustava. Determinante matrica koje tako dobivamo redom iznose $D_2 = 34$, $D_3 = -34$, $D_4 = 0$ pa prema Cramerovom pravilu rješenje glasi

$$x_1 = \frac{-68}{-34} = 2, \quad x_2 = \frac{34}{-34} = -1, \quad x_3 = \frac{-34}{-34} = 1, \quad x_4 = \frac{0}{-34} = 0.$$

□

**Zadatak 6.5.** *Cramerovim pravilom riješite sustav iz Primjera 6.1.*

**Zadatak 6.6.** *Korištenjem obje metode za regularne sustave riješite sustave, provjerivši prije samog rješavanja jesu li regularni:*

*(i)*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

*(ii)*

$$\begin{aligned} x + 2y - z + u &= 0 \\ 2x + 5y - z + 2u &= 1 \\ 3x - y - 2z + u &= 2 \\ x - y + 3z - 5u &= 3. \end{aligned}$$

## 6.3 Gauss-Jordanova metoda

**Definicija.** ***Gauss-Jordanova metoda*** *koristi se za rješavanje svih linearnih sustava, ne samo regularnih. Zadani linearni sustav* $A\vec{x} = \vec{b}$ *svodimo na ekvivalentni, ali jednostavniji sustav pomoću sljedećih* ***elementarnih operacija*** *na retcima proširene matrice sustava* $[A|\vec{b}]$*:*

*(i) zamjena dva retka*

*(ii) množenje retka brojem različitim od nule*

*(iii) dodavanje retka drugom retku.*

**Napomena.** *Navedene matrične operacije "oponašaju" postupke koje koristimo prilikom rješavanja linearnog sustava zapisanog u obliku jednadžbi, a to su: zamjena poretka dvije jednadžbe, množenje odgovarajuće jednadžbe brojem različitim od nule ili dodavanje jedne jednadžbe nekoj drugoj jednadžbi sustava.*

Matricu sustava se provođenjem navedenih elementarnih operacija pokušava svesti na dijagonalni oblik ili oblik najbliži dijagonalnom, što simbolički zapisujemo ovako:

$$[A|\vec{b}] \sim \cdots \sim [I|A^{-1}\vec{b}].$$

Vidimo da u idealnom slučaju, kada uspijemo doći do dijagonalne matrice $I$ na mjestu matrice sustava, s desne strane imamo upravo rješenje sustava (usporedi s prethodnim odlomkom!). To se događa samo za regularne sutave, dok za druge linearne sustave dijagonalizaciju nećemo moći provesti do kraja.

Pogledajmo kako izgleda rješavanje regularnih sustava Gauss-Jordanovom metodom:

**Zadatak 6.7.** *Gauss-Jordanovom metodom riješite sustav:*

$$\begin{aligned} 5x + 4z + 2t &= 3 \\ x - y + 2z + t &= 1 \\ 4x + y + 2z &= 1 \\ x + y + z + t &= 0. \end{aligned}$$

*Rješenje.* Svodimo matricu sustava na dijagonalni oblik:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim^1 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim^2$$
$$\sim^2 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right] \sim^3 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right] \sim^4$$
$$\sim^4 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 14 & 17 & 3 \end{array}\right] \sim^5 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 14 & 17 & 3 \end{array}\right] \sim^6$$
$$\sim^6 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim^7 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

uz korištenje sljedećih transformacija:

1) zamjena prvog i četvrtog retka, kako bismo u gornjem lijevom kutu imali jedinicu, što je standardni početak - želimo na kraju imati dijagonalnu formu s jedinicama na dijagonali i nulama na preostalim mjestima

2) množenje prvog retka s $-1$, $-4$ i $-1$ i dodavanje redom drugom, trećem i četvrtom retku da na nedijagonalnim mjestima prvog stupca dobijemo nule

3) množenje trećeg retka s $-1$ i dodavanje drugom retku da na drugom dijagonalnom mjestu dobijemo jedinicu

4) množenje drugog retka s $-1$, 3 i 5 i dodavanje redom prvom, trećem i četvrtom retku da na nedijagonalnim mjestima drugog stupca dobijemo nule

5) množenje trećeg retka s $\frac{1}{7}$ da na trećem dijagonalnom mjestu dobijemo jedinicu

6) množenje trećeg retka s 2, $-3$ i $-14$ i dodavanje redom prvom, drugom i četvrtom retku da na nedijagonalnim mjestima trećeg stupca dobijemo nule

7) množenje četvrtog retka redom s $\frac{5}{7}$, $-\frac{4}{7}$ i $-\frac{8}{7}$ i dodavanje redom prvom, drugom i trećem retku da na nedijagonalnim mjestima četvrtog stupca dobijemo nule.

Rješenje dobivenog sustava, koji je ekvivalentan početnom, možemo lako "očitati" iz proširene matrice sustava: $x = 1$, $y = -1$, $z = -1$, $t = 1$. Dakle, uređena četvorka

$(1, -1, -1, 1)$ čini jedinstveno rješenje početnog sustava, koji je očito regularan (u što smo se mogli uvjeriti na početku zadatka računanjen determinante matrice sustava). □

**Zadatak 6.8.** *U rješenju prethodnog zadatka pojavili su se razlomci, što je otežalo računanje u posljednjim koracima. Pokušajte zadatak riješiti Gauss-Jordanovom metodom, ali tako da odaberete neke druge elementarne operacije od onih spomenutih u gornjem rješenju. Možete li naći način u kojem će upotreba razlomaka biti izbjegnuta?*

**Napomena.** *Iako se Gauss-Jordanova metoda čini teškom, ona je neusporedivo brža od metoda koje smo upoznali u prethodnom odlomku, jer koristi mnogo manje računskih operacija od tih metoda. Međutim, to je teško primijetiti na sustavima s malim brojem jednadžbi i nepoznanica, ali se kod sustava s mnogo jednadžbi i nepoznanica to može dobro uočiti.*

Umjesto dijagonalizacijskog postupka, moguće je svoditi matricu sustava na gornjetrokutasti ili donjetrokutasti oblik.

**Zadatak 6.9.** *Gauss-Jordanovom metodom riješite sustav iz Primjera 6.1 svođenjem na gornjetrokutasti oblik.*

*Rješenje.* Iz rješenja Zadatka 6.2 znamo da je taj sustav regularan, tj. da ima jedinstveno rješenje. Proširenu matricu sustava svodimo na gornjetrokutasti oblik

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim^1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \end{array}\right] \sim^2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

korištenjem sljedećih elementarnih operacija:

1) množenje prvog retka s $-1$ i $4$ i dodavanje redom drugom i trećem retku

2) množenje drugog i trećeg retka redom s $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{9}$.

Dolazimo do ekvivalentneg sustava

$$\begin{aligned} x - y + 2y &= 2 \\ y - z &= -\frac{1}{3} \\ z &= 1 \end{aligned}$$

kojeg rješavamo "odozdo prema gore": iz treće jednadžbe vidimo da je $z = 1$, što uvrštavamo u prvu i drugu jednadžbu te dobivamo

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ y &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

pa dobivamo konačno rješenje $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = 1$. □

**Zadatak 6.10.** *Gauss-Jordanovom metodom riješite sustav iz Primjera 6.1 svođenjem na dijagonalni oblik.*

**Zadatak 6.11.** *Gauss-Jordanovom metodom riješite sustave iz Zadatka 6.6.*

U Zadacima 6.7 i 6.9 Gauss-Jordanovom metodom smo rješavali regularne sustave. No, tom se metodom mogu rješavati i sustavi koji nisu regularni, tj. nemaju jedinstveno rješenje. Jedine dvije mogućnosti za takve sustave su da:

(i) nemaju rješenja - zovemo ih **nemogući sustavi**

(ii) imaju neograničeno mnogo rješenja - zovemo ih **neodređeni sustavi**.

**Zadatak 6.12.** *Gauss-Jordanovom metodom riješite sustav*

$$\begin{aligned} x+2y+6 &= 5 \\ -x+y-2z &= 3 \\ x-4y-2z &= 1. \end{aligned}$$

*Rješenje.* Svodimo sustav na gornjetrokutasti oblik:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 5 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim^1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -6 & -8 & -4 \end{array}\right] \sim^2$$
$$\sim^2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & -6 & -8 & -4 \end{array}\right] \sim^3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right]$$

korištenjem sljedećih elementarnih operacija:

1) množenje prvog retka s 1 i $-1$ i dodavanje redom drugom i trećem retku

2) množenje drugog retka s $\frac{1}{3}$

3) množenje drugog retka s 6 i dodavanje trećem retku.

Vidimo da jednadžba u trećem retku sada glasi $0x + 0y + 0z = 0 = 12$, što ukazuje na nemoguć sustav, tj. sustav koji nema rješenja. □

**Zadatak 6.13.** *Koristeći Gauss-Jordanovu pokažite da sljedeći sustav nema rješenja:*

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -4 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= -2. \end{aligned}$$

**Zadatak 6.14.** *Gauss-Jordanovom metodom riješite sustav*

$$\begin{aligned} x+y+z &= 2 \\ 2x-y-4z &= -5 \\ -x+3y+7z &= 10. \end{aligned}$$

*Rješenje.* Rješavamo sustav postupkom dijagonalizacije

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 2 & -1 & -4 & | & -5 \\ -1 & 3 & 7 & | & 10 \end{bmatrix} \sim^1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -3 & -6 & | & -9 \\ 0 & 4 & 8 & | & 12 \end{bmatrix} \sim^2$$

$$\sim^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 4 & 8 & | & 12 \end{bmatrix} \sim^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

i to primjenom sljedećih elementarnih operacija:

1) množenje prvog retka s $-2$ i $1$ i dodavanje redom drugom i trećem retku

2) množenje trećeg retka s $-\frac{1}{3}$

3) množenje trećeg retka s $-1$ i $-4$ i dodavanje redom prvom i trećem retku.

Primijetite da matrica do koje smo ovako došli u trećem retku ima same nule, što je ekvivalentno jednadžbi $0x + 0y + 0z = 0$. No, ta jednadžba ništa ne govori, jer jednakost $0 = 0$ vrijedi uvijek, pa tu jednadžbu možemo izbaciti iz proširene matrice sustava. To znači da dolazimo do matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 \end{bmatrix}$$

za koju je jasno da ne možemo dalje nastaviti s postupkom dijagonalizacije. Sustav do kojeg smo došli ima dvije jednadžbe i tri nepoznanice i glasi:

$$\begin{aligned} x-z &= -1 \\ y+2z &= 3. \end{aligned}$$

Zbog "manjka" jednadžbi u odnosu na nepoznanice jedna nepoznanica je neodređena, tj. može poprimiti vrijednost bilo kojeg realnog broja. Na primjer, možemo reći da je to $z$: pišemo $z = \lambda$, gdje je $\lambda$ proizvoljan realan broj. Sada iz gornje dvije jednadžbe dobivamo $x = \lambda - 1$ i $y = 3 - 2\lambda$, pa je rješenje ovog neodređenog sustava dano s $x = \lambda - 1$, $y = 3 - 2\lambda$ i $z = \lambda$, gdje je $\lambda$ realni parametar. Primijetite da ovaj sustav ima neograničeno mnogo rješenja koja se dobivaju uvrštavanjem različitih vrijednosti za $\lambda$: za $\lambda = 1$ imamo $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$; za $\lambda = -1$ imamo $x = -2$, $y = 5$, $z = -1$ itd.

□

**Zadatak 6.15.** *Koristeći Gauss-Jordanovu metodu riješite sustav*

$$\begin{aligned} 2x - y - 5z &= 3 \\ -x + y + 3z &= -1 \\ x - 2y - 4z &= 0. \end{aligned}$$

## 6.4 Račun determinante i inverzne matrice

Elementarne matrične operacije možemo koristiti i za nalaženje determinante i inverza kvadratne matrice.

**Definicija.** ***Računanje determinante*** *zadane kvadratne matrice pomoću elementarnih operacija provodi se uz iste elementarne operacije kao i za Gauss-Jordanovu metodu, ali ovdje dodatno vrijede sljedeća pravila:*

*(i) Ako dva stupca ili dva retka matrice zamijene mjesta, determinanta mijenja predznak.*

*(ii) Za matricu $B$ dobivenu množenjem stupca ili retka matrice $A$ nekim realnim brojem $k$ vrijedi:* $\det B = k \det A$.

*(iii) Determinanta se ne mijenja ako nekom retku ili stupcu matrice $A$ dodamo linearnu kombinaciju ostalih redaka ili stupaca.*

**Napomena.** *Pri računanju determinante na gornji način koristimo se i sljedećim činjenicama koje općenito vrijede za determinante:*

*(i) Ako su svi elementi nekog stupca ili nekog retka matrice jednaki nuli, onda je i determinanta te matrice jednaka nuli.*

*(ii) Ako matrica ima dva stupca ili dva retka jednaka, onda je determinanta te matrice jednaka nuli.*

*(iii) Determinanta matrice koja ima trokutasti oblik jednaka je umnošku dijagonalnih elemenata.*

Korištenjem elementarnih matričnih operacija determinantu najčešće računamo svođenjem na trokutasti oblik.

**Zadatak 6.16.** *Koristeći gornja pravila izračunajte determinantu matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Rješenje.* Imamo redom:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad &=^1 \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} =^2 \\
&=^2 \quad -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} =^3 \\
&=^3 \quad -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} = \\
&= \quad -3\left(-\frac{1}{3}\right) = 1,
\end{aligned}
$$

uz primjenu sljedećih elementarnih operacija:

1) množenje prvog retka s $-2$ i $-3$ i dodavanje redom drugom i trećem retku
2) izlučivanje $-3$ iz drugog retka
3) množenje drugog retka s 4 i dodavanje trećem retku.

Determinanta posljednje gornjetrokutaste matrice jednaka je umnošku dijagonalnih elemenata. □

**Zadatak 6.17.** *Koristeći gornja pravila izračunajte determinantu matrice sustava iz Primjera 6.1.*

**Definicija.** ***Računanje inverzne matrice*** *zadane kvadratne matrice A pomoću elementarnih matričnih operacija provodi se pomoću istih elementarnih operacija na retcima kao i Gauss-Jordanova metoda. Cilj postupka je svesti matricu A na jediničnu matricu, prema sljedećem pravilu:*

$$[A|I] \sim \cdots \sim [I|A^{-1}].$$

**Zadatak 6.18.** *Koristeći elementarne operacije izračunajte inverz matrice iz Zadatka 6.16.*

*Rješenje.*

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim^1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim^2
$$

$$
\sim^2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim^3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & -3 \end{array}\right],
$$

uz primjenu sljedećih elementarnih operacija:

1) množenje prvog retka s $-2$ i $-3$ i dodavanje redom drugom i trećem retku

2) množenje trećeg retka s $-1$ i dodavanje drugom retku

3) množenje drugog retka s $-2$ i $4$ i dodavanje redom prvom i trećem retku.

U posljednjoj dobivenoj matrici desni dio matrice $[I|A^{-1}]$ je tražena inverzna matrica

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

□

**Zadatak 6.19.** *Koristeći matrične operacije odredite inverz matrice iz Primjera 6.1.*

# Poglavlje 7

# Pojam funkcije, grafa i inverzne funkcije

## 7.1 Pojam funkcije, domena i graf funkcije

**Definicija.** *Neka su $X$ i $Y$ dva neprazna skupa. Ako je po nekom pravilu, označimo ga s $f$, svakom elementu $x$ iz $X$ pridružen točno jedan element $y$ iz $Y$, kažemo da je na skupu $X$ zadana **funkcija** $f$ s vrijednostima u $Y$. Funkciju simbolički označavamo s $f : X \longrightarrow Y$. Oznaku $x$ zovemo **varijabla** ili **argument** funkcije $f$. Za zadanu funkciju $f$ skup $X$ često označavamo s $\mathcal{D}_f$ i nazivamo **područje definicije** ili **domena** funkcije $f$, dok skup $Y$ nazivamo **područje vrijednosti** ili **kodomena**. Podskup kodomene $f(X) = \{y|y = f(x), \quad x \in X\}$ koji se sastoji samo od "pogođenih" vrijednosti kodomene označavamo s $\mathcal{R}_f$ i nazivamo **slika i ili rang** funkcije $f$.*

**Napomena.** *Općenito domene i kodomene funkcija mogu biti razni skupovi. Također, funkcije mogu imati jednu ili više varijabli. Mi ćemo promatrati samo funkcije jedne varijable i to takve da su i $\mathcal{D}_f$ i $\mathcal{R}_f$ ili čitav skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ ili neki njegov podskup. Za takve funkcije kažemo da su **relane funkcije (jedne) realne varijable**.*

**Definicija.** ***Graf funkcije** $f$ je skup točaka koordinatne ravnine*

$$\Gamma_f = \{(x, f(x))|x \in \mathcal{D}_f\}.$$

**Napomena.** *Funkcija može biti zadana na više načina, no mi ćemo je u pravilu zadavati **analitičkim zapisom**, tj. računskim izrazom koji govori kako se za pojedine vrijednosti argumenta računaju odgovarajuće vrijednosti funkcije.*

**Primjer 7.1.** *Na primjeru funkcije $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ pokazujemo kako se iz analitičkog zapisa funkcije računaju pojedine vrijednosti funkcije:*

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 2(-1) - 5 = -1 - 3 - 2 - 5 = -11$$

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 5 = -5$$

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 5 = 1 - 3 + 2 - 5 = -5.$$

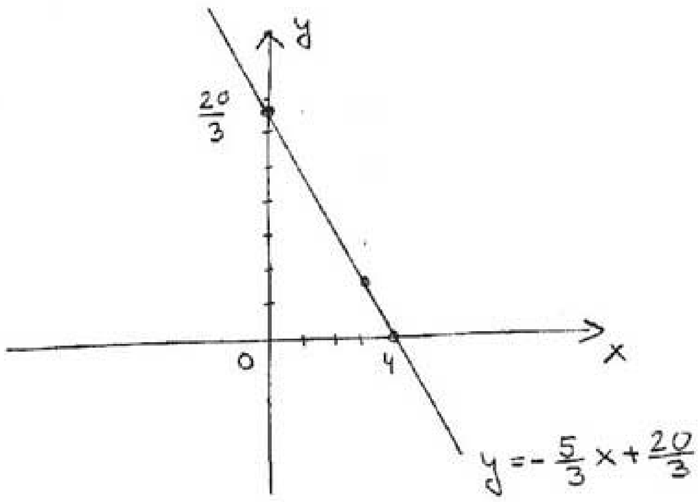
**Zadatak 7.2.** *Odredite* $f(0), f(-1)$ *i* $\frac{1}{x^2} f(\frac{1}{x})$ *ako je* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

**Zadatak 7.3.** *Odredite linearnu funkciju* $f(x) = ax + b$ *i nacrtajte njen graf ako je* $f(-2) = 10$ *i* $f(1) = -5$.

*Rješenje.* Iz uvjeta $f(-2) = 10$ i $f(1) = -5$ dolazimo do sljedećeg sustava jednadžbi:

$$\begin{aligned} -2a + b &= 10 \\ a + b &= 5, \end{aligned}$$

čije rješenje glasi $a = -\frac{5}{3}$, $b = \frac{20}{3}$ pa je tražena funkcija $f(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{20}{3}$ (vidi Sliku 7.1). □




Slika 7.1: Zadatak 7.3

**Zadatak 7.4.** *Odredite kvadratnu funkciju* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *ako je:* $f(-1) = -1$, $f(3) = -3$ *i* $f(6) = 12$.

**Zadatak 7.5.** *Neka je dano pridruživanje:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1] \\ 3x, & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

*Da li je f funkcija?*

*Rješenje.* Dano pridruživanje nije funkcija jer po pravilu za interval $[0,1]$ imamo $f(1)=2$ a po pravilu za interval $[1,2]$ slijedi da je $f(1)=3$ što znači da su broju 1 pridružene dvije različite vrijednosti. □

**Zadatak 7.6.** *Izračunajte* $f(x+1)$ *ako je* $f(x-1)=x^2$.

*Rješenje.* Problem je što umjesto $f(x)$ imamo zadano $f(x-1)$. Zato radimo supstituciju $t=x-1 \;\Rightarrow\; x=t+1$ pa dobivamo $f(t)=(t+1)^2$ iz čega slijedi da je $f(x+1)=(x+1+1)^2=(x+2)^2$. □

## 7.2 Injektivnost, surjektivnost i bijektivnost

**Definicija.** *Za funkciju* $f: X \longrightarrow Y$ *kažemo da je* ***injekcija*** *ako za bilo koja dva elementa* $x_1, x_2 \in X$ *iz* $x_1 \neq x_2$ *slijedi* $f(x_1) \neq f(x_2)$ *ili, ekvivalentno tome, ako iz* $f(x_1)=f(x_2)$ *slijedi* $x_1=x_2$.
*Ako je* $f(X)=Y$, *tj. ako za svako* $y \in Y$ *postoji* $x \in X$ *tako da je* $f(x)=y$, *kažemo da je* $f$ ***surjekcija****.*
*Za funkciju koja je i surjekcija i injekcija, kažemo da je* ***bijekcija****.*

**Napomena.** *Bijekcije smatramo važnim funkcijama jer posjeduju svojstvo inverza. Točnije, za svaku bijekciju postoji jedinstvena inverzna funkcija. O tome će biti više riječi u sljedećem odlomku.*

**Napomena.** *Na sljedećim zadacima pokazujemo kako se* ***računski provjerava injektivnost i surjektivnost*** *zadane funkcije.*

**Zadatak 7.7.** *Računski provjerite injektivnost sljedećih funkcija* $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *:*

*(i)* $f(x)=3$

*(ii)* $f(x)=2x+1$

*(iii)* $f(x)=3x^2+1$

*(iv)* $f(x)=x^3$.

*Rješenje.*

1. Ova funkcija očito nije injektivna jer je $f(x)=3$ za svako $x$ pa možemo npr. uzeti $x_1=1,\; x_2=2$ i imamo $f(x_1)=f(x_2)$ iako je $1 \neq 2$.

2. Koristit ćemo drugi kriterij injektivnosti da pokažemo da je ova linearna funkcija injektivna. želimo da iz $f(x_1)=f(x_2)$ slijedi $x_1=x_2$. Imamo

$$f(x_1)=f(x_2) \;\Rightarrow 2x_1+1=2x_2+1 \;\Rightarrow\; 2x_1=2x_2 \;\Rightarrow x_1=x_2$$

pa je to injektivna funkcija. Općenito vrijedi da su linearne funkcije injektivne.

3. Kako je $(-x)^2 = x^2$ lako ćemo naći primjer koji pokazuje da kvadratna funkcija $f(x) = 3x^2 + 1$ nije injektivna. Uzmemo $x_1 = 1$ i $x_2 = -1$ pa imamo $f(1) = 3 \cdot 1^2 + 1 = 4$ i s druge strane $f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 1 = 4$. Jer je $1 \neq -1$ pokazali smo da funkcija nije injektivna.

$\square$

**Zadatak 7.8.** *Ograničite domenu sljedećih funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tako da dobijete injektivne funkcije:*

*(i)* $f(x) = x^2$

*(ii)* $f(x) = |x + 1|$

*(iii)* $f(x) = \sin x$.

*Rješenje.*

1. Možemo ograničiti domenu s $\mathbb{R}$ na skup nenegativnih realnih brojeva $\mathbb{R}_+ = \{\ x \geq 0\ |x\ \in \mathbb{R}\ \}$, tj. na interval $[0, \infty\rangle$. Sada imamo:

$$f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow\ x_1^2 = x_2^2 \ \Rightarrow\ |x_1| = |x_2| \ \Rightarrow x_1 = x_2$$

jer su $x_1$ i $x_2$ pozitivni pa $|x_1| = x_1$ i $|x_2| = x_2$.

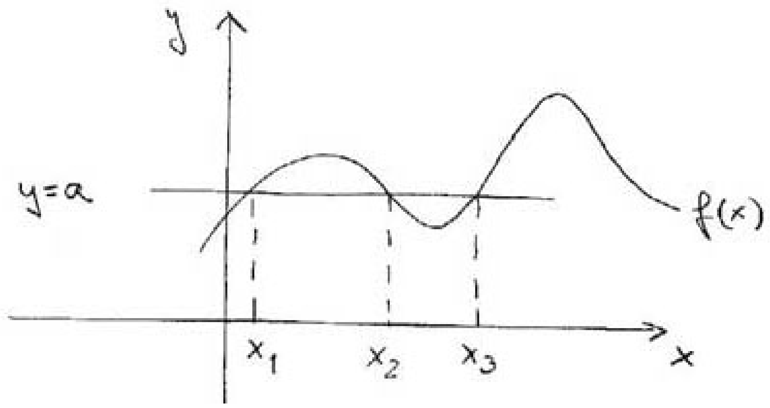
$\square$

**Zadatak 7.9.** *Neka je $f(x) = x^2 + 1$. Odredite $Y$ tako da $f : \mathbb{R} \longrightarrow Y$ bude surjekcija.*

*Rješenje.* Ako je $f : \mathbb{R} \longrightarrow Y$ surjekcija onda za svako $y \in Y$ mora postojati $x \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x) = y$. To znači da je $y = x^2 + 1$. Jer je $x^2 \geq 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$ slijedi da je $y = x^2 + 1 \geq 1$. Prema tome, ako definiramo $Y = [1, +\infty)$ imamo surjektivnost jer u tom slučaju za dani $y$ odgovarajući $x$ ima oblik $\sqrt{y-1}$. $\square$

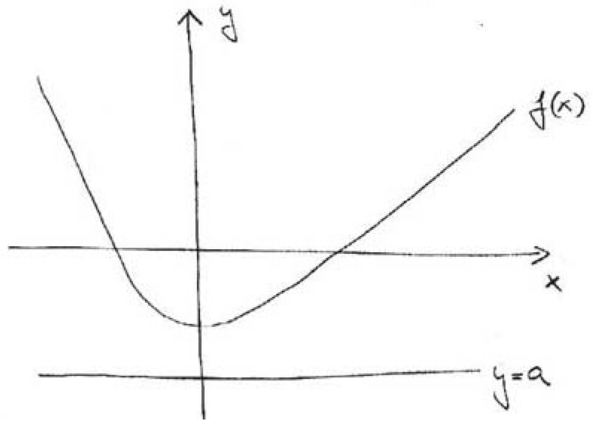
**Napomena.** *Osim računski, moguće je napraviti i* ***grafičku provjeru injektivnosti i surjektivnosi*** *zadane funkcije:*

*(i) Injektivnost: povlačimo pravce paralelene s $x$-osi, tj. pravce oblika $y = b$. Ako bi postojao barem jedan takav pravac koji siječe graf zadane funkcije $f$ u više od jedne točke (npr. dvije, funkcija $f$ ne bi bila injekcija. Naime, te točke presjeka imale bi koordinate $(x_1, b)$ i $(x_2, b)$ pa bi vrijedilo $f(x_1) = f(x_2) = b$, što je u suprotnosti s definicijom injektivnosti. Ako takav pravac ne postoji, tj. svaki pravac $y = b$ siječe graf funckije $f$ u najviše jednoj točki, funkcija $f$ je injekcija. Vvidi Sliku 7.2 za primjer funkcije koja nije injekcija - izabrani pravac siječe graf funkcije u više od jedne točke).*




Slika 7.2: Grafička provjera injektivnosti - neinjektivna funkcija

*(ii) Surjektivnost: ponovno povlačimo pravce paralelne s $x$-osi tj, pravce oblika $y = b$. Ako bi postojao barem jedan takav pravac koji ne siječe graf zadane funkcije $f$ niti u jednoj točki, funkcija $f$ ne bi bila surjekcija. Naime, to bi značilo da za element kodomene $b$ nema odgovarajućeg $x \in \mathcal{D}_f$ takvog da vrijedi $f(x) = b$ (možemo reći da $b$ nije "pogođen" od strane niti jednog elementa domene). Ako takav pravac ne postoji, tj. svaki pravac $y = b$ siječe graf funkije $f$ u barem jednoj točki, funkcija $f$ je surjekcija. Vidi Sliku 7.3 za primjer funkcije koja nije surjekcija - izabrani pravac nema presječnih točaka s grafom funkcije.*




Slika 7.3: Grafička provjera surjektivnosti - nesurjektivna funkcija

**Zadatak 7.10.** *Provjerite grafički injektivnost i surjektivnost sljedećih funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:*

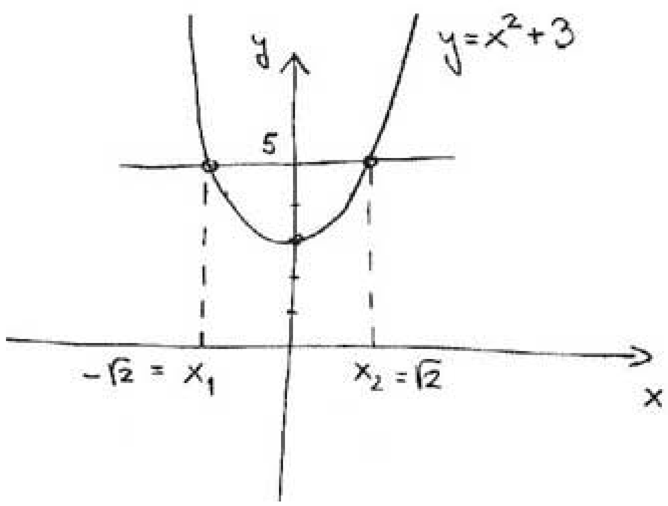
*(i)* $f(x) = x^2 + 3$

*(ii)* $f(x) = |x+1|$

*(iii)* $f(x) = x+3.$

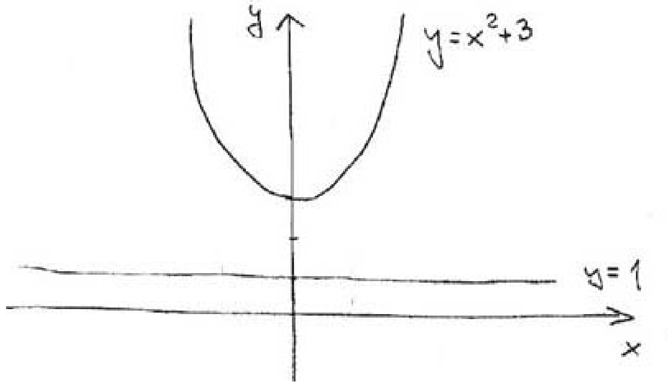
*Rješenje.*

1. Injektivnost: provjeramo možemo li naći pravac oblika $y = b$ koji bi sijekao graf funkcije $f$ u barem dvije točke. Ako uzmemo na primjer pravac $y = 5$, uviđamo da funkcija $f$ nije injekcija (vidi Sliku 7.4).




Slika 7.4: Zadatak 7.10.1.

Surjektivnost: provjeravamo postoji li pravac $y = b$ koji ne siječe graf funkcije $f$ niti u jednoj točki. To je na primjer pravac $y = 1$ pa vidimo da funkcija $f$ nije niti surjekcija (vidi Sliku 7.5).




Slika 7.5: Zadatak 7.10.1.

□

## 7.3 Kompozicija funkcija i inverzna funkcija

**Definicija.** *Neka su zadane dvije funkcije, $f$ i $g$. Funkcija koja svakom elementu $x \in \mathcal{D}_f$ pridružuje element $g(f(x)) \in \mathcal{R}_g$ zove se* ***kompozicija funkcija*** *$g$ i $f$ i označava s $g \circ f$. Dakle, po definiciji je*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

**Definicija.** *Ako je $f$ bijekcija, onda za svaki element $y \in \mathcal{R}_f$ postoji jedinstveni $x \in \mathcal{D}_f$ takav da je $f(x) = y$. To nam omogućuje da definiramo novu funkciju, $f^{-1} : \mathcal{R}_f \longrightarrow \mathcal{D}_f$ koja svakom elementu $y \in \mathcal{R}$ pridružuje $x \in \mathcal{D}_f$ takav da vrijedi $f(x) = y$. Funkciju $f^{-1}$ zovemo* ***inverzna funkcija polazne funkcije*** *$f$. Nije teško vidjeti da vrijedi $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$ i $\mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f$. Također, možemo iskazati i osnovno kompozicijsko svojstvo koje vrijedi za funkciju i njoj inverznu funkciju:*

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) &= x \quad \text{za svaki} \quad x \in \mathcal{D}_f \\ (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) &= y \quad \text{za svaki} \quad y \in \mathcal{D}_{f^{-1}}, \end{aligned}$$

*što skraćeno možemo pisati*

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= id_{\mathcal{D}_f} \\ f \circ f^{-1} &= id_{\mathcal{D}_{f^{-1}}}, \end{aligned}$$

*gdje je id oznaka za identitetu, tj. funkciju koja svakoj vrijednosti argumenta vraća nju samu.*

**Zadatak 7.11.** *Neka je $f(x) = x^3 - x$. Odredite:*

*(i)* $f \circ f$

*(ii)* $(f \circ (f \circ f))^{-1}$.

**Zadatak 7.12.** *(i) Neka je $f(x) = x+2$, $g(x) = 3-x^2$. Da li vrijedi $f \circ g = g \circ f$? Za koje $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$?*

*(ii) Neka je $f(x) = x + 2$, $g(x) = 1 - \sqrt{x}$ i $h(x) = x^2 + 3$. Provjerite: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.*

Navedena tvrdnja, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, vrijedi za sve funkcije $f$, $g$ i $h$ za koje su te kompozicije dobro definirane, tj. operacija kompozicije ima svojstvo asocijativnosti.

**Napomena.** *U sljedećem zadatku pokazujemo* ***računsku metodu invertiranja*** *zadane funkcije.*

**Zadatak 7.13.** *Za funkciju $f(x)$ izračunajte inverznu funkciju ako je* *(i)* $f(x) = x^2 - 1$

*(ii)* $f(x) = \log \frac{x}{2}$

*(iii)* $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$

*(iv)* $f(x) = (5 + 3^x)^2$.

*Rješenje.*

1. Najprije određujemo područje na kojem je zadana funkcija bijekcija. Imamo $x^2 - 1 \geq -1$ pa ćemo kodomenu ograničiti na $[-1, +\infty\rangle$. Ako domenu ograničimo na $x \geq 0$, imamo i injektivnost: $x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$ jer $|x| = x$ ako $x \geq 0$. Stoga promatramo $f : [0, +\infty\rangle \longrightarrow [-1, +\infty\rangle$. Za ovako definiranu bijekciju inverzna funkcija se dobiva na sljedeći način: $y = x^2 - 1 \Rightarrow y + 1 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y - 1}$ pa je $f^{-1}(y) = \sqrt{y - 1}$, gdje je $f : [-1, +\infty\rangle \longrightarrow [0, +\infty\rangle$.

2. Domena ove funkcije je $x > 0$ zbog svojstava logaritma. Iz istih razloga je kodomena čitav $\mathbb{R}$. Injektivnost imamo na čitavoj domeni jer $\log \frac{x_1}{2} = \log \frac{x_2}{2} \Rightarrow 10^{\log \frac{x_1}{2}} = 10^{\log \frac{x_2}{2}} \Rightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{2} \Rightarrow x_1 = x_2$. Znači, imat ćemo $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \langle 0, +\infty\rangle$, a nalazimo je na sljedeći način: $y = \log \frac{x}{2} \Rightarrow 10^y = 10^{\log \frac{x}{2}} \Rightarrow 10^y = \frac{x}{2}$ pa $2 \cdot 10^y = x$ i konačno $f^{-1}(y) = 2 \cdot 10^y$.

$\square$

**Napomena.** *Osim računskim putem, postoji i metoda* ***grafičkog nalaženja inverzne funkcije****. Naime, za zadanu funkciju $f$ graf inverzne funkcije $f^{-1}$ dobijemo tako da preslikamo, tj. zrcalimo graf funkcije $f$ obzirom na pravac $y = x$.*

**Zadatak 7.14.** *Nacrtajte graf inverzne funkcije ako je funkcija $f$ zadana s:*

*(i)* $f(x) = x^2$

*(ii)* $f(x) = -x + 1$

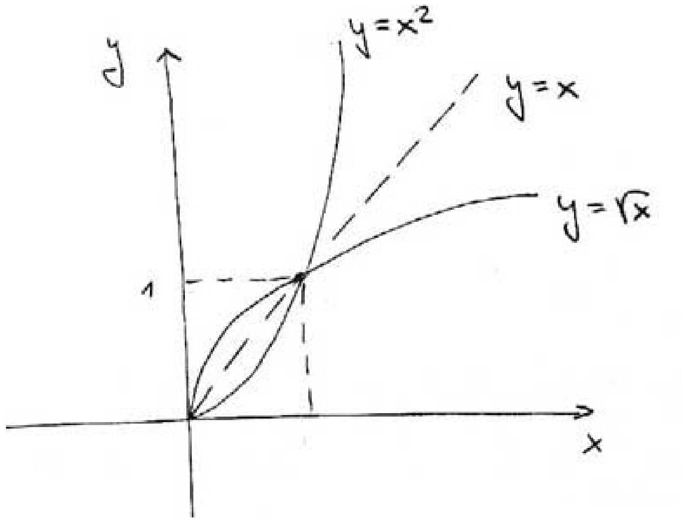
*(iii)* $f(x) = x^3 - 1$.

*Rješenje.*

1. Funkcija $f(x) = x^2$ je bijekcija ako joj ograničimo domenu na $x \geq 0$, a kodomenu na $y \geq 0$. Tada je inverz dan sa $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ (vidi Sliku 7.6).

2. Svaka linearna funkcija je bijekcija pa možemo odmah tražiti inverz: $y = -x + 1 \Rightarrow y - 1 = -x \Rightarrow x = -y + 1$ i dobivamo $f^{-1}(y) = -y + 1$. Zaključujemo da je graf inverzne funkcije istovjetan grafu početne funkcije (vidi Sliku 7.7).

$\square$




Slika 7.6: Zadatak 7.14.1.

## 7.4 Parnost i neparnost

**Definicija.** *Funkciju $f(x)$ definiranu u simetričnom području $-a < x < a$ nazivamo* ***parnom funkcijom*** *ako je $f(-x) = f(x)$, a* ***neparnom funkcijom*** *ako je $f(-x) = -f(x)$ za svaki $x \in \mathcal{D}_f$. Parna funkcija ima svojstvo da joj je graf simetričan obzirom na $y-$os, dok neparna funkcija ima graf simetričan obzirom na ishodište koordinatnog sustava.*

**Primjer 7.15.** *Uobičajeni primjer parnih funkcija su parne potencije $f(x) = x^{2n}$ (gdje je $n$ prirodan broj). Na primjer, za $f(x) = x^2$ vrijedi $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ (vidi Sliku 7.8). Slično se može pokazati i da je funkcija $f(x) = \cos x$ parna funkcija. Za neparnu funkciju tipičan je primjer neparna potencija $f(x) = x^{2n+1}$ (gdje je $n$ prirodan broj). Na primjer, funkcija $f(x) = x^3$ je neparna jer vrijedi $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ (vidi Sliku 7.9). Slično se može pokazati i da je funkcija $f(x) = \sin x$ neparna.*

**Zadatak 7.16.** *Odredite parnost ili neparnost sljedećih funkcija:*

*(i)* $f(x) = x^2 - x^4$

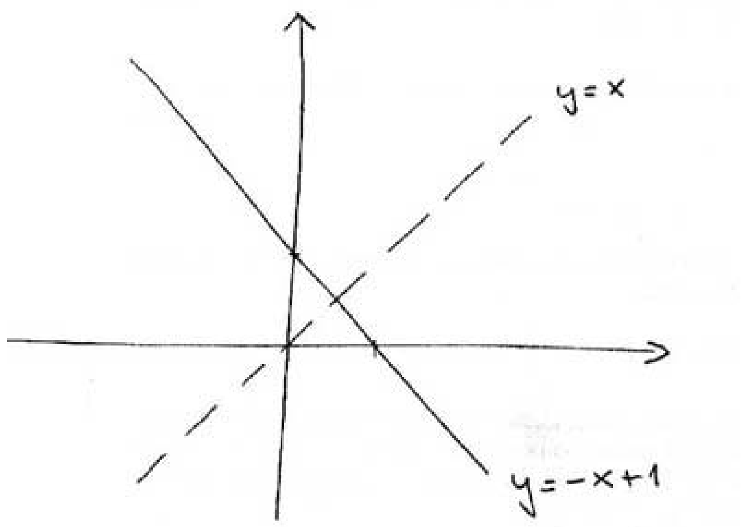
*(ii)* $f(x) = \sin(\cos x)$

*(iii)* $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$.

*Rješenje.*

1. U izraz za funkciju $f$ uvrštavamo $-x$ umjesto $x$:

$$f(-x) = (-x)^2 - (-x)^4 = x^2 - x^4 = f(x),$$




Slika 7.7: Zadatak 7.14.2.

što pokazuje da je funkcija parna.

2. $f(-x) = \sin(\cos(-x)) = \sin(\cos x) = f(x)$ i vidimo da je $f$ parna.

3.

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sqrt{1+(-x)+(-x)^2} - \sqrt{1-(-x)+(-x)^2} = \\ &= \sqrt{1-x+x^2} - \sqrt{1+x+x^2} = \\ &= -(-\sqrt{1-x+x^2} + \sqrt{1+x+x^2}) = -f(x) \end{aligned}$$

pa je $f$ neparna funkcija.

□

**Zadatak 7.17.** *Odredite pomoću grafa parnost ili neparnost sljedećih funkcija:*

*(i)* $f(x) = x^2 + 1$

*(ii)* $f(x) = x^3$

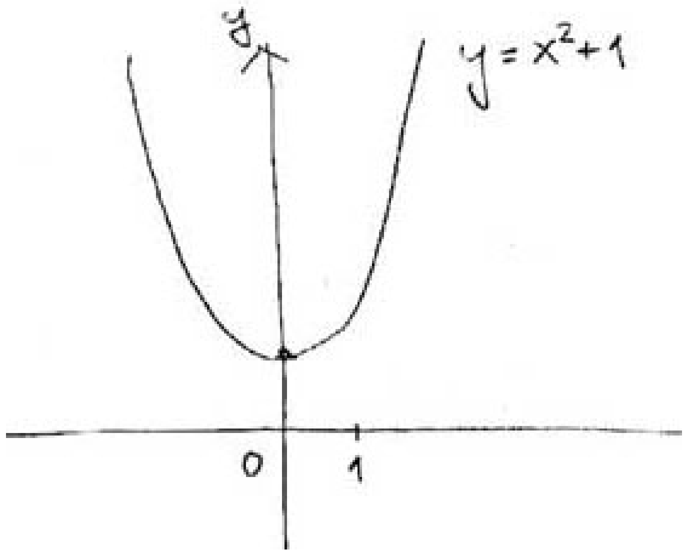
*(iii)* $f(x) = \sin x$.

*Rješenje.*

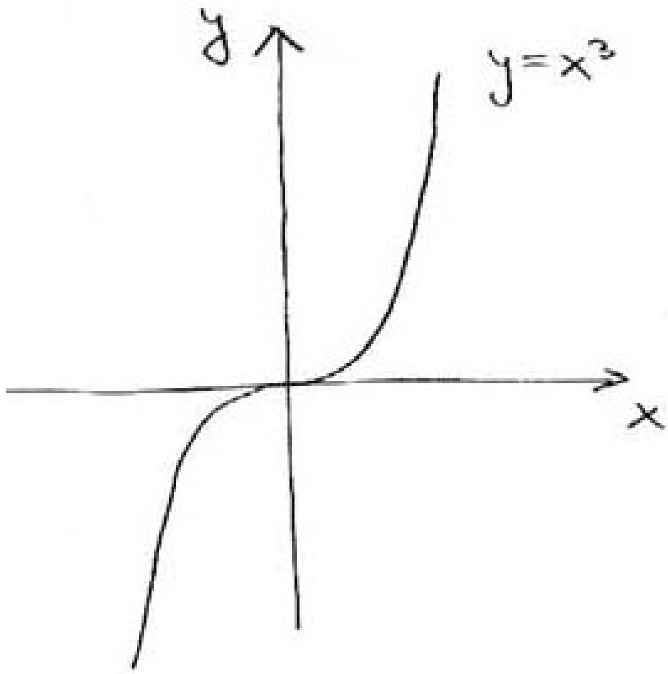
1. Graf zadane funkcije je očito simetričan obzirom na $y-$os (vidi Sliku 7.8) pa zaključujemo da je funkcija parna.

2. Graf zadane funkcije je simetričan obzirom na ishodište pa je $f$ neparna funkcija (vidi Sliku 7.9).

□




Slika 7.8: Zadatak 7.17.1. - primjer parne funkcije




Slika 7.9: Zadatak 7.17.2. - primjer neparne funkcije

# Poglavlje 8

# Elementarne funkcije. Funkcije važne u primjenama

## 8.1 Linearna funkcija

**Definicija.** ***Linearna funkcija*** *je funkcija $f(x) = ax + b$, gdje su parametri $a$ i $b$ realni brojevi, s time da je $a$,* ***koeficijent smjera****, različit od nule, dok $b$,* ***odsječak na osi*** *$y$, može poprimiti bilo koju realnu vrijednost.*

**Teorem.** *Svaka linearna funkcija je bijekcija i njoj pripadna inverzna funkcija je opet linearna. Graf linearne funkcije je pravac.*

**Zadatak 8.1.** *Nađite linearnu funkciju čiji graf prolazi točkama $(0, 1)$ i $(1, -1)$. Je li ta funkcija rastuća ili padajuća? Napišite još tri točke kojima prolazi graf te funkcije.*

*Rješenje.* Uvrštavanjem zadanih točaka u vezu $y = ax + b$ dobivamo sljedeći sustav jednadžbi u nepoznanicama $a$ i $b$:

$$\begin{aligned} b &= 1 \\ a + b &= -1, \end{aligned}$$

rješavanjem kojeg odmah dobivamo da je $a = -2$, $b = 1$. Tražena linearna funkcija stoga glasi $f(x) = -2x + 1$. Kako je koeficijent smjera negativan, funkcija je padajuća. Da bismo napisali još tri točke kojima prolazi graf te funkcije, dovoljno je u $y = -2x + 1$ uvrstiti neke tri vrijednosti za $x$ (recimo $x = 2$, $x = 3$ i $x = 4$) i izračunati odgovarajući $y$. □

**Zadatak 8.2.** *Je li funkcija iz Zadatka 8.1 bijekcija? Ako jest, nađite $f^{-1}$ i nacrtajte grafove funkcija $f$ i $f^{-1}$.*

*Rješenje.* Da bismo dokazali da je funkcija $f(x) = -2x + 1$ bijekcija, treba pokazati da je injekcija i surjekcija:

(i) Funkcija $f$ **je injekcija:** mora vrijediti da za sve $x_1$ i $x_2$ takve da je $f(x_1) = f(x_2)$ nužno slijedi da je i $x_1 = x_2$. Računamo:

$$-2x_1 + 1 = -2x_2 + 1 \Rightarrow -2x_1 = -2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

i funkcija je očito injekcija.

(ii) Funkcija $f$ **je surjekcija:** mora vrijediti da za svaki $y_0 \in \mathbb{R}$ postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x_0) = y_0$, što znači $-2x_0 + 1 = y_0$. Odavdje možemo izračunati $x_0$:

$$-2x_0 + 1 = y_0 \Rightarrow -2x_0 = y_0 - 1 \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}.$$

Dakle, traženi $x_0$ je $x_0 = -\frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}$. Da je to dobar $x_0$ gotovo je očito, ali ipak provjeravamo da je $f(x_0) = y_0$ :

$$f(x_0) = -2x_0 + 1 = -2(-\frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}) + 1 = y_0 - 1 + 1 = y_0,$$

što je i trebalo dobiti. Ovu operaciju možemo obaviti za sve $y_0 \in \mathbb{R}$, pa je $f$ očito surjekcija.

Dakle, $f$ je bijekcija, pa ima inverznu funkciju $f^{-1}$:

$$f(x) = -2x + 1 \Rightarrow x = -2f^{-1}(x) + 1 \Rightarrow 2f^{-1}(x) = -x + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

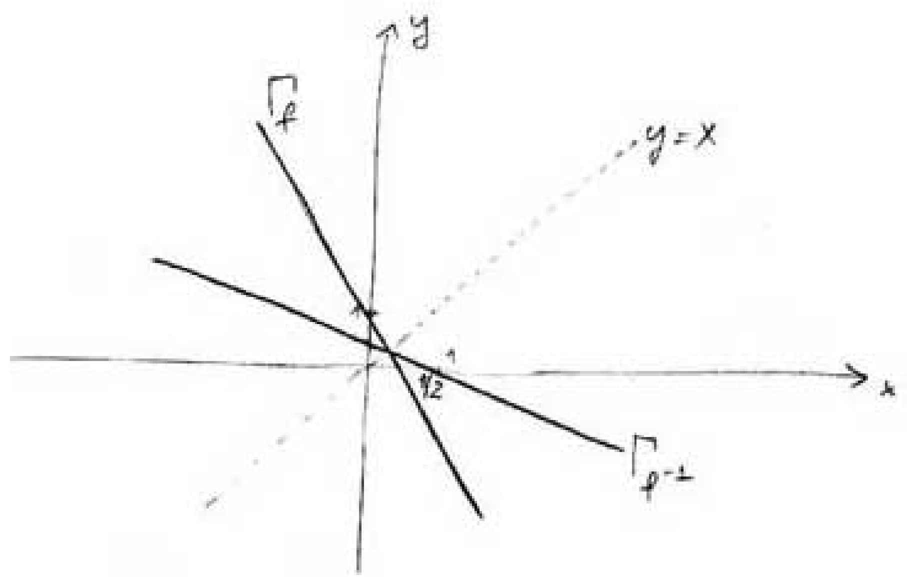
Još treba nacrtati grafove funkcija $f$ i $f^{-1}$, što nije teško budući da su oni pravci. Koristimo pri crtanju informacije kao što su odsječak na osi $y$ i koeficijent smjera. Primijetite da se graf funkcije $f^{-1}$ dobiva zrcaljenjem grafa funkcije $f$ obzirom na pravac $y = x$ (vidi Sliku 8.1). $\square$

## 8.2 Kvadratna funkcija

**Definicija.** ***Kvadratna funkcija*** *je funkcija $f(x) = ax^2+bx+c$, gdje su parametri $a$, $b$ i $c$ realni brojevi, s time da je $a$ različit od nule.*

**Teorem.** *Kvadratne funkcije općenito nisu bijekcije, ako uzimamo da je domena i kodomena čitav skup realnih brojeva. Međutim, uz ograničenje domene i kodomene na odgovarajuće manje skupove moguće je postići bijektivnost (više o tome u Zadatku 8.4). Graf kvadratne funkcije je parabola s istaknutom točkom, tzv. tjemenom $T$, kojeg računamo prema formuli $T(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$, gdje je $D = b^2 - 4ac$ diskriminanta kvadratne funkcije. Presjek parabole s $x-$osi može, ali ne mora postojati, ovisno o tome jesu li rješenja pripadne kvadratne jednadžbe realni ili kompleksni brojevi:*

*(i) ako je $D > 0$ postoje dvije realne nultočke dane s $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ i graf funkcije u dvije točke siječe $x-$os*




Slika 8.1: Zadatak 8.2

(ii) *ako je $D = 0$ funkcija ima dvostruku realnu nultočku danu s*

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

*i graf funkcije siječe (točnije, dodiruje) $x-$os u jednoj točki, a ta točka je ujedno i točka tjemena*

(iii) *ako je $D < 0$ funkcija nema realnih nultočaka, tj. obje nultočke $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ su kompleksni brojevi i graf funkcije ne siječe $x-$os.*

*Intervale rasta i pada dobijemo tako da $x-$koordinata točke tjemena $x_0 = -\frac{b}{2a}$ dijeli domenu (čitav skup realnih brojeva) na dva intervala: $< -\infty, x_0 >$ i $< x_0, \infty >$. Jedan od ta dva intervala je interval rasta, a drugi pada, ovisno o tome je li $a > 0$ ili $a < 0$:*

(i) *ako je $a > 0$ graf je "okrenut prema gore" (konveksan), tjeme predstavlja točku lokalnog minimuma i u skladu s tim $< -\infty, x_0 >$ je interval pada, a $< x_0, \infty >$ je interval rasta*

(ii) *ako je $a < 0$ graf je "okrenut prema dolje" (konkavan), tjeme predstavlja točku lokalnog maksimuma i u skladu s tim $< -\infty, x_0 >$ je interval rasta, a $< x_0, \infty >$ je interval pada.*

**Zadatak 8.3.** *Nađite kvadratnu funkciju čiji graf prolazi točkama $(0, 1)$, $(1, 1)$ i $(-1, 3)$. Izračunajte koordinate točke tjemena. Je li to tjeme u ovom slučaju točka* *lokalnog minimuma ili maksimuma? Nađite intervale rasta i pada ove funkcije, te napišite još tri točke kojima prolazi graf te funkcije.*

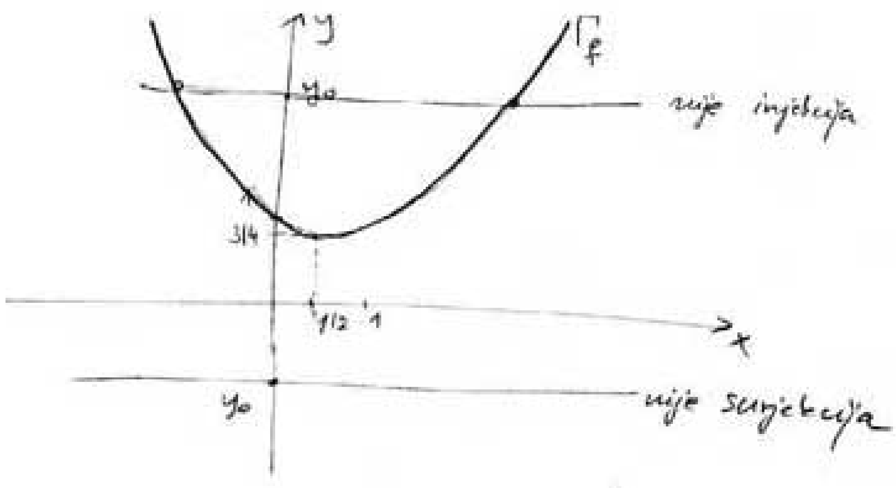
*Rješenje.* Uvrštavanjem vrijednosti tri zadane točke u kvadratnu vezu $y = ax^2 + bx + c$ dobivamo sustav

$$\begin{aligned} c &= 1 \\ a+b+c &= 1 \\ a-b+c &= 3, \end{aligned}$$

čije rješenje glasi: $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$ pa je tražena kvadratna funkcija $f(x) = x^2 - x + 1$. Kako je koeficijent $a$ pozitivan, graf ove kvadratne funkcije će biti konveksna parabola ("okrenuta prema gore"), pa će točka tjemena biti točka lokalnog minimuma (vidi Poglavlje 11 za objašnjenje pojmova). Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti za $a$, $b$ i $c$ u formulu za točku tjemena dobivamo $T = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. To je ujedno i točka lokalnog minimuma funkcije. Iz konveksnog oblika grafa i poznavanja točcke tjemena vidimo da funkcija pada na intervalu $< -\infty, \frac{1}{2} >$, a raste na intervalu $< \frac{1}{2}, \infty >$. Da nađemo još tri točke kojima prolazi graf ove funkcije dovoljno je izabrati tri vrijednosti za $x$ i uvrstiti ih u $y = x^2 - x + 1$. $\square$

**Zadatak 8.4.** *Provjerite korištenjem grafa funkcije $f$ iz Zadatka 8.3 je li $f$ bijekcija, ako zadamo da su domena i kodomena čitav skup realnih brojeva? Ako nije, kako treba ograničiti kodomenu da ona postane surjekcija? Kako treba ograničiti domenu da ona postane injekcija?*

*Rješenje.* Funkcija nije bijekcija, u što se možemo uvjeriti ako nacrtamo njen graf (vidi Sliku 8.2). Naime, funkcija će biti bijekcija ako za svaki $y_0$ iz kodomene (svaki




Slika 8.2: Zadatak 8.4

$y_0 \in \mathbb{R}$, tj. s $y-$osi) možemo naći **točno** jedan $x_0$ iz domene (točno jedan $x_0 \in \mathbb{R}$, tj. s $x-$osi) takav da je $f(x_0) = y_0$. To provjeravamo tako da povlačimo kroz $y_0$ pravac okomit na $y-$os, tražimo sjecište s grafom funkcije $f$ i iz točke sjecišta povlačimo pravac okomit na $x-$os - na mjestu gdje taj pravac siječe $x-$os bi trebao biti traženi $x_0$. Dok je kod linearne funkcije takav postupak moguće provesti za svaki izbor $y_0$ s $y-$osi, vidimo da ovdje postoje sljedeći problemi:

(i) Funkcija $f$ **nije surjektivna:** za sve $y_0 < \frac{3}{4}$ (dakle, sve $y_0$ koji se nalaze "ispod" točke na $y-$ osi koja predstavlja $y-$koordinatu točke tjemena $T$) nije moguće provesti gore opisani postupak, jer pravac kroz takav $y_0$ okomit na $y-$os uopće neće sijeći graf funkcije $f$

(ii) Funkcija $f$ **nije injektivna:** za svaki $y_0 > \frac{3}{4}$ (dakle, sve $y_0$ koji se nalaze "iznad" točke na $y-$ osi koja predstavlja $y-$koordinatu točke tjemena $T$) pravac kroz $y_0$ okomit na $y-$os siječe graf funkcije $f$, ali ne u točno jednoj točki, već uvijek u dvije točke, što se kosi s definicijom injektivnosti.

Dakle, $f$ nije bijekcija (kao, uostalom, niti jedna druga kvadratna funkcija). Međutim, moguće je **ograničiti** domenu i kodomenu da ona postane bijekcija:

(i) **Ograničenje kodomene - postizanje surjektivnosti:** treba uzeti da je kodomena jednaka intervalu $[\frac{3}{4}, \infty >$ jer ćemo tada imati surjektivnost - ona zahtijeva da za svaki $y_0$ **postoji** $x_0$ takav da je $f(x_0) = y_0$, dakle **barem jedan** takav $x_0$ - a to će u slučaju ovakvog izbora kodomene sigurno biti ispunjeno

(ii) **Ograničenje domene - postizanje injektivnosti:** možemo uzeti da je kodomena jednaka intervalu $< -\infty, \frac{1}{2}]$ **ili** $[\frac{1}{2}, \infty >$. Naime, injektivnost zahtijeva da za svaki $y_0$ iz kodomene postoji **najviše** jedan $x_0$ takav da je $f(x_0) = y_0$. S obzirom da parabola ima dva kraka, lijevi i desni, moramo se odlučiti za samo jedan od njih - točka tjemena (točnije, njena $x-$koordinata) govori kako moramo "podijeliti" domenu da ona definira injektivnu funkciju - ako se odlučimo za interval $< -\infty, \frac{1}{2}]$ odabrali smo lijevi krak parabole, a uz $[\frac{1}{2}, \infty >$ odlučili smo se za desni krak. Oba izbora su dobra, pa se ovdje možemo odlučiti za npr. desni krak, tj. definirati da je domena dana s $[\frac{1}{2}, \infty >$.

Dakle, možemo za $f(x) = x^2 - x + 1$ definirati $f : [\frac{1}{2}, \infty > \to [\frac{3}{4}, \infty >$ - tako definirana funkcija $f$ bit će bijekcija. $\square$

**Zadatak 8.5.** *Pokažite računski da funkcija $f$ iz Zadatka 8.4 nije bijekcija.*

*Rješenje.* Pokazujemo da $f(x) = x^2 - x + 1$ nije bijekcija:

(i) Funkcija $f$ **nije injekcija:** treba pokazati da iz $f(x_1) = f(x_2)$ ne slijedi nužno da je $x_1 = x_2$:

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_1 + 1 &= x_2^2 - x_2 + 1 \\ x_1^2 - x_2^2 - x_1 + x_2 &= 0 \\ (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - (x_1 - x_2) &= 0 \\ (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Vidimo da očito postoje dvije mogućnosti:

a) $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

b) $x_1 + x_2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 + 1$

pa ne slijedi nužno da je $x_1 = x_2$. Dakle, $f$ nije injekcija.

(ii) Funkcija $f$ **nije surjekcija:** treba vidjeti da za sve $y_0 \in \mathbb{R}$ ne postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x_0) = y_0$:

$$\begin{aligned} x_0^2 - x_0 + 1 &= y_0 \\ x_0^2 - x_0 + 1 - y_0 &= 0, \end{aligned}$$

što možemo shvatiti kao jednadžbu po $x_0$. Ta će jednadžba imati **realna** rješenja (a takve $x_0$ tražimo) ako je diskriminanta $D$ nenegativna:

$$D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot (1 - y_0) = 4y_0 - 3 \geq 0,$$

dakle ako je $y_0 \geq \frac{3}{4}$. Očito samo za takve $y_0 \in \mathbb{R}$ postoje $x_0$ takvi da je $f(x_0) = y_0$ (njih dobivamo rješavanjem gornje kvadratne jednadžbe po $x_0$). Međutim, za $y < \frac{3}{4}$ takvi $x_0$ ne postoje, jer gornja kvadratna jednadžba neće imati realnih rješenja. Dakle, ako za kodomenu uzmemo čitav skup realnih brojeva, $f$ nije surjektivna.

$\square$

**Zadatak 8.6.** *Odredite intervale rasta i pada, točku tjemena te točke presjeka s $x-$osi (realne nultočke) za sljedeće kvadratne funkcije:*

*(i)* $f(x) = -x^2 - x + 6$

*(ii)* $f(x) = x^2 + 3x - 3$

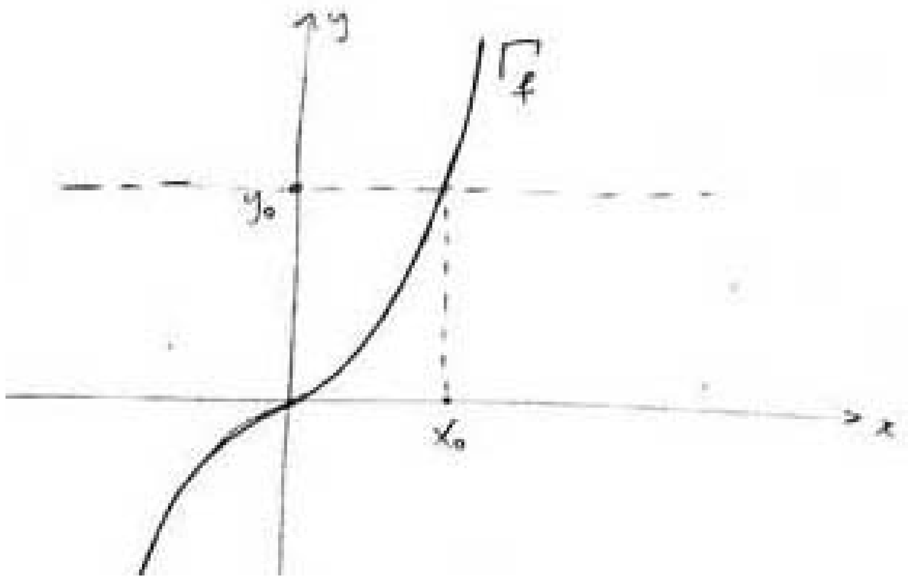
*(iii)* $f(x) = x^2 - 2x + 4.$

## 8.3 Kubna funkcija

**Definicija.** ***Kubna funkcija*** *je funkcija* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, *gdje su parametri* $a$, $b$, $c$ *i* $d$ *realni brojevi, s time da je* $a$ *različit od nule.*

**Zadatak 8.7.** *Nacrtajte u istom koordinatnom sustavu grafove funkcija* $f(x) = x^3$ *i* $g(x) = (x-1)^3 + 2$. *Jesu li te funkcije bijekcije? Napišite* $f^{-1}$ *i* $g^{-1}$ *ako jesu.*

*Rješenje.* Graf funkcije $f$ je kubna parabola koja raste na cijeloj domeni, siječe $x$-os u $x = 0$, a $(0,0)$ je ujedno i točka infleksije (vidi Sliku 8.3). Iz grafa funkcije




Slika 8.3: Zadatak 8.7 - graf funkcije $f$

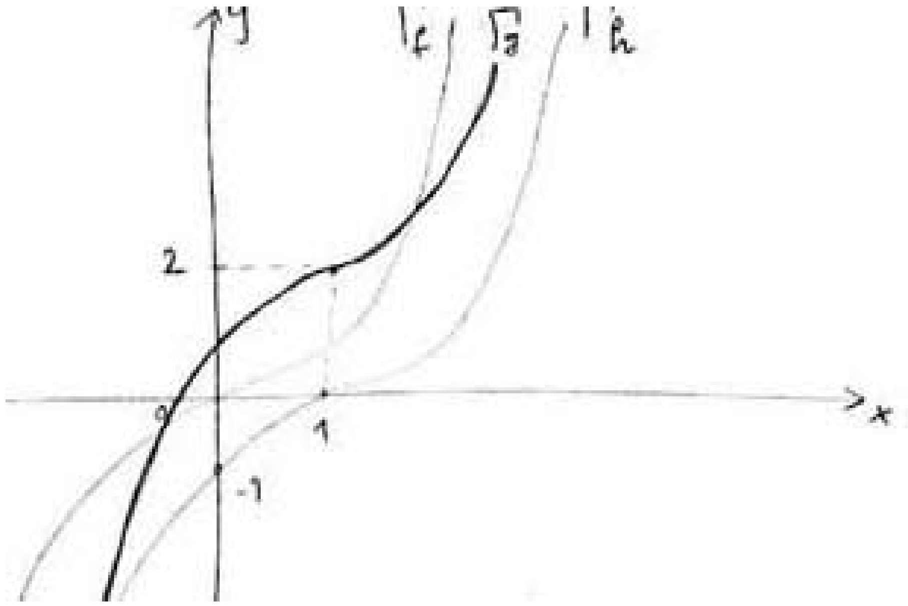
$f$ vidimo da je ona bijekcija, jer za svaki $y_0 \in \mathbb{R}$ postoji **jedinstveni** $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x_0) = y_0$. Da nađemo inverz funkcije $f$ u izrazu $y = x^3$ radimo formalnu zamjenu varijabli $x$ i $y$ i računamo eksplicitno $y$:

$$x = y^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$$

pa je $f^{-1} = \sqrt[3]{x}$. Graf funkcije $g(x) = (x-1)^3 + 2$ dobiva se iz grafa funkcije $f$ translacijom: $-1$ označava da graf funkcije $f(x) = x^3$ translatiramo udesno duž $x-$osi za 1 - time dolazimo do grafa pomoćne funkcije $h(x) = (x-1)^3$, dok $+2$ označava da graf funkcije $h(x) = (x-1)^3$ translatiramo za 2 prema gore duž $y-$osi - time dolazimo do grafa funkcije $g$ (vidi Sliku 8.4). Jasno je da je i ova funkcija bijekcija, jer je njen graf jednak grafu funkcije $f$, uz određeni translatorni pomak. Računamo $g^{-1}$:

$$x = (y-1)^3 + 2 \Rightarrow (y-1)^3 = x - 2 \Rightarrow y - 1 = \sqrt[3]{(x-2)} \Rightarrow y = \sqrt[3]{(x-2)} + 1,$$

odakle izlazi da je $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{(x-2)} + 1$. □



Slika 8.4: Zadatak 8.7 - graf funkcije $g$

## 8.4 Eksponencijalna i logaritamska funkcija

**Zadatak 8.8.** *Napišite primjer jedne rastuće i jedne padajuće eksponencijalne funkcije.*

**Zadatak 8.9.** *Nacrtajte graf funkcije $f(x) = 3^x$, pokažite na svojstvima grafa da je bijekcija i nacrtajte na istoj slici inverznu funkciju te funkcije. Kako se zove ta inverzna funkcija?*

**Zadatak 8.10.** *Riješite jednadžbe:*

*(i)* $2^x = 8$

*(ii)* $\log_2 x = 3$

*(iii)* $4^x - 3 \cdot 2^x + 2.$

*Rješenje.*

(i) Rješavamo zadatak djelovanjem inverznom funkcijom funkcije $f(x) = 2^x$, tj. funkcijom logaritmiranja po bazi 2 i koristimo svojstvo $\log_a a^x = x$:

$$2^x = 8 / \log_2$$

$$x = \log_2 8 = \log_2 2^3$$

$$x = 3.$$

(ii) Kao u prethodnom zadatku, djelujemo inverznom funkcijom funkcije $f(x) = \log_2 x$, tj. eksponencijalnom funkcijom s bazom 2 i koristimo svojstvo $\log_a a^x = x$:

$$\log_2 x = 3/2^-$$
$$x = 2^3$$
$$x = 8.$$

(iii) Prepoznajemo da je $4^x = (2^x)^2$, pa uz supstituciju $2^x = t$ imamo

$$t^2 - 3t + 2,$$

čija su rješenja dana s $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. Stoga imamo dva rješenja:

$$2^x = 1/\log_2 \Rightarrow x = \log_2 1 = 0$$
$$2^x = 2/\log_2 \Rightarrow x = \log_2 2 = 1.$$

□

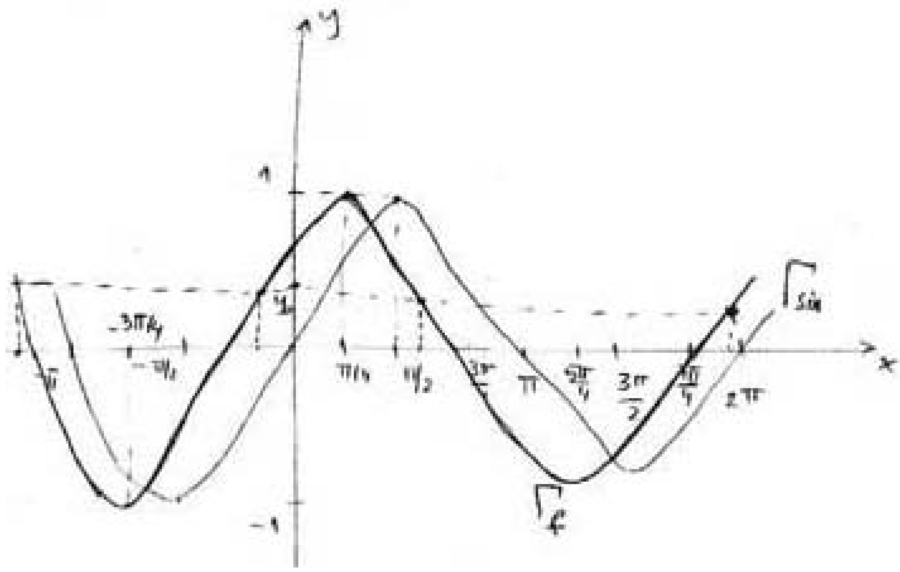
## 8.5 Trigonometrijske funkcije

**Zadatak 8.11.** *Pokažite da funkcija* $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ *dana s* $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$ *nije injekcija.*

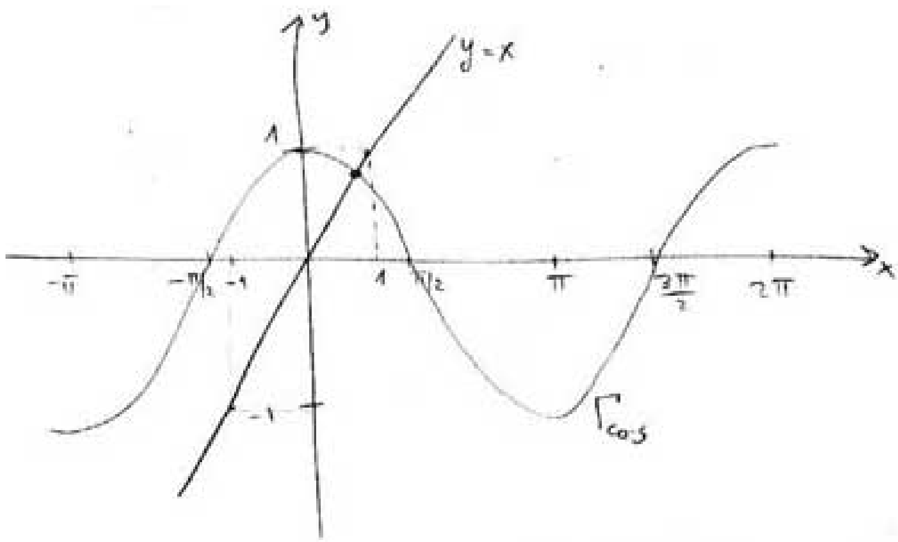
*Rješenje.* Graf funkcije $f$ dobivamo pomakom grafa funkcije $g(x) = \sin x$ za $\frac{\pi}{4}$ ulijevo duž $x-$osi (vidi Sliku 8.5). Očito je da ta funkcija nije injekcija, jer za svaki $y_0 \in [-1, 1]$ postoji beskonačno mnogo različitih $x_0$ takvih da je $f(x_0) = y_0$. Naime, pravac kroz $y_0$ okomit na $y-$os siječe graf funkcije $f$ u beskonačno mnogo točaka. □

**Zadatak 8.12.** *Pokažite grafički da jednadžba* $\cos x = x$ *ima samo jedno realno rješenje.*

*Rješenje.* Ovu ćemo jednadžbu grafički riješiti tako da nacrtamo grafove funkcija $f(x) = \cos x$ i $g(x) = x$. Jednadžba $f(x) = g(x)$ (tj. $\cos x = x$) ima geometrijskog značenje presjeka krivulja $y = f(x)$ i $y = g(x)$. Broj točaka presjeka tih krivulja odgovara broju realnih rješenja zadane jednadžbe. Nacrtajmo na istoj slici grafove tih funkcija (vidi Sliku 8.6). Vidimo da postoji samo jedna točka presjeka tih krivulja, pa i jednadžba ima samo jedno rješenje. □



Slika 8.5: Zadatak 8.11



Slika 8.6: Zadatak 8.12

# Poglavlje 9

# Pojam derivacije, geometrijsko i fizikalno značenje. Svojstva derivacija. Derivacije elementarnih funkcija

## 9.1 Limes funkcije

Limes funkcije $f(x)$ kada $x$ teži nekoj točki $a$ (ovdje $a$ može označavati i $\pm\infty$) možemo intuitivno shvatiti kao vrijednost kojoj funkcija $f$ teži kada $x$ ide u $a$. Označavamo ga sa $\lim_{x\to a} f(x)$ i on može, ali i ne mora postojati.

**Zadatak 9.1.** *Odredite sljedeće limese:*

*(i)* $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1}$

*(ii)* $\lim_{x\to 0} \frac{2}{x^4+6x+2}$

*(iii)* $\lim_{x\to 2}(\sin x)$.

*Rješenje.*

(i) Ako $x$ ide u $\infty$, onda $x^2+1$ ide također u $\infty$ pa imamo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} \text{"} = \text{"} \frac{1}{\infty} = 0.$$

(ii) Funkcija $f(x) = \frac{2}{x^4+6x+2}$ je dobro definirana u nuli pa samo uvrstimo $x=0$ i dobivamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{x^4+6x+2} = \frac{2}{0+0+2} = 1.$$

(iii) Analogno kao i gore:

$$\lim_{x\to 2}(\sin x) = \sin 2.$$

$\square$

Ako postoje limesi $\lim_{x\to a} f_1(x)$ i $\lim_{x\to a} f_2(x)$, onda vrijedi:

(i) $\lim_{x\to a}(f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x)$

(ii) $\lim_{x\to a} f_1(x)f_2(x) = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x)$

(iii) $\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f_1(x)}{\lim_{x\to a} f_2(x)}$ ako $\lim_{x\to a} f_2(x) \neq 0$.

**Zadatak 9.2.** *Nađite sljedeće limese koristeći gornja svojstva limesa:*

*(i)* $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x} \cdot (x^2 + 7x - 3)$

*(ii)* $\lim_{x\to 3}(e^x + 2\sqrt{3x})$

*(iii)* $\lim_{x\to 0} \frac{2x+6}{x^3+x+1}$

*Rješenje.*

1. Imamo:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{2} \cdot (x^2 + 7x - 3) = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{2} \cdot \lim_{x\to 1}(x^2 + 7x - 3) =$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{2} \cdot (\lim_{x\to 1}(x^2) + \lim_{x\to 1}(7x - 3)) = \frac{0}{2} \cdot (1 + 4) = 0 \cdot 5 = 0.$$

3. Imamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+6}{x^3+x+1} = \frac{\lim_{x\to 0}(2x+6)}{\lim_{x\to 0}(x^3+x+1)} =$$
$$= \frac{0+6}{0+0+1} = \frac{6}{1} = 6$$

$\square$

Ako tražimo limes kvocijenta dvaju polinoma u $x$ kada $x \to \infty$, preporučljivo je oba člana kvocijenta prethodno podijeliti sa $x^n$ gdje je $n$ najveća potencija tih polinoma. Analogno postupamo i u mnogim slučajevima razlomaka s iracionalnim izrazima. Ako su, nadalje, $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi i $P(a) \neq 0$ ili $Q(a) \neq 0$, limes

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dobivamo direktno. U slučaju da $P(a) = Q(a) = 0$, razlomak $\frac{P(x)}{Q(x)}$ dijelimo sa $(x - a)$ onoliko puta dok ne dođemo u situaciju gdje možemo računati direktno.

**Zadatak 9.3.** *Izračunajte limese:*

*(i)* $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^5+6x^3+3x+1}{x^5+6}$

*(ii)* $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{3x+\sqrt[3]{x}}$

*(iii)* $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

*(iv)* $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2+x-3}{x^3-3x^2+4x-2}$

*(v)* $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x-4}{\sqrt{x^4+1}}$

*(vi)* $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

*(vii)* $\lim_{x\to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

*(viii)* $\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$.

*Rješenje.*

1. Dijelimo s najvećom potencijom od $x$ i brojnik i nazivnik, a to je očito $x^5$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^5+6x^3+3x+1}{x^5+6} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{6}{x^2}+\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^5}}{1+\frac{6}{x^5}} = \frac{2}{1} = 2$$

jer faktori oblika $\frac{a}{x^n}$ gdje je $a$ neka konstanta a $n$ prirodan broj očito idu u nulu ako $x$ ide u $\infty$.

3. Oba polinoma (i onaj u brojniku i onaj u nazivniku) poprimaju konkretnu vrijednost za $x = 2$. Kako vrijednost nazivnika nije nula, limes dobivamo direktno:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \frac{2^3-3\cdot 2+2}{2^4-4\cdot 2+3} = \frac{4}{11}.$$

4. Ovdje su za $x = 1$ i brojnik i nazivnik nula. Dijelimo, dakle, oba polinoma sa $x-1$ i dobivamo:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2+x-3}{x^3-3x^2+4x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+2x+3)}{(x-1)(x^2-2x+2)} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x+3}{x^2-2x+2} = \frac{1+2+3}{1-2+2} = 6.$$

□

Limese koji sadrže iracionalne izraze možemo često dovesti u racionalni oblik uvođenjem nove varijable. Drugi način rješavanja takvih limesa je prebacivanje iracionalnosti iz brojnika u nazivnik ili obrnuto.

**Zadatak 9.4.** *Izračunajte limese:*

*(i)* $\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}$

*(ii)* $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

*(iii)* $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1-3x}-\sqrt{1+x}}{x}$

*(iv)* $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

*(v)* $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{1})$

*(vi)* $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x(x+a)}-x)$

*(vii)* $\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

*(viii)* $\lim_{x\to\infty}(x+\sqrt[3]{1-x^3})$.

*Rješenje.*

1. Koristimo jednakost

$$1-x=(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})$$

za racionalizaciju:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{(1-\sqrt[3]{x})}\frac{(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{1-x}=$$
$$=\lim_{x\to 1}(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})=3.$$

6. Opet racionaliziramo:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x(x+a)}-x)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x(x+a)}-x)\frac{(\sqrt{x(x+a)}+x)}{(\sqrt{x(x+a)}+x)}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x(x+a)-x^2}{\sqrt{x(x+a)}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{\sqrt{x(x+a)}+x}.$$

Tu je najveća potencija u brojniku i nazivniku $x$ pa dijelimo s tim:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{\sqrt{x(x+a)}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1}=\frac{a}{2}.$$

□

Za računanje limesa korisne su sljedeće formule:

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(ii) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

(iii) $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$

Neka je $f(x)$ pozitivna funkcija u nekoj okolini točke $a$ ($a \neq x$). Pri određivanju limesa oblika

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = C,$$

vrijedi sljedeće:

(i) ako egzistiraju konačni limesi

$$\lim_{x\to a} f(x) = A > 0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = B$$

gdje je $0 \leq A \leq +\infty$ i $-\infty < B < +\infty$ tada je $C = A^B$.

(ii) ako je $\lim_{x\to a} f(x) = A \neq 1$ i $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ onda $C$ pronalazimo neposredno

(iii) ako je $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ i $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, onda stavljamo $f(x) = 1 + \alpha(x)$ gdje $\alpha(x) \to 0$ kada $x \to a$ i prema tome

$$C = \lim_{x\to a}\left[(1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right]^{\alpha(x)g(x)} = e^{\lim_{x\to a} \alpha(x)g(x)} = e^{\lim_{x\to a}(f(x)-1)g(x)}.$$

Koristeći gornja pravila dobivamo da općenito vrijedi:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k.$$

**Zadatak 9.5.** *Izračunajte:*

*(i)* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x}$

*(ii)* $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

*(iii)* $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos x}{\pi - 3x}$

*(iv)* $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

*(v)* $\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x}$

*(vi)* $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$

*(vii)* $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\arctan \frac{\pi}{2}x}$

*(viii)* $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccos} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x}$.

*Rješenje.*

1. Koristimo $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x}{7x} \frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin 7x}{7x}} = \frac{5}{7} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin 7x}{7x}} = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{1} = \frac{5}{7}.$$

2. Imamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(\frac{1}{\cos x} - 1)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(\frac{1-\cos x}{\cos x})}{x^3} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3 \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \sin x \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3 \cos x} = 8 \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}}{\cos x} = 8$$

jer $\cos 0 = 1$.

□

**Zadatak 9.6.** *Izračunajte limese:*

*(i)* $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$

*(ii)* $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$

*(iii)* $\lim_{x\to 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}$

*(iv)* $\lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$

*(v)* $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

*(vi)* $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

*Rješenje.*

1. Ovo je slučaj (1) kod limesa oblika $\lim_{x\to a} (f(x))^{g(x)} = C$:

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1} = \lim_{x\to 1} = \left(\frac{1}{x+1}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

5. Ovo je slučaj (3) jer imamo očito $1^\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3-4}{x+3}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\left(-\frac{4}{x+3}\right)\right)^{x+2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left\{\left[\left(1+\left(-\frac{4}{x+3}\right)\right)^{-\frac{x+3}{4}}\right]^{-\frac{4}{x+3}}\right\}^{x+2} = \lim_{x\to\infty} e^{-4\frac{x+2}{x+3}} = e^{-4}.$$

□

Ako egzistira i pozitivan je $\lim_{x\to a} f(x)$, onda

$$\lim_{x\to a}(\ln f(x)) = \ln(\lim_{x\to a} f(x)).$$

Pomoću toga odmah dobivamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}(\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}) = \ln(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}) = \ln e = 1.$$

**Zadatak 9.7.** *Izračunajte:*

*(i)* $\lim_{x\to+\infty}(\ln(2x+1)-\ln(x+2))$

*(ii)* $\lim_{x\to\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$

*(iii)* $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$

*(iv)* $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$

*(v)* $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$

*(vi)* $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

*(vii)* $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{\sin x}$

*(viii)* $\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x-1}{x^2}$.

*Rješenje.*

1. Koristeći svojstva logaritamske funkcije dobivamo:

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln(2x+1)-\ln(x+2)) = \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right) = \ln\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x+2} = \ln 2.$$

5. Imamo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \left\{a^x-1=t,\ x=\frac{\ln(t+1)}{\ln a}\right\} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln a}} = \ln a.$$

□

## 9.2 L'Hospitalovo pravilo

**L'Hospitalovo pravilo:** koristi se za neodređene oblike tipa $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$. Drugim riječima, ako imamo $f$ i $g$ funkcije takve da $\frac{f(x)}{g(x)}$ teži ka $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$ ako $x \to a$, onda je

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

pod uvjetom da limes kvocijenta derivacija postoji. Ako razlomak $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ iznova daje neodređeni oblik u točki $x = a$ jednog od dva navedene tipa i $f'(x)$, $g'(x)$ udovoljavaju ranije navedenim zahtjevima za $f(x)$ i $g(x)$, onda se može prijeći na kvocijent drugih derivacija itd. Da bi našli vrijednosti neodređenog oblika $0 \cdot \infty$ pretvaramo odgovarajući produkt $f_1(x) \cdot f_2(x)$, gdje je $\lim_{x\to a} f_1(x) = 0$ i $\lim_{x\to a} f_2(x) = \infty$, u razlomak oblika

$$\frac{f_1(x)}{\frac{1}{f_2(x)}} \quad \left(\text{oblik } \frac{0}{0}\right) \quad \text{ili} \quad \frac{f_2(x)}{\frac{1}{f_1(x)}} \quad \left(\text{oblik } \frac{\infty}{\infty}\right).$$

U slučaju neodređenog oblika $\infty - \infty$ treba odgovarajuću razliku $f_1(x) - f_2(x)$ pretvoriti u produkt $f_1(x)\left(1 - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right)$ i riješiti prvo neodređeni oblik $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$. Ako je kojim slučajem $\lim_{x\to a} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = 1$, onda razliku $f_1(x) - f_2(x)$ pretvaramo u

$$\frac{1 - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{\frac{1}{f_1(x)}} \quad \left(\text{oblik } \frac{0}{0}\right).$$

**Zadatak 9.8.** *Koristeći L'Hospitalovo pravilo izračunajte limese:*

*(i)* $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}$

*(ii)* $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\cos x}{x+\sin x}$

*(iii)* $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x}$

*(iv)* $\lim_{x\to 1} \ln x \ln(x-1)$

*(v)* $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\cot x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right)$

*(vi)* $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

*(vii)* $\lim_{x\to\infty}(x - \ln x)$

*(viii)* $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

*Rješenje.*

1. Ovo je očito situacija $\frac{\infty}{\infty}$ pa primjenjujemo L'Hospitalovo pravilo i dobivamo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2} = L'H = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x} = L'H = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2} = \infty$$

jer $(e^x)' = e^x$, $(x^2)' = 2x$ i konačno $(2x)' = 2$.

3. Ovo je slučaj $\frac{0}{0}$, primjenjujemo L'Hospitalovo pravilo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x} = L'H = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3}{\cos^2 x - \cos^3 x} =$$
$$= L'H = \lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\sin x}{-2\cos x\sin x + 3\cos^2 x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x}{-2\cos x + 3\cos^2 x} = \frac{3}{-2+3} = 3.$$

□

## 9.3 Derivacija funkcije

Derivacijom $f'(x_0)$ funkcije $f$ u točki $x_0$ nazivamo limes kvocijenta $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ kada $h$ teži u nulu, odnosno

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

ako taj limes postoji. U tom slučaju kažemo da je funkcija $f$ derivabilna u točki $x_0$. Vrijednost derivacije $f'(x_0)$ daje *koeficijent smjera* tangente u točki $x_0$ na graf funkcije $f$. Određivanje derivacije nazivamo *deriviranjem funkcije.*

**Zadatak 9.9.** *Koristeći definiciju derivacije, izračunajte derivaciju sljedećih funkcija:*

*(i)* $f(x) = x$

*(ii)* $f(x) = x^3$

*(iii)* $f(x) = \sqrt{x}$

*(iv)* $f(x) = \sin x.$

*Rješenje.*

2. Tražimo derivaciju u točki $x_0$. Imamo:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^3-(x_0)^3}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{x_0^3+3x_0^2h+3x_0h^2+h^3-x_0^3}{h} = \lim_{h\to 0}(3x_0^2h+3x_0h+h^2) = 3x_0^2.$$

Znači, općenito možemo reći da je $(x^3)' = 3x^2$, odnosno derivacija funkcije $x^3$ je funkcija $3x^2$.

$\square$

**Osnovna pravila deriviranja:** Neka je $c$ konstanta a $f$ i $g$ funkcije koje imaju derivacije. Onda je:

(i) $(c)' = 0$

(ii) $(x)' = 1$

(iii) $(f \pm g)' = f' \pm g'$

(iv) $(cf)' = cf'$

(v) $(fg)' = f'g + fg'$

(vi) $\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (g \neq 0)$.

**Zadatak 9.10.** *Koristeći gornja pravila izračunajte derivacije sljedećih funkcija:*

*(i)* $f(x) = x^5 + x^{\frac{3}{2}} + 2x$

*(ii)* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

*(iii)* $f(x) = \frac{\pi}{x^2} + \ln 2$

*(iv)* $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

*(v)* $f(x) = 6\sin x + \cos x$

*(vi)* $f(x) = x^2 \tan x$

*(vii)* $f(x) = (x^3 + 5x)e^x$

*(viii)* $f(x) = \ln x \arcsin x + \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

*Rješenje.*

5. Imamo:

$$(6\sin x + \cos x)' = (6\sin x)' + (\cos x)' = 6(\sin x)' - \sin x = 6\cos x - \sin x.$$

7. Imamo:

$$((x^3 + 5x)e^x)' = (x^3 + 5x)'e^x + (x^3 + 5x)(e^x)' = ((x^3)' + (5x)')e^x + (x^3 + 5x)e^x = \\ = (3x^2 + 5)e^x + (x^3 + 5x)(e^x).$$

$\square$

**Pravilo deriviranja složenih funkcija:** Ako je $h = f \circ g$ složena funkcija, a funkcije $f$ i $g$ imaju derivacije u $g(x)$, tj $x$, onda je

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ili kraće

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'.$$

**Zadatak 9.11.** *Izračunajte derivacije sljedećih funkcija:*

*(i)* $f(x) = \sqrt{\frac{5\sin x - \cos x}{x}}$

*(ii)* $f(x) = \cos(xe^x + x^2)$

*(iii)* $f(x) = x^3 10^{x^2+6x}$

*(iv)* $f(x) = \ln(4\sin x - \arccos 2x)$

*(v)* $f(x) = \sqrt{\ln x + x} + \ln\sqrt{x} + x$

*(vi)* $f(x) = x^2 \sin e^x$

*(vii)* $f(x) = \left(\frac{ax^n+b}{cx^n-d}\right)^m$

*(viii)* $f(x) = \arctan \frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}}$.

*Rješenje.*

2. Imamo:

$$(\cos(xe^x + x^2))' = -\sin(xe^x + x^2)(xe^x + x^2)' = -\sin(xe^x + x^2)(e^x + xe^x + 2x).$$

8. Deriviramo:

$$\begin{aligned}\left(\arctan \frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' &= \frac{1}{1+\left(\frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}\left(\frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \\ &= \frac{1}{1+\frac{(x^3+x)^2}{x^2+1}} \frac{(x^3+x)'\sqrt{x^2+1} - (x^3+x)(\sqrt{x^2+1})'}{x^2+1} = \\ &= \frac{1}{x^2+1+(x^3+x)^2}\left((3x^2+1)\sqrt{x^2+1} - (x^3+x)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})\right).\end{aligned}$$

□

**Zadatak 9.12.** *Izračunajte* $f'(x)$ *i* $f'(0)$ *ako je* $f(x) = e^{-5x}\sin 3x$.

*Rješenje.* Imamo

$$f'(x) = (e^{-5x} \sin 3x)' = -5e^{-5x} \sin 3x + 3e^{-5x} \cos 3x$$

i specijalno je vrijednost derivacije u točki $x = 0$ jednaka
$f'(0) = -5e^0 \sin 0 + 3e^0 \cos 0 = 3.$ □

**Zadatak 9.13.** *Pokažite da je* $f'(x) = \frac{1}{\cos x}$ *ako je* $f(x) = \ln \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

**Zadatak 9.14.** *Pokažite da je* $((\sin x)^n \cos(nx))' = n \sin^{n-1} x \cos(n+1)x$.

**Zadatak 9.15.** *Pokažite da funkcija* $y = xe^{-x}$ *zadovoljava diferencijalnu jednadžbu* $xy' = (1-x)y$.

*Rješenje.* Tražimo derivaciju zadane funkcije, $y' = (xe^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x}$. Sada lijeva strana jednadžbe $xy' = (1-x)y$ izgleda:

$$xy' = x(e^{-x} - xe^{-x}) = xe^{-x}(1-x)$$

dok desna daje

$$(1-x)y = (1-x)xe^{-x}.$$

To je očito jednako, stoga zaključujemo da vrijedi $xy' = (1-x)y$, odnosno $y$ zadovoljava danu diferencijalnu jednadžbu. □

# Poglavlje 10

# Linearna aproksimacija funkcije, kvadratna aproksimacija. Taylorov red

## 10.1 Linearna aproksimacija funkcije

**Zadatak 10.1.** *Koristeći linearnu aproksimaciju izračunajte približno:*

*(i)* $\sqrt{3.99}$

*(ii)* $\sqrt[3]{8.02}$

*(iii)* $\sqrt{64.03} + \sqrt[3]{64.03}$

*(iv)* $\log_4 16.02$.

*Rješenje.* U rješenju koristimo formulu

$$f(x_0 + \triangle x) \approx f(x_0) + \triangle x \cdot f'(x_0).$$

(i) Ovdje je $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$, $\triangle x = -0.01$. Stoga je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, pa je $f(x_0) = \sqrt{4} = 2$, $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$, pa imamo

$$\sqrt{3.99} \approx 2 - 0.01 \cdot \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{400}.$$

(ii) Analogno kao u prethodnom zadatku, uz $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$, $\triangle x = 0.02$.

(iii) Definiramo $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$. Računamo $f(64.03)$. Premo gornjoj formuli je

$$f(64.03) \approx f(64) + 0.03 \cdot f'(64.03).$$

Očito je $f(64) = \sqrt{64} + \sqrt[3]{64} = 8 + 4 = 12$. Dalje,

$$f'(x) = (x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

pa je

$$f'(64) = \frac{1}{2 \cdot 8} + \frac{1}{3 \cdot 16} = \frac{1}{16} + \frac{1}{48} = \frac{1}{12}.$$

Konačno imamo

$$f(64.03) \approx 12 + 0.03 \cdot \frac{1}{12} = 12 + \frac{3}{100} \cdot \frac{1}{12} = 12 + \frac{1}{400}.$$

(iv) Ovdje je $f(x) = \log_4 x$, $x_0 = 16$, $\triangle x = 0.02$, pa je $f'(x) = \frac{1}{\ln 4} \cdot \log_4 x$ te konačno

$$\log_4 16.02 \approx \log_4 16 + 0.02 \cdot \frac{1}{\ln 4} \cdot \log_4 16 = 2 + \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{\ln 4} \cdot 2 = 2 + \frac{1}{25 \ln 4}.$$

□

**Zadatak 10.2.** *Napišite jednadžbu tangente na graf funkcije $f$ u zadanoj točki $(x_0, f(x_0))$, ako je:*

*(i)* $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$

*(ii)* $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$

*(iii)* $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 64$

*(iv)* $f(x) = \log_4 x$, $x = 16$.

*Skicirajte u istom koordinatnom sustavu graf funkcije i graf tangente za* 1..

*Rješenje.* Formula za tangentu na graf funkcije $f$ u točki $(x_0, f(x_0))$ glasi

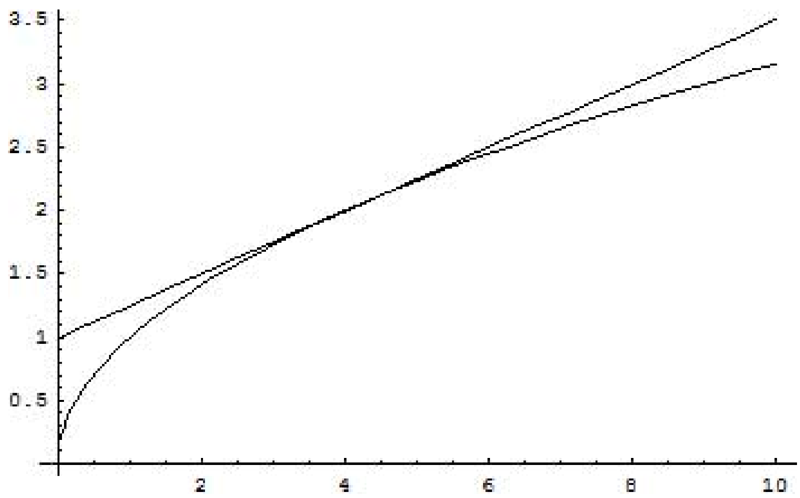
$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

S obzirom da za zadanu točku $x_0$ treba još samo izračunati $f(x_0)$ i $f'(x_0)$, a te smo račune obavili već u prethodnom zadatku, pa rješavanje ide lako (vidi Sliku 10.1 za grafički prikaz rješenja):

(i) $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + 1$

(ii) $y - 2 = \frac{1}{12}(x - 8) \Rightarrow y = \frac{1}{12}x + \frac{4}{3}$

(iii) $y - 12 = \frac{1}{12}(x - 64) \Rightarrow y = \frac{1}{12}x + \frac{20}{3}$




Slika 10.1: Zadatak 10.2.1.

(iv) $y - 2 = \frac{2}{\ln 4}(x - 16) \Rightarrow y = \frac{2}{\ln 4}x + 2 - \frac{32}{\ln 4}$

□

**Zadatak 10.3.** *Interpretirajte rješenja Zadatka 10.1 u terminima jednadžbi za tangente dobivenima u Zadatku 10.2!*

*Rješenje.* Vrijednosti dobivene za linearnu aproksimaciju u zadanim točkama točno su jednake vrijednostima na tangenti koje odgovaraju tim točkama. Na primjer, u Zadatku 10.1.1, tražili smo približnu vrijednost broja $\sqrt{3.99}$, dobivena vrijednost bila je $4 - \frac{1}{400}$. No, ako u jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ u točki $x_0 = 4$ uvrstimo $x = 3.99$, dobivamo

$$y = \frac{1}{4} \cdot 3.99 + 1 = \frac{1}{4}(4 - 0.01) + 1 = 2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{100} = 2 - \frac{1}{400},$$

i to je upravo vrijednost dobivena u Zadatku 10.1. Zaključujemo da približnu vrijednost funkcije u nekoj točki koja je "blizu" točke u kojoj znamo tangentu na graf funkcije možemo dobiti kao $y-$vrijednost tangente u toj točki.
Provjerite za ostale podzadatke Zadatka 10.1 da dobivate na ovaj način iste vrijednosti koje ste dobili i tamo! □

Formulu za linearnu aproksimaciju stoga možemo shvatiti kao formulu

$$f(x) \approx g_1(x),$$

gdje je

$$g_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Ovdje formulom izričemo istu onu tvrdnju koju smo riječima iskazali na kraju Zadatka 10.2; pritom $g_1$ označava funkciju čiji je graf točno tangenta na graf funkcije $f$ u točki $x_0$. Naravno, shvaćamo da gornja približna jednakost vrijedi za točke $x$ koje se nalaze "dovoljno blizu" točki $x_0$ u kojoj smo računali tangentu na graf funkcije $f$.

## 10.2 Kvadratna aproksimacija funkcije

Nije teško vidjeti da će kvadratna aproksimacija vrijednosti funkcije $f$ u točki $x$ blizu točke $x_0$ biti dana sljedećom formulom:

$$f(x) \approx g_2(x_0),$$

gdje je

$$g_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Osim toga, može se pokazati da "dovoljno dobre" funkcije u nekoj okolini točke $x_0$ možemo aproksimirati polinomom proizvoljnog stupnja $n$ (dakle, da ćemo moći izračunati približnu vrijednost funkcije $f$ u svakoj točki $x$ koja je u nekoj okolini točke $x_0$):

$$f(x) \approx g_n(x),$$

$$\begin{aligned} g_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{6} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Pritom smo definirali da je

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1) \cdot n.$$

Sada vidimo da, ako definiramo da je $0! = 1$ i $f^{(0)} = f$, imamo da je

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

**Zadatak 10.4.** *Korištenjem kvadratne aproksimacije riješite Zadatak 10.1.1. i 10.1.2. Usporedite dobivena rješenja s onima iz rješenja pomoću formule za linearnu aproksimacije i nacrtajte u istom koordinatnom sustavu funkciju, tangentu i kvadratnu aproksimaciju za Zadatak 10.1.1.*

*Rješenje.* Koristimo formulu $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$. Pritom smo za konkretne zadatke već izračunali $f(x_0)$ i $f'(x_0)$, pa preostaje još samo izračunati $f''(x_0)$.

(i) Imamo da je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, pa je

$$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}.$$

Stoga je

$$f''(4) = -\frac{1}{4 \cdot \sqrt{64}} = -\frac{1}{32}$$

i imamo

$$\sqrt{3.99} \approx 2 - \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{100})^2 \cdot (-\frac{1}{32}) = 2 - \frac{1}{400} - \frac{1}{640000}.$$

Vidimo da je ovaj rezultat zapravo sličan rješenju dobivenom pomoću formule za linearnu aproksimaciju. To je posljedica činjenice da $g_2$ ima isti "početak" kao i $g_1$ (provjerite!), pa će i rezultat kvadratne aproksimacije u nekoj točki izgledati kao rezultat linearne aproksimacije u toj točki, uz dodatak vrijednosti kvadratnog člana $\frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$. Kako je $x - x_0$ jako mala vrijednost (u pravilu po apsolutnoj vrijednosti manja od 1, ovdje $-0.01$), to će njen kvadrat biti još manji od nje same, što direktno povlači da će doprinos kvadratnog člana biti još manji nego onaj linearnog. Možemo to shvatiti kao činjenicu da kvadratna aproksimacija još "malo popravlja" linearnu aproksimaciju, ovdje za $-\frac{1}{640000} = -0.0000015625$.
Kako glasi funkcija kvadratne aproksimacije? Imamo

$$g_2(x) = 2 + \frac{1}{4}(x - 4) + \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{32})(x - 4)^2 = \cdots = -\frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Na Slici 10.2 vidimo prikaz grafova funkcije $f$ te funkcija $g_1$ (čiji je graf tangenta u zadanoj točki, dakle pravac) i $g_2$ (čiji je graf kvadratna parabola.

(ii) Znamo da je $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ ($\Rightarrow f''(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{12}$), pa je

$$f''(x) = \frac{1}{3} \cdot (-\frac{2}{3})x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$$

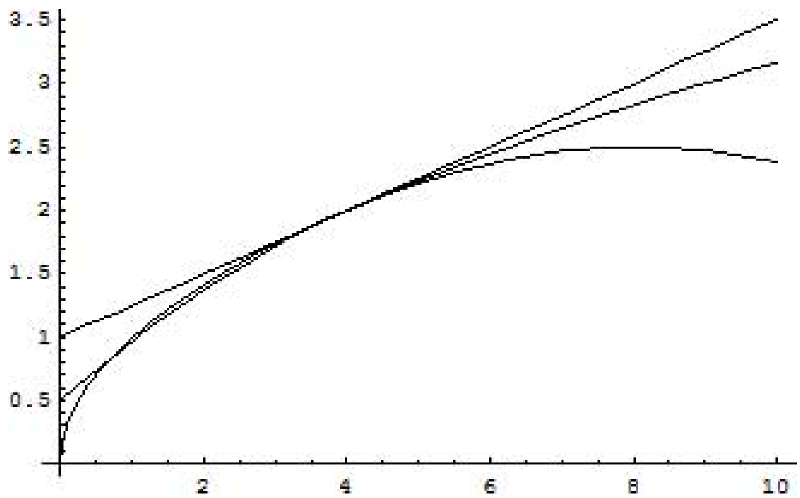
i stoga je

$$f''(8) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{8^5}} = -\frac{2}{9 \cdot 32} = -\frac{1}{144}.$$

Sada imamo

$$\sqrt[3]{8.02} \approx 2 + 0.02 \cdot \frac{1}{12} - 0.02^2 \cdot \frac{1}{144} = \cdots = 2 + \frac{1}{600} - \frac{1}{360000}.$$

$\square$




Slika 10.2: Zadatak 10.4

## 10.3 Taylorov red funkcije

Ako sada "dozvolimo" da $g_n(x)$ ima beskonačno mnogo članova, dolazimo do $g_\infty(x)$, kojeg obično označavamo s $T(x)$ i zovemo Taylorov red funkcije $f$ u točki $x_0$:

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Pritom vrijedi

$$f(x) = T(x),$$

tj. vrijednost funkcije i vrijednost Taylorovog reda se podudaraju za sve $x$ iz neke okoline (tzv. područja konvergencije reda) točke $x_0$. To je i logično, jer aproksimacijama polinomima sve većeg i većeg stupnja dobivamo vrijednost sve bližu i bližu stvarnoj vrijednosti funkcije $f$, pa u limesu, tj. beskonačnosti i postižemo tu stvarnu vrijednost.
Sada ćemo računati Taylorov red za neke elementarne funkcije u zadanoj točki - kažemo da smo zadanu funkciju $f$ "razvili" u Taylorov red u toj točki. Najčešće se funkcija razvija u Taylorov red u okolini nule (kada je to moguće).

**Zadatak 10.5.** *Izračunajte Taylorov red sljedećih funkcija u zadanoj točki:*

*(i)* $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

*(ii)* $f(x) = a^x$, $x_0 = 0$

*(iii)* $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$ *(zašto $f$ ne razvijamo u Taylorov red u okolini nule?)*

*(iv)* $f(x) = \log_a x$, $x_0 = 1$

*(v)* $f(x) = \sin x,\ x_0 = 0$

*(vi)* $f(x) = \cos x,\ x_0 = 0$

*(vii)* $f(x) = \frac{1}{x},\ x_0 = 1$

*(viii)* $f(x) = \frac{1}{1-x},\ x_0 = 0$

*(ix)* $f(x) = \frac{1}{1+x},\ x_0 = 0$

*(x)* $f(x) = \frac{1}{1-x^2},\ x_0 = 0$

*(xi)* $f(x) = \frac{1}{1+x^2},\ x_0 = 0$

*(xii)* $f(x) = 2\cos^2 x,\ x_0 = 0.$

*Rješenje.* Ako je $x_0 = 0$, onda formula za $T(x)$ poprima nešto jednostavniji izgled:

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Vidimo da jedini član kojeg treba računati jest izraz za opću (k-tu) derivaciju funkcije $f$, a potom je evaluirati u zadanoj točki $x_0$.

(i) Znamo da je prva derivacija funkcije $f(x) = e^x$ opet ona sama, pa je takva i druga, treća i sve ostale derivacije. Stoga je općenito $f^{(k)}(x) = e^x$, pa je $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$, pa je

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k + \ldots.$$

(ii) Računamo prvih nekoliko derivacija funkcije $f(x) = a^x$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln a \cdot a^x \\ f''(x) &= \ln a \cdot \ln a \cdot a^x = \ln^2 a \cdot a^x \\ f'''(x) &= \ln^3 a \cdot a^x, \end{aligned}$$

pa zaključujemo da je

$$f^{(k)}(x) = \ln^k a \cdot a^x.$$

Stoga je

$$f^{(k)}(0) = \ln^k a \cdot a^0 = \ln^k a,$$

što uvrštavanjem u izraz za Taylorov red funkcije u nuli daje

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln^k a}{k!} x^k = 1 + \ln a \cdot x + \frac{\ln^2 a}{2} x^2 + \cdots + \frac{\ln^k a}{k!} x^k + \ldots.$$

Vidimo da je Taylorov red za funkciju $f(x) = e^x$ poseban slučaj Taylorovog reda za funkciju $f(x) = a^x$ koji se dobiva uvrštavanjem $a = e$.

(iii) Najprije odgovorimo na pitanje zašto ne razvijamo $f(x) = \ln x$ u nuli - razlog je taj što logaritamska funkcija u nuli nije niti definirana, pa nema smisla raditi razvoj te funkcije u red u toj točki. Sada računamo, kao i gore, nekoliko prvih derivacija zadane funkcije:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} \\ f''(x) &= -1 \cdot x^{-2} \\ f'''(x) &= (-1) \cdot (-2) \cdot x^{-3}, \end{aligned}$$

pa je općenito

$$f^{(k)}(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot \cdots \cdot (-(k-1)) \cdot x^{-k},$$

gdje produkt $(-1) \cdot (-2) \cdot \cdots \cdot (-(k-1))$ možemo shvatiti kao produkt $k-1$ puta $-1$ s $(k-1)!$. Stoga je

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot x^{k},$$

pa je

$$f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot 1^{k} = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!$$

Primijetimo da ova formula vrijedi za sve $k$ veće od nule, dok za $k=0$ imamo $f^{(0)}(x) = f(x) = \ln x$, što daje $f(1) = \ln 1 = 0$. No, to znači da prvi član Taylorovog reda iščezava. Stoga ćemo red pisati kao sumu kod koje indeks sumacije počinje s 1, a ne s 0, kao što je uobičajeno. Uvrštavanjem u izraz za Taylorov red funkcije $f$ u $x_0 = 1$ izraz za opću derivaciju zadane funkcije u točki $x_0 = 1$ imamo

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{k!}(x-1)^k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{(k-1)! \cdot k}(x-1)^k = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k = \\ &= x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{k!}(x-1)^k + \ldots. \end{aligned}$$

(iv) Dobije se sličan red kao pod 3., samo uz dodatni faktor - slično kao što se 2. odnosi prema 1.

(v) Računamo prvih nekoliko derivacija:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\sin x \\ f'''(x) &= -\cos x \\ f^4(x) &= \sin x = f(x) \end{aligned}$$

Vidimo dakle da je četvrta derivacija jednaka početnoj funkciji, peta derivacija je jednaka prvoj derivaciji, šesta drugoj, sedma trećoj itd. Općenito, možemo dati ovakvo pravilo:

$$\begin{aligned} f^{(4k)}(x) &= \sin x \\ f^{(4k+1)}(x) &= \cos x \\ f^{(4k+2)}(x) &= -\sin x \\ f^{(4k+3)}(x) &= -\cos x, \end{aligned}$$

gdje je $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zato je

$$\begin{aligned} f^{(4k)}(0) &= \sin 0 = 0 \\ f^{(4k+1)}(0) &= \cos 0 = 1 \\ f^{(4k+2)}(0) &= -\sin 0 = 0 \\ f^{(4k+3)}(0) &= -\cos 0 = -1, \end{aligned}$$

pa vidimo da je za sve parne derivacije vrijednost u nuli jednaka nula, dok za neparne derivacije vrijednost u nuli alterira između 1 i $-1$. Nije odmah jasno kako treba izgledati Taylorov red, pa ćemo napisati samo prvih nekoliko članova tog reda:

$$T(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots .$$

To znači da se u redu pojavljuju samo neparne potencije od $x$. Kako sumaciju radimo obično po svim potencijama od $x$, a ne samo neparnima, uvest ćemo takvu ovisnost potencije od $x$ o indeksu sumacije koja će generirati samo neparne potencije. Očito možemo pisati

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

jer ovaj red generira točno onaj kojeg smo prvih nekoliko članova ispisali (provjerite sami!). Stoga je ovaj red traženi Taylorov red funkcije $f(x) = \sin x$ u nuli.

(vi) Zadatak se rješava analogno 5., s tim da se sada u Taylorovom redu pojavljuju samo parne potencije od $x$ (provjerite!).

(vii) Zadatak je sličan zadatku 3., jer je $\frac{1}{x} = (\ln x)'$, pa će općenito $k-$ta derivacija funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ biti jednaka $(k+1)$-oj derivaciji logaritamske funkcije s bazom $e$ (uvjerite se u ovaj argument direktnim računom!):

$$f^{(k)}(x) = (\ln x)^{(k+1)}(x) = (-1)^k \cdot k! \cdot x^{k+1},$$

pa je

$$f^{(k)}(1) = (-1)^k \cdot k! \cdot 1^{k+1} = (-1)^k \cdot k!$$

Stoga je

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot k!}{k!}(x-1)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot (x-1)^k = \\ &= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \cdots + (-1)^k \cdot (x-1)^k + \ldots \end{aligned}$$

(viii) Kao i prije, računamo prvih nekoliko derivacija zadane funkcije i potom zaključujemo kako glasi izraz za opću derivaciju:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \\ f'(x) &= (-1) \cdot (1-x)^{-2} \cdot (-1) = (-1)^2 \cdot (1-x)^{-2} = (1-x)^{-2} \\ f''(x) &= (-2) \cdot (1-x)^{-3} \cdot (-1) = (-1)^2 \cdot 2! \cdot (1-x)^{-3} = 2! \cdot (1-x)^{-3} \\ f'''(x) &= 2! \cdot (-3) \cdot (1-x)^{-4} \cdot (-1) = (-1)^2 \cdot 3! \cdot (1-x)^{-4} = 3! \cdot (1-x)^{-4}, \end{aligned}$$

pa vidimo da je općenito

$$f^k(x) = k! \cdot (1-x)^{-(k+1)}$$

i stoga

$$f^k(0) = k! \cdot 1^{-(k+1)} = k!$$

Uvrštavanjem u opću formulu za Taylorov red dobivamo

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k!} x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k + \ldots \end{aligned}$$

Napomenimo da ovu formulu načelno možemo izvesti iz formule za geometrijski red: označimo

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Pomnožimo ovu jednakost s $x$ oduzmimo tako dobivenu jednakost od gornje. Dobivamo:

$$\begin{aligned} S &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \\ xS &= \quad\; x + x^2 + x^3 + \dots \\ &\Rightarrow \\ S - xS &= 1 \\ (1-x)S &= 1 \\ S &= \frac{1}{1-x}, \end{aligned}$$

pa imamo

$$(*) \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots,$$

što je jednako

$$f(x) = T(x).$$

Poznavajući činjenicu da geometrijski red konvergira za $-1 < x < 1$ (što znači da jednakost (*) vrijedi samo za brojeve iz tog intervala), imamo i odgovor na pitanje koje je područje konvergencije dobivenog Taylorovog reda: $< -1, 1 >$.

(ix) Možemo se poslužiti trikom:

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)},$$

pa je Taylorov red ove funkcije u biti jednak Taylorovom redu funkcije iz prethodnog podzdatka, s tim da je sada argument tog reda $-x$:

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1 \cdot x)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot x^k = \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^k \cdot x^k + \dots \end{aligned}$$

Stoga je i područje konvergencije isto, jer red konvergira (i u tom području je $f(x) = T(x)$) za $-1 < -x < 1$, što je ekvivalentno $-1 < x < 1$, tj.

intervalu $< -1, 1 >$. Ovaj smo rezultat mogli dobiti i direktno, računajući prvih nekoliko derivacija funkcije $f$, pronalazeći formulu za opću derivaciju funkcije $f$, uvrštavajući u tu formulu $x_0 = 0$ i potom taj izraz uvrštavajući u opću formulu za Taylorov red. Provjerite!

(x) Slično kao u 9., možemo se referirati na 8., pa će biti

$$
\begin{aligned}
T(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(x^2)^k = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \\
&= x^2 + x^4 + \cdots + x^{2k} + \dots
\end{aligned}
$$

Koje je ovdje područje konvergencije? Koristite nejednakost za konvergenciju reda 8., tj. nejednakost $-1 < x < 1$, koju sada zapišite kao $|x| < 1$. Uvrštavanjem $x^2$ umjesto $x$ u tu nejednakost dobivamo novu nejednakost čije rješenje predstavlja interval područja konvergencije. Ako računamo Taylorov red na uobičajeni način doći ćemo do problema već pri računanju prvih nekoliko derivacija (provjerite!). Zato ćemo morati pribjeći rastavu na parcijalne razlomke, tj. napisat ćemo

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}).$$

Sada će Taylorov red zadane funkcije $T(x)$ biti linearna kombinacija Taylorovih redova $T_1(x)$ i $T_2(x)$ funkcija $g_1 = \frac{1}{1-x}$ i $g_2(x) = \frac{1}{1+x}$:

$$
\begin{aligned}
T(x) &= \frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{\infty} x^k + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot x^k) = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(x^k + (-1)^k \cdot x^k) = \\
&= \frac{1}{2}(1 + 1 + x - x + x^2 - x^2 + x^3 - x^3 + \dots) = \\
&= \frac{1}{2}(2 + 2x^2 + 2x^4 + \dots) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x^k,
\end{aligned}
$$

pa vidimo da dobivamo isti rezultat kao gore.

(xi) Taylorov red će biti jednak Taylorovom redu prethodnog podzadatka u kojeg smo umjesto $x^2$ uvrstili $-x^2$ (zašto?).

(xii) Koristimo formulu

$$2\cos^2 x = 1 + \cos(2x).$$

Kako je Taylorov red $T_{\cos}(x)$ kosinusa dan s (provjerite, tj. riješite 6.)

$$T_{\cos}(x) = \sum_{k=0}^{k} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k},$$

to Taylorov red funkcije $g(x) = \cos(2x)$ dobivamo tako da u $T_{\cos}(x)$ uvrstimo argument $2x$, pa je on jednak

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (2x)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

Konačno za Taylorov red $T(x)$ zadane funkcije imamo

$$T(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

$\square$

# Poglavlje 11

# Pad, rast, lokalni ekstremi, konveksnost, konkavnost, točke infleksije i njihovo fizikalno značenje

## 11.1 Rast i pad funkcije

Za zadanu funkciju $f$ želimo odrediti područje pada, odnosno rasta. Kao što znamo, prva derivacija funkcije u nekoj točki njene domene odgovara koeficijentu smjera tangenta na graf funkcije u toj točki. Zaključujemo da funkcija raste u okolini točke $x_0$ ako vrijedi $f'(x_0) > 0$, odnosno pada ako vrijedi $f'(x_0) < 0$.

**Zadatak 11.1.** *Odredite područja pada i rasta funkcije* $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$.

*Rješenje.* Računamo prvu derivciju zadane funkcije: $f'(x) = x^2 - 4$ i rješavamo nejednadžbu

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x^2 > 4$$

pa zaključujemo da funkcija raste na intervalima $\langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$. Funkcija pada tamo gdje je $f'(x) < 0$, dakle na intervalu $\langle -2, 2\rangle$. □

**Zadatak 11.2.** *Odredite područja pada i rasta funkcije* $f(x) = e^{x^2} - x^2$.

**Zadatak 11.3.** *Odredite područja pada i rasta funkcije* $f(x) = \sin(2x)$ *na intervalu* $\langle -2\pi, 2\pi\rangle$.

**Zadatak 11.4.** *Odredite područja pada i rasta funkcije* $f(x) = \frac{1}{x-3} + 4$.

## 11.2 Lokalni ekstremi

**Ekstremi funkcije:** Neka je zadana funkcija $f$. Ako postoji okolina točke $x_0$ takva da za svaku točku $x \neq x_0$ te okoline vrijedi nejednakost $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$), onda točku $x_0$ nazivamo lokalnim minimumom (maksimumom) funkcije $f$. Točku lokalnog minimuma ili maksimuma funckije nazivamo točkom lokalnog ekstrema. Ako je $x_0$ točka lokalnog ekstrema funkcije $f$, onda je nužno ili $f'(x_0) = 0$ (stacionarna točka) ili $f'(x_0)$ ne postoji (vidi sliku). Obrat ne vrijedi, točke u kojima $f'(x_0) = 0$ ili $f'(x_0)$ ne postoji (kritične točke) nisu uvijek točke ekstrema. Dovoljni uvjeti za lokalne ekstreme funkcije su sljedeći:

(i) ako postoji okolina $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ kritične točke $x_0$ takva da je $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) za $x \in \langle x_0 - \delta, x_0\rangle$ i $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$) za $x \in \langle x_0, x_0 + \delta\rangle$ onda je $x_0$ točka lokalnog maksimuma (minimuma) funkcije $f$. Ako nađemo takav pozitivan broj $\delta$ da $f'(x)$ zadržava nepromijenjeni predznak na intervalu $0 < |x - x_0| < \delta$, onda $f$ nema lokalni ekstrem u $x_0$. Ti uvjeti analogni su sljedećem:

(ii) ako je $f'(x_0) = 0$ i $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$), onda je $x_0$ točka lokalnog maksimuma (minimuma) funkcije; ako je pak $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ i $f'''(x_0) \neq 0$, onda $x_0$ nije točka ekstrema funkcije.

**Zadatak 11.5.** *Nađite lokalne ekstreme funkcije* $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$.

*Rješenje.* Ispitujemo najprije koje točke zadovoljavaju nužan uvjet, tj. za koje točke je $f'(x_0) = 0$:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0.$$

Rješavanjem ove kvadratnu jednadžbe dobivamo kandidate za ekstreme: $x_1 = 1$ i $x_2 = -2$. Provjeravamo vrijednost druge derivacije od $f$ u tim točkama: imamo $f''(x) = 12x + 6$ pa je $f''(x_1) = 18 > 0$ i $f''(x_2) = -18 < 0$ i stoga $f$ ima lokalni minimum u $x_1 = 1$ i lokalni maksimum u $x_2 = -2$. □

**Zadatak 11.6.** *Istražite ekstreme sljedećih funkcija:*

*(i)* $f(x) = x^2(x - 12)^2$

*(ii)* $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2+8}}$

*(iii)* $f(x) = 2\sin 2x + \sin 4x$

*(iv)* $f(x) = x - \ln(1 + x)$

*(v)* $f(x) = x^2 e^{-x}$

*(vi)* $f(x) = x - \arctan x$.

**Najveće i najmanje vrijednosti:** Najmanja (najveća) vrijednost funkcije $f$ na zadanom zatvorenom intervalu $[a, b]$ dobiva se ili u kritičnim točkama funkcije ili na krajevima intervala.

**Zadatak 11.7.** *Odredite najveću i najmanju vrijednost funkcije* $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$ *na intervalu* $[-3, 2]$.

*Rješenje.* Tražimo kritične točke funkcije $f$. Kako je $f'(x) = 6x^2+6x-12$, kandidati su $x_1 = 1$ i $x_2 = -2$. Obje točke nalaze se u zadanom intervalu pa računamo vrijednosti funkcije u tim točkama:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(1) = 2 + 3 - 12 - 1 = 8, \\ f(x_2) &= f(-2) = -16 + 12 + 24 - 1 = 12. \end{aligned}$$

Ostaje ispitati ponašanje funkcije na rubovima:

$$\begin{aligned} f(-3) &= -54 + 27 + 36 - 1 = 8, \\ f(2) &= 16 + 12 - 24 - 1 = 3. \end{aligned}$$

Zaključujemo da se najmanja vrijednost na intervalu $[-3, 2]$ funkcije $f$ postiže na rubu $x = 2$ a najveća u točki $x = -2$. □

**Zadatak 11.8.** *Na zadanom intervalu odredite najmanju i najveću vrijednost sljedećih funkcija (ako interval nije označen, misli se na čitavu domenu):*

*(i)* $f(x) = x^3 - 3x$ *na intervalu* $[-2, 3]$

*(ii)* $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$

*(iii)* $f(x) = \arcsin x$

*(iv)* $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

**Zadatak 11.9.** *Pokažite da za pozitivne vrijednosti* $x$ *vrijedi nejednakost:*

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

*Rješenje.* Promatramo funkciju $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2$ i ispitujemo njezin minimum na intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$. Deriviranjem funkcije $f$ dobivamo kandidate za kritične točke:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

U zadanom intervalu je samo $x = 1$ i tu je $f(1) = 0$. Na rubovima intervala funkcija teži u $+\infty$ pa zaključujemo da je u $x = 1$ postignuta minimalna vrijednost nula. Drugim riječima, vrijedi:

$$x \in \langle 0, +\infty\rangle \quad \Rightarrow \quad f(x) = x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0,$$

što je i trebalo dokazati. □

**Zadatak 11.10.**

*Dokažite nejednakosti:*

*(i)* $e^x > 1 + x \quad$ *za* $\quad x \neq 0$

*(ii)* $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad$ *za* $\quad x \neq 0.$

**Zadatak 11.11.** *U skupu nenegativnih realnih brojeva odredite onaj koji zbrojen sa svojom recipročnom vrijednošću daje maksimalan zbroj. Odredite taj zbroj!*

**Zadatak 11.12.** *Na krivulji* $f(x) = \sqrt{-\ln x}$ *odredite točku najbližu ishodištu.*

**Zadatak 11.13.** *Među svim jednakokračnim trokutima opsega* 16 *nađite onaj koji ima najveću površinu.*

**Zadatak 11.14.** *Među svim jednakokračnim trokutima s jednim vrhom u ishodištu i sa druga dva vrha na krivulji* $y = \frac{1}{x^2}$*, nađite onaj koji ima minimalni opseg.*

**Zadatak 11.15.** *Koji uvjet mora zadovoljavati funkcija* $f(x) = x^3 + ax + b$ *da bi njen graf dodirivao os* $x$ *(naći vezu između* $a$ *i* $b$*)?*

**Zadatak 11.16.** *Među svim jednakokračnim trokutima opsega 1 mm nađite onaj koji ima najveću površinu.*

## 11.3 Konveksnost, konkavnost i točke infleksije funkcije

**Konveksnost i konkavnost**: Za funkciju $f$ kažemo da je konveksna u okoline točke $x_0$ ako se tangenta na graf funkcije u točki $x_0$ nalazi ispod grafa funkcije. Ukoliko je iznad, govorimo o konkavnosti. Kriterij za ispitivanje konveksnosti i konkavnosti u točki $x_0$ vezan je uz vrijednost druge derivacije funkcije $f$: ukoliko je $f''(x_0) > 0$, funkcija je konveksna, a ako je $f''(x_0) < 0$, funkcija je konkavna.

**Zadatak 11.17.** *Odredite područja konveksnosti i konkavnosti funkcije* $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$.

*Rješenje.* Računamo drugu derivaciju zadane funkcije:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x \Rightarrow f'(x) = x^2 - 4 \Rightarrow f''(x) = 2x.$$

Očito je $f''(x) > 0$ za $x > 0$ i $f''(x) < 0$ za $x < 0$ pa je područje konkavnosti $\langle -\infty, 0\rangle$, a konveksnosti $\langle 0, \infty\rangle$. □

**Točke infleksije**: Točke u kojima funkcija prelazi iz područja konveksnosti u područje konkavnosti ili obratno nazivaju se točkama infleksije. Druga derivacija funkcije u tim točkama je ili jednaka nuli ili nije definirana. Međutim, slično kao kod traženja ekstrema, nije dovoljno provjeriti samo drugu derivaciju jer nam ona daje tek kandidate za točke infleksije. Potrebno je dodatno se uvjeriti da u dobivenim nultočkama druge derivacije funkcija doista prelazi iz područja konveksnosti u područje konkavnosti (ili obratno) i tako što ispitujemo ima li druga derivacija različite predznake slijeva, odnosno zdesna od točke kandidata za točku infleksije.

**Zadatak 11.18.** *Ispitajte konkavnost i konveksnost te odredite točke infleksije funkcije* $f(x) = e^{-x^2}$.

*Rješenje.* Računamo drugu derivaciju funkcije:

$$f(x) = e^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = -2xe^{-x^2} \Rightarrow f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$$

pa je $f''(x) > 0$ ako je $2x^2 - 1 > 0$ (jer je $e^{-x^2} > 0$ za svaki $x$). Rješenje posljednje nejednažbe je područje konveksnosti funkcije $f$: $\langle -\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \cup \langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \infty \rangle$, dok je područje konkavnosti dano s $\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$. Točke infleksije su očito $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ i $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ jer je u tim točkama druga derivacija funkcije jednaka nuli i funkcija se mijenja iz konveksne u konkavnu u $x_1$ odnosno iz konkavne u konveksnu u $x_2$. □

**Zadatak 11.19.** *Odredite točke infleksije funkcije* $f(x) = (x-)^3 + 5$.

*Rješenje.* Računamo drugu derivaciju funkcije:

$$f(x) = (x - 1)^3 + 5 \Rightarrow f'(x) = 3(x - 1)^2 \Rightarrow f''(x) = 6(x - 1)$$

i odmah vidimo da je jedini kandidat točka $x = 1$. Provjerom da je druga derivacija negativna za $x < 1$ (funkcija je konkavna) a pozitivna za $x > 1$ (funkcija je konveksna), zaključujemo da je $x = 1$ doista točka infleksije. □

**Zadatak 11.20.** *Izračunajte područja konveksnosti i konkavnosti te odredite točke infleksije sljedećih funkcija:*

*(i)* $f(x) = (x + 1)^4$

*(ii)* $f(x) = x - \sin x$

*(iii)* $f(x) = \frac{1}{x+3}$

*(iv)* $f(x) = (1 + x^2)e^x$.

Konveksnost i konkavnost zadane funkcije u kombinaciji s rastom i padom daje sljedeće mogućnosti:

**Ubrzani rast**: područje rasta i konveksnosti - $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$

**Usporeni rast**: područje rasta i konkavnosti - $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$

**Ubrzani pad**: područje pada i konveksnosti - $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$

**Usporeni pad**: područje pada i konkavnosti - $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$.

**Zadatak 11.21.** *Odredite područja ubrzanog i usporenog pada, odnosno rasta funkcije iz Zadatka 11.17.*

*Rješenje.* Iz Zadatka 11.17 znamo da je $f'(x) = x^2 - 4$ i da funkcija raste na $\langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$. Računamo drugu derivaciju: $f''(x) = 2x$ pa zaključujemo da je područje konkavnosti $\langle -\infty, 0\rangle$, područje konveksnosti $\langle 0, \infty\rangle$ te da je točka infleksije $x = 0$ pa imamo:

Usporeni rast: $\langle -\infty, -2\rangle$, jer je tu $f$ rastuća i konkavna

Ubrzani pad: $\langle -2, 0\rangle$, jer je tu $f$ padajuća i konkavna

Usporeni pad: $\langle 0, 2\rangle$, jer je tu $f$ padajuća i konveksna

Ubrzani rast: $\langle 2, \infty\rangle$, jer je tu $f$ rastuća i konveksna.

□

## 11.4 Ispitivanje toka funkcije i crtanje grafa

Kod crtanja grafa zadane funkcije $f$ postupamo prema sljedećim koracima:

(i) Određivanje domene: vidi Poglavlja 7 i 8

(ii) Određivanje nultočaka: rješavanjem jednadžbe $f(x) = 0$

(iii) određivanje asimptota:

a) vertikalne asimptote: pravci $x = c$ gdje je $c$ točke prekida funkcije

b) horizontalne asimptote: pravci $y = c$ gdje je
$c = \lim_{x\to-\infty} f(x) \quad \to$ lijeva horizontalna asimptota
$c = \lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \to$ desna horizontalna asimptota

c) kosa asimptota: pravci $y = kx + l$ gdje je
$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$
$l = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx)$

(iv) Određivanje kandidata za točke lokalnih ekstrema (kritičnih točaka): rješavanjem jednadžbe $f'(x) = 0$

(v) Određivanje ekstrema i točaka infleksije:

a) ekstrema: uvrštavanjem svake kritične točke $x_0$ u $f''$
$f''(x_0) > 0 \quad \to \quad$ lokalni minimum,
$f''(x_0) < 0 \quad \to \quad$ lokalni maksimum

b) točaka infleksije: rješavanjem jednadžbe $f''(x) = 0$

(vi) Ispitivanje toka funkcije:

a) područja rasta i pada:
rješavanjem nejednadžbe $f'(x) > 0$, odnosno $f'(x) < 0$

b) područja konveksnosti i konkavnosti:
rješavanjem nejednadžbe $f''(x) > 0$, odnosno $f''(x) < 0$

**Zadatak 11.22.** *Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije* $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{2x-x^2}$ .

*Rješenje.* Slijedimo gornje upute:

(i) Domena: $2x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, 2$ pa je domena $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{0, 2\}$.

(ii) Nultočke: $f(x) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 2x - 3 = 0 \;\Rightarrow$
$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = 1 \pm 2 \;\Rightarrow$
$x_1 = -1 \quad (-1, 0)$,
$x_2 = 3 \quad (3, 0)$.

(iii) Asimptote:
$V.A.\quad x = 0,\ x = 2$
$H.A.\quad \lim_{x \to \infty} \frac{x^2-2x-3}{2x-x^2} = -1$ pa je horizontalna asimptota $y = 1$.
$K.A.$ nema

(iv) Kandidati za ekstreme: $f'(x) = \cdots = \frac{-6x+6}{(2x-x^2)^2}$ pa $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$.

(v) Ekstremi i točke infleksije: $f''(x) = \cdots = \frac{-6-2(-6x+6)(2x-x^2)(2-2x)}{(2x-x^2)^4}$.
Sada imamo

$$f''(1) = -6 < 0 \quad \text{pa je u} \quad x = 1 \quad \text{lokalni maksimum.}$$

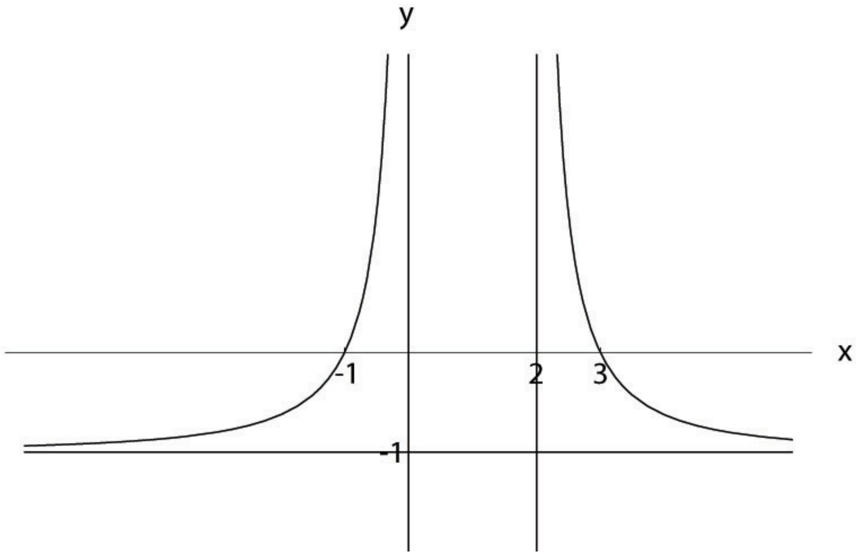
(vi) Tok:

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 \Rightarrow x \in (1, +\infty) \quad \text{pa tu funkcija pada,} \\ f'(x) &> 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \quad \text{pa tu funkcija raste.} \end{aligned}$$

Koristeći gore izračunate elemente, skiciramo graf funkcije $f$ (vidi Sliku 11.1). □

**Zadatak 11.23.** *Ispitajte tok i nacrtajte graf funkcije* $f(x) = x^3 e^{-x^2}$ .

*Rješenje.* (i) Domena: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$




Slika 11.1: Zadatak 11.22

(ii) Nultočke: $x = 0$

(iii) Asimptote:
$V.A.$ nema
$H.A.$ $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^{x^2}} = L'H = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{2xe^{x^2}} = 0$ pa je horizontalna asimptota u oba smjera $y = 0$.
$K.A.$ $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = L'H = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = 0$ pa kosih asimptota nema.

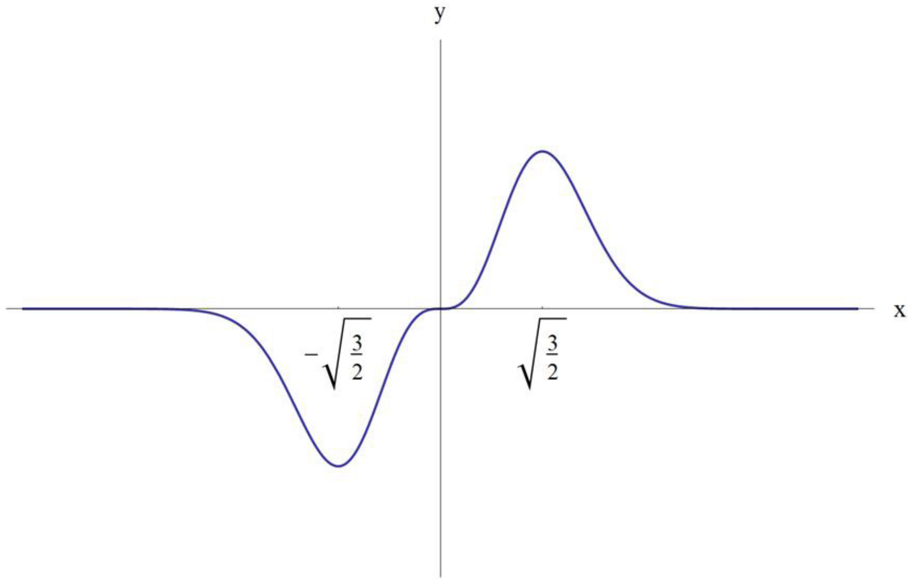
(iv) Kandidati za ekstreme: $f'(x) = 3x^2e^{-x^2} + x^3e^{-x^2}(-2x) = 0$ pa su kandidati $x_1 = 0$ i $x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

(v) Ekstremi i točke infleksije: $f''(x) = \cdots = xe^{-x^2}(4x^4 - 14x^2 + 6)$. Sada imamo

$$\begin{aligned} f''(0) &= 0 \quad \text{pa je} \quad x = 0 \quad \text{točka infleksije,} \\ f''\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) &< 0 \quad \text{pa je u} \quad x = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{lokalni maksimum,} \\ f''\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) &> 0 \quad \text{pa je u} \quad x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{lokalni minimum.} \end{aligned}$$

(vi) Tok: $f'(x) < 0 \Rightarrow 3 - 2x^2 < 0 \Rightarrow |x| > \sqrt{\frac{3}{2}}$ pa tu funkcija pada,
a $f'(x) > 0 \Rightarrow |x| < \sqrt{\frac{3}{2}}$ pa na tom intervalu funkcija raste.

Konačno, crtamo graf funkcije $f$ (vidi Sliku 11.2). $\square$




Slika 11.2: Zadatak 11.23

**Zadatak 11.24.** *Primijenite gore opisani postupak na funkciju* $f(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 5$.

**Zadatak 11.25.** *Primijenite gore opisani postupak na sljedeće funkcije:*

*(i)* $f(x) = \frac{1}{1+x^3}$

*(ii)* $f(x) = \frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$

*(iii)* $f(x) = \frac{x^3+8x^2+27x+27}{2(x+2)^2}$.

**Zadatak 11.26.** *Primijenite gore opisani postupak na sljedeće funkcije:*

*(i)* $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

*(ii)* $f(x) = x \cdot \sqrt{8 - x^2}$

*(iii)* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

**Zadatak 11.27.** *Primijenite gore opisani postupak na sljedeće funkcije:*

*(i)* $f(x) = e^{\sin x}$

*(ii)* $f(x) = \arctan\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

*(iii)* $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$.