

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, PRVI DIO A GRUPA 6. lipnja 2009.

1. (i) Zapišite precizno linearnu diferencijalnu jednadžbu 2. reda s konstantnim koeficijentima.
(ii) Opišite kako se dobije opće rješenje homogene diferencijalne jednadžbe iz (i).
(iii) Riješite diferencijalne jednadžbe $y'' + 15y' + 54y = 0$, $y'' - 7y' + \frac{49}{4}y = 0$, $y'' + 7y' + 15y = 0$.
2. (i) Predočite geometrijski i navedite značenje $\iint_D f(x, y) dx dy$, gdje je f neka pozitivna funkcija i D područje u xy ravnini.
(ii) Izračunajte integral iz (i) ako je $f(x, y) = 2y$ i D zadano s $-2 \leq x \leq 6$, $1 \leq y \leq 4$. Slika! Objasnite značenje tog integrala ako je f funkcija gustoće mase. Opišite riječima razdiobu mase.
(iii) Izračunajte težište (x_T, y_T) za funkciju gustoće mase iz (ii).
3. (i) Zapišite i pojasnite Cauchyev problem prvog i drugog reda.
(ii) Riješite Cauchyev problem prvog reda $y' + ky = 0$, $y(0) = 3$, $k \in \mathbb{R}$, i objasnite rješenje.
(iii) U Cauchyevom problemu titranja

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = A, \quad y'(0) = 0$$

objasnite značenje y, y', y'', ω^2, A te početnih uvjeta. Napišite rješenje i komentirajte.

4. (i) Napišite i geometrijski predočite vezu između pravokutnih i polarnih koordinata.
(ii) Predočite geometrijski dio ravnine D zadan u polarnim koordinatama s $\frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{11\pi}{6}$, $2 \leq r \leq 5$.
(iii) Pomoću polarnih koordinata izračunajte $\iint_D dx dy$ po području D iz (ii) i objasnite značenje.
5. (i) Napišite opću linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda. Objasnite podjelu na homogene i nehomogene.
(ii) Izdvojite linearne od nelinearnih. Objasnite!

$$\text{a) } xy' = \sin x, \quad \text{b) } yy' - 3x = 2xy, \quad \text{c) } y' - \frac{2y}{x} = x - 4, \quad \text{d) } y' = x^2 - y^3, \quad \text{e) } x - y' = \cos x$$

- (iii) Kako se rješava nehomogena linearna diferencijalna jednadžba 1. reda? Objasnite i na primjeru $y' + 2y = -3x$.

Napomena: svaki podzadatak nosi po jedan bod.

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, PRVI DIO B GRUPA 6. lipnja 2009.

1. (i) Predočite geometrijski i navedite značenje $\iint_D f(x, y) dx dy$, gdje je f neka pozitivna funkcija i D područje u xy ravnini.
- (ii) Izračunajte integral iz (i) ako je $f(x, y) = 2y$ i D zadano s $-1 \leq x \leq 5$, $2 \leq y \leq 5$. Slika! Objasnite značenje tog integrala ako je f funkcija gustoće mase. Opišite riječima razdiobu mase.
- (iii) Izračunajte težište (x_T, y_T) za funkciju gustoće mase iz (ii).

2. (i) Zapišite i pojasnite Cauchyev problem prvog i drugog reda.
- (ii) Riješite Cauchyev problem prvog reda $y' + ky = 0$, $y(0) = 4$, $k \in \mathbb{R}$, i objasnite rješenje.
- (iii) U Cauchyevom problemu titranja

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = A, \quad y'(0) = 0$$

objasnite značenje y, y', y'', ω^2, A te početnih uvjeta. Napišite rješenje i komentirajte.

3. (i) Napišite i geometrijski predočite vezu između pravokutnih i polarnih koordinata.
- (ii) Predočite geometrijski dio ravnine D zadan u polarnim koordinatama s $\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{6}$, $2 \leq r \leq 6$.
- (iii) Pomoću polarnih koordinata izračunajte $\iint_D dx dy$ po području D iz (ii) i objasnite značenje.
4. (i) Napišite opću linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda. Objasnite podjelu na homogene i nehomogene.
- (ii) Izdvojite linearne od nelinearnih. Objasnite!

a) $xy' = e^x$, b) $y' + \frac{2y}{x} = x + 1$, c) $yy' + 3x = 5xy$, d) $y' = x^2 + y^3$, e) $x + y' = \cos x$

- (iii) Kako se rješava nehomogena linearna diferencijalna jednadžba 1. reda? Objasnite i na primjeru $y' + 3y = -2x$.
5. (i) Zapišite precizno linearnu diferencijalnu jednadžbu 2. reda s konstantnim koeficijentima.
- (ii) Opišite kako se dobije opće rješenje homogene diferencijalne jednadžbe iz (i).
- (iii) Riješite diferencijalne jednadžbe $y'' + 11y' + 28y = 0$, $y'' - 9y' + \frac{81}{4}y = 0$, $y'' + 5y' + 11y = 0$.

Napomena: svaki podzadatak nosi po jedan bod.

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, PRVI DIO C GRUPA 6. lipnja 2009.

1. (i) Napišite opću linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda. Objasnite podjelu na homogene i nehomogene.
(ii) Izdvojite linearne od nelinearnih. Objasnite!

a) $y' - x = \sin x$, b) $yy' - 3x = xy$, c) $y' - \frac{3y}{x} = x + 2$, d) $xy' = \tan x$, e) $y' = x^3 - y^2$

- (iii) Kako se rješava nehomogena linearna diferencijalna jednadžba 1. reda? Objasnite i na primjeru $y' + 5y = -4x$.
2. (i) Napišite i geometrijski predočite vezu između pravokutnih i polarnih koordinata.
(ii) Predočite geometrijski dio ravnine D zadan u polarnim koordinatama s $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3}$, $1 \leq r \leq 4$.
(iii) Pomoću polarnih koordinata izračunajte $\iint_D dx dy$ po području D iz (ii) i objasnite značenje.
3. (i) Zapišite precizno linearnu diferencijalnu jednadžbu 2. reda s konstantnim koeficijentima.
(ii) Opišite kako se dobije opće rješenje homogene diferencijalne jednadžbe iz (i).
(iii) Riješite diferencijalne jednadžbe $y'' + 13y' + 36y = 0$, $y'' - 5y' + \frac{25}{4}y = 0$, $y'' + 11y' + 32y = 0$.
4. (i) Predočite geometrijski i navedite značenje $\iint_D f(x, y) dx dy$, gdje je f neka pozitivna funkcija i D područje u xy ravnini.
(ii) Izračunajte integral iz (i) ako je $f(x, y) = 2y$ i D zadano s $-3 \leq x \leq 4$, $3 \leq y \leq 6$. Slika! Objasnite značenje tog integrala ako je f funkcija gustoće mase. Opišite riječima razdiobu mase.
(iii) Izračunajte težište (x_T, y_T) za funkciju gustoće mase iz (ii).
5. (i) Zapišite i pojasnite Cauchyev problem prvog i drugog reda.
(ii) Riješite Cauchyev problem prvog reda $y' + ky = 0$, $y(0) = 5$, $k \in \mathbb{R}$, i objasnite rješenje.
(iii) U Cauchyevom problemu titranja

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = A, \quad y'(0) = 0$$

objasnite značenje y, y', y'', ω^2, A te početnih uvjeta. Napišite rješenje i komentirajte.

Napomena: svaki podzadatak nosi po jedan bod.

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, DRUGI DIO A GRUPA 6. lipnja 2009.

1. Riješite diferencijalnu jednađžu $y' = (1 - \frac{y}{x})\frac{y}{x}$. (2 boda)
2. (i) Prelaskom na polarne koordinate riješite integral $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_{-x}^x dy + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy$. (3 boda)
(ii) Geometrijski interpretirajte taj integral. (1 bod)
3. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednađže $y' - \frac{y}{x} = x^4$. (2 boda)
(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednađže iz (i) koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = -1$. (1 bod)
4. Odredite $\iint_D (9-x-y) dx dy$, gdje je D područje omeđeno parabolom $(y-3)^2 = x+4$ i pravcem $y = x+1$. (3 boda)
5. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednađže $y'' + 2y' + y = 0$. (2 boda)
(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednađže iz (i) koje zadovoljava početne uvjete $y(0) = 1, y(1) = 3\frac{1}{e}$. (1 bod)

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, DRUGI DIO A GRUPA 6. lipnja 2009.

1. Riješite diferencijalnu jednađžu $y' = (1 - \frac{y}{x})\frac{y}{x}$. (2 boda)
2. (i) Prelaskom na polarne koordinate riješite integral $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_{-x}^x dy + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy$. (3 boda)
(ii) Geometrijski interpretirajte taj integral. (1 bod)
3. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednađže $y' - \frac{y}{x} = x^4$. (2 boda)
(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednađže iz (i) koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = -1$. (1 bod)
4. Odredite $\iint_D (9-x-y) dx dy$, gdje je D područje omeđeno parabolom $(y-3)^2 = x+4$ i pravcem $y = x+1$. (3 boda)
5. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednađže $y'' + 2y' + y = 0$. (2 boda)
(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednađže iz (i) koje zadovoljava početne uvjete $y(0) = 1, y(1) = 3\frac{1}{e}$. (1 bod)

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, DRUGI DIO A GRUPA 6. lipnja 2009.

1. Riješite diferencijalnu jednađžu $y' = (1 - \frac{y}{x})\frac{y}{x}$. (2 boda)
2. (i) Prelaskom na polarne koordinate riješite integral $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_{-x}^x dy + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy$. (3 boda)
(ii) Geometrijski interpretirajte taj integral. (1 bod)
3. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednađže $y' - \frac{y}{x} = x^4$. (2 boda)
(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednađže iz (i) koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = -1$. (1 bod)
4. Odredite $\iint_D (9-x-y) dx dy$, gdje je D područje omeđeno parabolom $(y-3)^2 = x+4$ i pravcem $y = x+1$. (3 boda)
5. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednađže $y'' + 2y' + y = 0$. (2 boda)
(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednađže iz (i) koje zadovoljava početne uvjete $y(0) = 1, y(1) = 3\frac{1}{e}$. (1 bod)

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, DRUGI DIO B GRUPA 6. lipnja 2009.

1. Odredite $\iint_D (5-x-y)dxdy$, gdje je D područje omeđeno parabolom $(y-2)^2 = 3x+1$ i pravcem $y = 3x + 1$. (3 boda)
2. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednačbe $y' - \frac{y}{x} = x^3$. (2 boda)
(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednačbe iz (i) koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 0$. (1 bod)
3. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednačbe $y'' - 3y' + 2y = 0$. (2 boda)
(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednačbe iz (i) koje zadovoljava početne uvjete $y(0) = 1, y(\ln 2) = 2$. (1 bod)
4. (i) Prelaskom na polarne koordinate riješite integral $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dx \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}x}^{\frac{\sqrt{3}}{3}x} dy + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy$. (3 boda)
(ii) Geometrijski interpretirajte taj integral. (1 bod)
5. Riješite diferencijalnu jednačbu $y' = \frac{1+(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}}$. (2 boda)

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, DRUGI DIO B GRUPA 6. lipnja 2009.

1. Odredite $\iint_D (5-x-y)dxdy$, gdje je D područje omeđeno parabolom $(y-2)^2 = 3x+1$ i pravcem $y = 3x + 1$. (3 boda)
2. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednačbe $y' - \frac{y}{x} = x^3$. (2 boda)
(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednačbe iz (i) koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 0$. (1 bod)
3. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednačbe $y'' - 3y' + 2y = 0$. (2 boda)
(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednačbe iz (i) koje zadovoljava početne uvjete $y(0) = 1, y(\ln 2) = 2$. (1 bod)
4. (i) Prelaskom na polarne koordinate riješite integral $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dx \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}x}^{\frac{\sqrt{3}}{3}x} dy + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy$. (3 boda)
(ii) Geometrijski interpretirajte taj integral. (1 bod)
5. Riješite diferencijalnu jednačbu $y' = \frac{1+(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}}$. (2 boda)

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, DRUGI DIO B GRUPA 6. lipnja 2009.

1. Odredite $\iint_D (5-x-y)dxdy$, gdje je D područje omeđeno parabolom $(y-2)^2 = 3x+1$ i pravcem $y = 3x + 1$. (3 boda)
2. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednačbe $y' - \frac{y}{x} = x^3$. (2 boda)
(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednačbe iz (i) koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 0$. (1 bod)
3. (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednačbe $y'' - 3y' + 2y = 0$. (2 boda)
(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednačbe iz (i) koje zadovoljava početne uvjete $y(0) = 1, y(\ln 2) = 2$. (1 bod)
4. (i) Prelaskom na polarne koordinate riješite integral $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} dx \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}x}^{\frac{\sqrt{3}}{3}x} dy + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy$. (3 boda)
(ii) Geometrijski interpretirajte taj integral. (1 bod)
5. Riješite diferencijalnu jednačbu $y' = \frac{1+(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}}$. (2 boda)

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, DRUGI DIO C GRUPA 6. lipnja 2009.

- (i) Prelaskom na polarne koordinate riješite integral $\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{-\sqrt{3x}}^{\sqrt{3x}} dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy$. (3 boda)
(ii) Geometrijski interpretirajte taj integral. (1 bod)
- Riješite diferencijalnu jednadžbu $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$. (2 boda)
- Odredite $\iint_D (6-x-y) dx dy$, gdje je D područje omeđeno parabolom $(y-1)^2 = 4x+1$ i pravcem $y = 2x$. (3 boda)
- (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' - 2y' + 2y = 0$. (2 boda)
(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednadžbe iz (i) koje zadovoljava početne uvjete $y(0) = 4, y(\ln 3) = 10$. (1 bod)
- (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y' - \frac{y}{x} = x^2$. (2 boda)
(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednadžbe iz (i) koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 1$. (1 bod)

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, DRUGI DIO C GRUPA 6. lipnja 2009.

- (i) Prelaskom na polarne koordinate riješite integral $\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{-\sqrt{3x}}^{\sqrt{3x}} dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy$. (3 boda)
(ii) Geometrijski interpretirajte taj integral. (1 bod)
- Riješite diferencijalnu jednadžbu $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$. (2 boda)
- Odredite $\iint_D (6-x-y) dx dy$, gdje je D područje omeđeno parabolom $(y-1)^2 = 4x+1$ i pravcem $y = 2x$. (3 boda)
- (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' - 2y' + 2y = 0$. (2 boda)
(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednadžbe iz (i) koje zadovoljava početne uvjete $y(0) = 4, y(\ln 3) = 10$. (1 bod)
- (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y' - \frac{y}{x} = x^2$. (2 boda)
(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednadžbe iz (i) koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 1$. (1 bod)

3. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, DRUGI DIO C GRUPA 6. lipnja 2009.

- (i) Prelaskom na polarne koordinate riješite integral $\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{-\sqrt{3x}}^{\sqrt{3x}} dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy$. (3 boda)
(ii) Geometrijski interpretirajte taj integral. (1 bod)
- Riješite diferencijalnu jednadžbu $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$. (2 boda)
- Odredite $\iint_D (6-x-y) dx dy$, gdje je D područje omeđeno parabolom $(y-1)^2 = 4x+1$ i pravcem $y = 2x$. (3 boda)
- (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' - 2y' + 2y = 0$. (2 boda)
(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednadžbe iz (i) koje zadovoljava početne uvjete $y(0) = 4, y(\ln 3) = 10$. (1 bod)
- (i) Nađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y' - \frac{y}{x} = x^2$. (2 boda)
(ii) Odredite ono partikularno rješenje jednadžbe iz (i) koje zadovoljava početni uvjet $y(1) = 1$. (1 bod)