3. OGLEDNI KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE II, PRVI DIO RJEŠENJA

1. (i) $y' + g(x) \cdot y = h(x)$, gdje su g i h funkcije i $y' := \frac{dy}{dx}$.
   Ako je h nula funkcija jednadžba je homogena: $y' + g(x) \cdot y = 0$, inače je nehomogena.

   (ii) Nelinearna je a), ostale su linearne.
   b) je homogena, a c) i d) su nehomogene.

   (iii) Iz $y = 2e^{-kx}$ deriviranjem dobijemo $y' = -2ke^{-kx}$.
   Sad je $y' + ky = -2ke^{-kx} + k \cdot 2e^{-kx} = 0$, pa je $y = 2e^{-kx}$ rješenje diferencijalne jednadžbe.

2. (i) $F(x, y, y') = 0$ i $y(0) = y_0$, gdje je F neka funkcija triju varijabla.

   (ii) Iz $y' = ky$ dobijemo redom:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{y} &= kdx \\
\ln|y| &= kx + \ln|C|, \quad C \neq 0 \\
|y| &= |C|e^{kx} \\
y &= Ce^{kx}
\end{aligned}
$$

   za $C \in \mathbb{R}$ jer je $y = 0$ također rješenje.
   Sad iz $y(0) = A$ dobijemo $C \cdot e^{k \cdot 0} = A$, tj. $C = A$ pa je rješenje Cauchyjevog problema

$$y = Ae^{kx}.$$

   (iii) Za $k > 0$ to je diferencijalna jednadžba rasta ili razmnožavanja (bez ograničenja), a za $k < 0$ to je diferencijalna jednadžba raspada (radioaktivnog i sl.).

3. (i) $y'' + py' + q \cdot y = 0$, gdje su p, q realni brojevi.

   (ii) $r^2 + pr + q = 0$. Jednadžba može imati dva različita realna rješenja, dvostruko rješenje ili dva kompleksno konjugirana rješenja.

   (iii) Ako je $r_1 \neq r_2$ i rješenja karakteristične jednadžbe su realna, onda je $y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$ za $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ po volji.
   Ako je $r_1 = r_2 = r$ onda je $y = C_1e^{rx} + C_2xe^{rx}$ za $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
   Ako je $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ i $\beta \neq 0$ onda je $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$ za $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

4. (i) $y(t)$ je koordinata položaja u vremenu t čestice koja titra.
   $y'(t)$ je brzina $v(t)$ te čestice u vrijeme t.
   $y''(t)$ je akceleracija $a(t)$ te čestice u vrijeme t.
   ω je kutna brzina, A je amplituda.
   Uvjet $y(0) = A$ znači da je za $t = 0$ čestica u točki $(0, A)$ na $y-$osi.
   $y'(0) = 0$ znači da je brzina te čestice za $t = 0$ jednaka nuli.

   (ii) Pogledajte lekciju 13.

5. (i)

$$
\begin{aligned}
y &= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \\
y' &= -C_1\omega \sin \omega t + C_2\omega \cos \omega t \\
y'' &= -C_1\omega^2 \cos \omega t - C_2\omega^2 \sin \omega t \\
\hline
y'' + \omega^2 y &= -C_1\omega^2 \cos \omega t - C_2\omega^2 \sin \omega t + \omega^2(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) = 0
\end{aligned}
$$

   (ii)

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{a}{2}t^2 + C_1t + C_2 \\
y' &= at + C_1 \\
y'' &= a
\end{aligned}
$$

   Gotovo.

   (iii) Diferenciramo $x^2 + y^2 = C$ i dobijemo $2xdx + 2ydy = 0$ jer je $dC = 0$.
   Odavdje dobijemo $xdx + ydy = 0$.