LEKCIJE IZ MATEMATIKE 2

Ivica Gusić

Izvedbeni program iz Matematike 2.
(za sve studije)

Lekcije

1. Neodredjeni integral i metode računanja.

2. Problem površine - odredjeni integral. Leibnitz-Newtonova formula.

3. Metode računanja odredjenog integrala. Nepravi integral.

4. Primjena odredjenog integrala u geometriji.

5. Primjena odredjenog integrala u prirodnim znanostima.

6. Pojam funkcije dviju varijabla, grafa i parcijalnih derivacija.

7. Linearna i kvadratna aproksimacija funkcije više varijabla.

8. Lokalni ekstremi funkcije više varijabla.

9. Višestruki integrali - uzastopno integriranje.

10. Primjena višestrukog integrala.

11. Pojam obične diferencijalne jednadžbe, integralne krivulje i početnih uvjeta.

12. Primjena običnih diferencijalnih jednadžba. Cauchyev problem.

13. Metode rješavanja nekih običnih diferencijalnih jednadžba 1. i 2. reda.

14. Pojam parcijalne diferencijalne jednadžbe, rješenja i početnih i rubnih uvjeta.

15. Primjena parcijalnih diferencijalnih jednadžba.

Lekcije iz Matematike 2.

1. Neodredjeni integral i metode računanja.

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se razmatra nedredjeni integral funkcije - pojam koji je inverzan pojmu derivacije funkcije. Naziv dolazi od toga što neodredjeni integral funkcije nije jedna funkcija (dakle nije jednoznačno odredjen), već skup funkcija - medjusobno povezanih.
Takodjer, navodi se tablica integrala nekih važnih elementarnih funkcija i objašnjavaju osnovne metode odredjivanja integrala.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

U matematici samoj, napose pri matematičkoj obradi inženjerskih problema, jedan od najvažnijih pojmova jest pojam inverzne operacije: oduzimanje je inverzno zbrajanju (i zasniva se na pojmu suprotnih brojeva, napose negativnih koji su suprotni pozitivnim), slično je s množenjem i dijeljenjem, s pojmom funkcije i njoj inverzne funkcije; ako matricu shvatimo kao preslikavanje prostora, onda se inverzno preslikavanje ostvaruje preko inverzne matrice itd.
Pojam neodredjenog integrala (ili, jednostavno, integrala) inverzan je, na neki način, pojmu derivacije. Deriviranje se može shvatiti kao operacija koja svakoj funkciji pridružuje derivaciju funkcije; integriranje je inverzna operacija.

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati:
1. Pojam derivacije funkcije i osnovna svojstva derivacije (kao operacije).
2. Osnovne elementarne funkcije (potencije i korijene, eksponencijalne i logaritamske, trigonometrijske i arkus funkcije), naročito tablicu derivacija tih funkcija.
3. Oznaku $\frac{df(x)}{dx}$ za derivacuju funkcije f; dakle

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

što je **diferencijalni** zapis derivacije funkcije, kao omjer **diferencijala funkcije** $df(x)$ (tradicionalno - beskonačno malog prirasta funkcije) i **diferencijala argumenta** dx (beskonačno malog prirasta argumenta), koje se zasniva na relaciji:

$$f'(x) \approx \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Derivacija kao omjer diferencijala često se piše kao

$$df(x) = f'(x)dx$$

i ta jednakost ima precizno matematičko značenje koje tu ne tumačimo.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

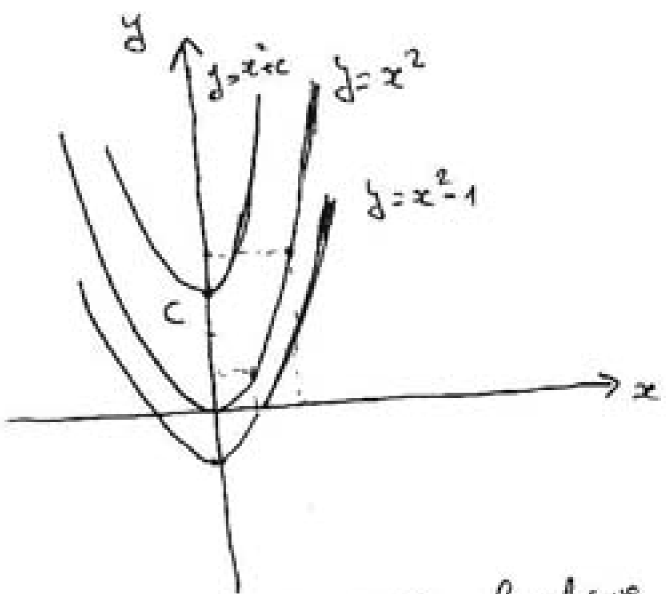
Definicija neodredjenog integrala funkcije

Razmotrimo sljedeći problem:
Treba odrediti funkciju F tako da bude $F'(x) = 2x$

Problem ćemo rješiti **pogadjanjem** koje se temelji na znanju derivacija potencija, odnosno na činjenici da je $(x^2)' = 2x$ i na činjenici da se dodavanjem konstante derivacija ne mijenja:

$$(x^2)' = (x^2+1)' = (x^2-3)' = ... = 2x$$

općenito, $(x^2 + C)' = 2x$ za svaku konstantu C (sl.1.).



Sl.1. Skup primitivnih funkcija funkcije $2x$; krivulje $y = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$

Matematički se ovaj problem i njegovo rješenje zapisuje kao

$$\int 2xdx = x^2 + C$$

Kažemo da je **skup funkcija** $x^2 + C$ neodredjeni integral funkcije $2x$.

Općenito,činjenicu $F'(x) = f(x)$ zapisujemo kao:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

(čitamo: *integral ef od iks de iks je veliko ef od iks*). Oznaka dx ima i strogo matematičko značenje, ulogu te oznake upoznat ćemo poslije.
Izraz $F(x)+C$ znači skup funkcija $\{F(x)+C\}$, medjutim, zbog jednostavnosti, vitičaste zagrade izostavljamo.
Kažemo da je **skup funkcija** $F(x) + C$ neodredjeni integral funkcije f.
Takodjer, kažemo da je svaka od gornjih funkcija $F(x)+C$ **primitivna funkcija funkcije** f.

Uočimo da deriviranje i integriranje nisu **bukvalno** inverzne operacije, već da se mogu shvatiti kao takve. Naime:
Ako podjemo od funkcije f pa integriramo, dobit čemo skup funkcija $\{F(x) + C\} = \int f(x)dx$, pa ako bilo koju od tih funkcija deriviramo, vratit ćemo se u f (jer je $(F(x) + C)' = f(x)$); kraće:

$$(\int f(x)dx)' = f(x)$$

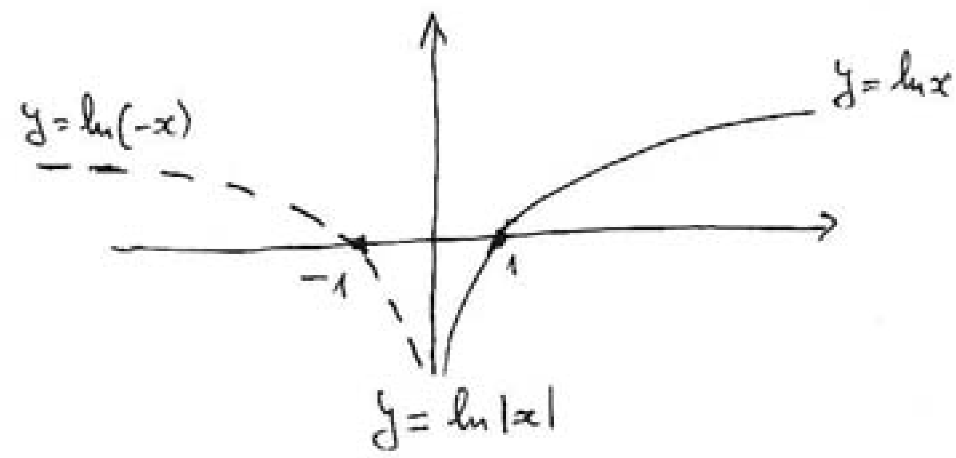
Medjutim, ako podjemo od funkcije F pa je najprije deriviramo, potom rezultat integriramo, dobit ćemo skup funkcija $\{F(x) + C\}$ (medju kojima je i funkcija F, koju dobijemo za $C = 0$):

$$\int F'(x)dx = \{F(x) + C\}$$

Primjer 1. Kako je $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, vidimo da je $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$ i to vrijedi za $x > 0$.
Takodjer, kako je $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$, vidimo da je $\int \frac{1}{x}dx = \ln(-x) + C$ i to vrijedi za $x < 0$.
Ove dvije derivacije mogu se zapisati kao $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ (sl.2). Zato se ova dva integrala mogu napisati kao jedan:

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

(smisao je da bilo koju konstantu možemo dodati za $x > 0$ i bilo koju za $x < 0$).



Sl.2. Graf funkcije $f(x) := \ln|x|$

Tablica značajnih integrala - treba znati napamet

Tablica integrala zasniva se na tablici derivacija i na definiciji neodredjenog integrala:
$\int f(x)dx = F(x) + C$ znači da je $F' = f$

1. (i) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ jer je $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$
- to vrijedi za sve realne eksponente, osim $n = -1$ a ne samo za prirodne.

(ii) $\int x^{-1}dx = \ln|x| + C$, tj. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ jer je $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

2. (i) $\int \cos x dx = sinx + C$ jer je $(\sin x)' = \cos x$
(ii) $\int \sin x dx = -cosx + C$ jer je$(\cos x)' = -\sin x$
(iii) $\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = tgx + C$ jer je $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
(iv) $\int \frac{1}{\sin^2(x)}dx = -ctgx + C$ jer je $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

3. (i) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = Arcsinx + C$ jer je $(Arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(ii) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = Arctgx + C$ jer je $(Arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

4. (i) $\int e^x = e^x + C$ jer je $(e^x)' = e^x$
(ii) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ jer je $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

5. (i) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$ jer je $(\ln(x + \sqrt{x^2+1}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
(ii) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C$ jer je $(\ln(x + \sqrt{x^2-1}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Napomene o oznakama:
1. Umjesto $\int 1 \cdot dx$ obično se piše $\int dx$, dakle $\int dx = x + C$ jer je $(x)' = 1$.

2. Katkad se, radi jednostavnosti, oznaka dx stavlja u brojnik. Na primjer $\int \frac{1}{1+x^2} dx$ piše kao $\int \frac{dx}{1+x^2}$, $\int \frac{1}{x} dx$ kao $\int \frac{dx}{x}$ itd.

Svojstva neodredjenog integrala

Opća je činjenica da su svojstva operacije analogna svojstvima njima inverznih operacija i da se jedna izvode iz drugih. Tako je i s derivacijom i integralom (bar djelomično, jer oni nisu bukvalno inverzni). Neka od svojstava smo prešutno iskoristili kod izrade tablice integrala.

1.(i) **Integral zbroja je zbroj integrala**: $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x) + \int g(x)$,
jer je $(f + g)' = f' + g'$
(ii) **Integral razlike je razlika integrala**:$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x) - \int g(x)$,
jer je $(f - g)' = f' - g'$

2. **Konstanta koja množi može se izvući ispred integrala** $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$,
jer je $(\lambda f)' = \lambda(f)'$.

Postoje i svojstva integrala analogna formulama za derivaciju umnoška funkcija i formuli za derivaciju složene funkcije, ali to ćemo obraditi kao metode računanja integrala.

Primjer 2. - primjena formula 1. i 2.
$\int (3 \cos x + \frac{2}{x} - 5x^3 + 4)dx = 3 \int \cos x dx + 2 \int \frac{dx}{x} - 5 \int x^3 + 4 \int dx = 3 \sin x + 2 \ln |x| - 5 \frac{x^4}{4} - 4x + C$

Tu smo za sve integrale, na kraju dodali jednu konstantu C.

Nastavak svojstava neodredjenog integrala - metoda parcijalne integracije
Iz formule za derivaciju umnoška funkcija:

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

malim razmještanjem i integriranjem dobijemo

$$\int f(x)g'(x)dx = \int [f(x)g(x)]'dx - \int g(x)f'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

Ako uvrstimo: $dg(x) = g'(x)dx$, odnosno, $df(x) = f'(x)dx$ i ako, poštujući tradiciju, pišemo v umjesto g i u umjesto f i ako ne stavljamo argument x onda se to može, kraće (i malo nekorektno - ali lakše se pamti) zapisati kao:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Ta se formula zove formula za parcijalno integriranje.

Primjer 3. - primjena formule parcijalne integracije.
Treba izračunati $\int x \cos x dx$. Tu možemo staviti:

$u = x,\ du = dx$
$dv = \cos x dx,\ v = \sin x$
pa je, prema formuli parcijalne integracije:
$\int x \cos x dx = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \sin x - (-\cos x) + C = x \sin x + \cos x + C$
Provjera:
$(x \sin x + \cos x + C)' = 1 \cdot \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x.$

Nastavak svojstava neodredjenog integrala - zamjena (supstitucija) varijable u neodredjeni integral.

Iz formule za derivaciju složene funkcije

$$[F(g(t)]' = F'[g(t)]g'(t)$$

uvrštavanjem $f := F'$, $g(t) = x$ i integriranjem, dobijemo:
$\int f[g(t)]g'(t)dt = \int [F(g(t)]'dt = F(g(t)) + C = F(x) + C = \int f(x)dx$
tj.

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)]g'(t)dt$$

gdje je $x = g(t)$. To je **supstitucija u neodredjeni integral**. Tu formulu koristimo na dva načina.
Prvi je da polazimo od desne strane, pa ako znademo izračunati lijevu, onda znademo i desnu.
Drugi je da polazimo od lijeve i ako znademo izračunati desnu, onda ćemo znati i lijevu, uz uvjet da g ima inverznu funkciju, tj. da je $t = g^{-1}(x)$. Neki samo ovu primjenu zovu supstitucija, mi ćemo tako zvati i prvu i drugu.

Primjer 4. - primjena formule za supstituciju varijable u neodredjeni integral
(i) Treba izračunati $\int \cos(2x)dx$. Tu je:
$2x = t$;
$2dx = dt$ pa je,
$\int \cos(2x)dx = \int \cos t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int \cos t dt = \frac{\sin t}{2} + C = \frac{\sin(2x)}{2} + C$
Provjera: $(\frac{\sin(2x)}{2})' = \frac{2\cos(2x)}{2} = \cos(2x)$

(ii) $\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2+1}} = [x^2 + 1 = t,\ 2xdx = dt]$
$= \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}} = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{x^2+1} + C$
što se lako provjeri.
Primjer 5. - računanje integrala ako je brojnik derivacija nazivnika)
$\int \frac{g'(x)}{g(x)} = [g(x) = t;\ g'(x)dx = dt]$
$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|f(x)| + C$
To se lako provjeri i izravnim deriviranjem.
Na primjer:
(i) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln(x^2 + 1) + C$
jer je brojnik derivacija nazivnika (naime $(x^2 + 1)' = 2x$) i $x^2 + 1 > 0$ za sve x, pa ne treba apsolutna vrijednost).
(ii) $\int ctgx dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$

Primjer 6. - kombinacija parcijalne integracije i supstutucije
$\int Arcsinx dx = [u = Arcsinx,\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};\ dv = dx,\ v = x] =$
$Arcsinx \cdot x - \int x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [1 - x^2 = t;\ -2xdx = dt] =$
$xArcsinx - \int \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{dt}{-2} =$
$xArcsinx + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t} + C = xArcsinx + \sqrt{1-x^2} + C.$

U ovim smo primjerima stalno imali prvu primjenu formule za supstituciju, tj. stavljali smo $t = h(x)$ i nigdje nam nije trebala inverzna funkcija . U sljedećem ćemo primjeru imati *pravu* supstituciju tj. zamjenu $x = g(t)$ i tu će nam trebati $t = g^{-1}(x)$.

Primjer 7. Izračunajmo $\sqrt{1-x^2}dx$.
Koristimo zamjenu: $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$ za $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$; $t = Arcsinx$.
Dobijemo:
$\sqrt{1-x^2}dx = \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int \sqrt{\cos^2 t}\cos t dt = \int \cos^2 t dt$ (jer je u ovim uvjetima $\cos t \geq 0$)
Sad iskoristimo relaciju:

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

pa dobijemo:
$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} dt + C = \frac{Arcsinx}{2} + \frac{2\sin(Arcsinx)\cos(Arcsinx)}{4} + C = \frac{Arcsinx}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C.$
Naime, $\cos(Arcsinx) = \sqrt{1-\sin^2(Arcsinx)} = \sqrt{1-x^2}$.
Dakle $\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{Arcsinx}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$, što je lako provjeriti.

V. Pitanja i zadaci

1. Izračunajte:
(i) $\int xe^{-x}dx$
(ii) $\int xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$
(iii) $\int x^2 e^x dx$
(iv) $\int x\sin x dx$
(v) $\int \ln x dx$
(vi) $\int Arctgx dx$
(uputa: parcijalna integracija, jednom ili više puta)
2. Neka je $a > 0$. Izračunajte
(i) $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$
(ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$
(iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$
(iv) $\int \sqrt{a^2-x^2}$
Posebno izračunajte za $a = \sqrt{2}$
(uputa: zamjena varijable: $ax = t$ i tablica integrala).
3. Izračunajte:
(i) $\int \frac{2x-1}{x^2+1}dx$
(ii) $\int tgx dx$
(ii) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

(uputa: brojnik derivacija nazivnika ili rastavljanje razlomka).

Lekcije iz Matematike 2.

2. Primjena neodredjenog integrala u inženjerstvu - neke važne diferencijalne jednadžbe.

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se primjerima pokazuje važnost nedredjenog integrala u primjenama:
1. Odredjuje se jednadžba radioaktivnog raspada.
2. Odredjuje se jednadžba hladjenja (odnosno zagrijavanja) tijela.
3. Odredjuje se jednadžba gibanja tijela po pravcu pri djelovanju konstantne sile.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Vidjeli smo da se derivacijom teoretski opisuju i kontroliraju najvažnija fizikalna svojstva: brzina promjene, rast, pad i prijelaz s jednog na drugi (lokalni ekstremi) ubrzani i usporeni rast i pad, prijelaz s ubrzanje na usporenje i obratno (točke infleksije) itd. Medjutim, sve to ide uz uvjet da poznajemo pravilo (funkciju) prema kojemu se proces odvija (položaj točke koja se giba po pravcu u ovisnosti o vremenu, vrijednost jedne veličine u procesu u ovisnosti o promjeni druge veličine itd.).
Nažalost, u stvarnosti, obično ne poznajemo izravno jednadžbu (pravilo) prema kojoj se neki proces odvija, a to nas najviše zanima. Češće možemo, točno ili približno, opisati brzinu kojom se proces odvija, silu koja uvjetuje gibanje i sl. Vidjet ćemo kako se tada, koristeći se integralom i pojmom diferencijalne jednadžbe, može barem načelno riješiti problem odredjivanja pravila odvijanja procesa.

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati:
1. Činjenicu da ako su dvije veličine x, y povezane relacijom $y = f(x)$, onda se brzina promjene veličine y s obzirom na promjenu veličine x opisuje derivacijom $f'(x)$ funkcije f po x, tj. s $\frac{df}{dx}$; što se se zapisuje kratko i kao y', odnosno $\frac{dy}{dx}$.
Kraće:
Brzina $v(x)$ od y (s obzirom na x) $= y'(x) = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{df}{dx}$
(tu su navedene različite oznake).
Takodjer, da se tada akceleracija promjene opisuje drugom derivacijom funkcije

f po x. Kraće:
Akceleracija $a(x)$ od y (s obzirom na x) $=\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$

2. Pojam neodredjenog integrala i vrijednost nekih jednostavnih integrala.

3. Činjenicu da je $\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$

4. Činjenicu da je akceleracija proporcionalna sili, a da je koeficijent proporcionalnosti masa (jedan od Newtonovih zakona).

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Pojam diferencijalne jednadžbe.
Već smo vidjeli da se brzina (čestice koja se giba po pravcu) dobije iz jednadžbe gibanja deriviranjem (to se kraće izražava malo nepreciznom rečenicom:
brzina je derivacija puta po vremenu).
Naime, tu se ne derivira funkcija koja opisuje prijedjeni put u vremenu, već funkcija koja opisuje **položaj** čestice što se giba.
Obratan je problem:
Možemo li, barem teoretski, rekonstruirati gibanje čestice (tj. položaj u svakom trenutku t), ako znademo brzinu (u svakom trenutku t)?
Odgovor je *možemo*, pod uvjetom da znademo položaj čestice u nekom (jednom konkretnom) trenutku t_0. Naime, označimo:
1. $y(t)$ - položaj u trenutku t čestice koja se giba po y-osi (ako nema zabune, pišemo samo y).
2. $v(t)$ - brzina u trenutku t te čestice (ako nema zabune, pišemo v).
Tada je $v(t) = y'(t)$, tj. $v(t) = \frac{dy(t)}{dt}$ ili, kraće: $v = y'$, tj. $v = \frac{dy}{dt}$
Dakle $y(t) = \int v(t)dt$ ili, kraće $y = \int vdt$.
Kako znamo, rješenje je skup primitivnih funkcija ovisnih o konstanti C, koju ćemo znati odrediti budemo li znali položaj u nekom trenutku t_0, tj. vrijednost $y(t_0)$. Zaključak:
Rekonstrukcija gibanja iz brzine:

$$y'(t) = v(t),\ y(t_0) = y_0$$

Tu se $y' = v$ zove **diferencijalna jednadžba gibanja**, a $y(t_0) = y_0$ **početni uvjet**.
Problem odredjivanja funkcije $y(t)$ ako su poznati $v(t)$ i y_0 zove se Cauchy-ev problem.
Analogan pristup vrijedi za svake dvije zavisne veličine u nekom procesu.

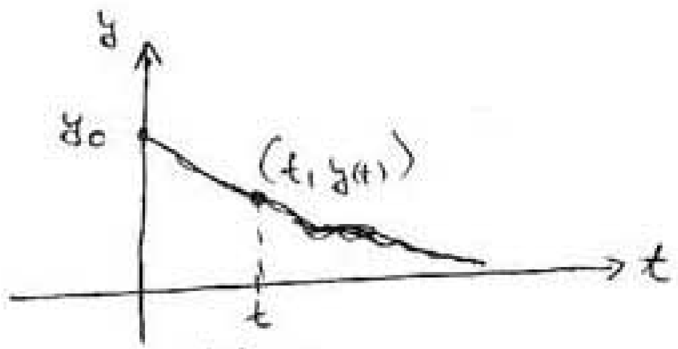
Primjer 1. Riješimo Cauchy-ev problem $y' = 2x:\ y(0) = 1$:

$y = \int 2xdx = x^2 + C$. Iz $y(0) = 1$, dobijemo $1 = 0^2 + C$, tj. $C = 1$. Rješenje je $y = x^2 + 1$.

Opis radioaktivnog raspada - diferencijalna jednadžba radioaktivnog raspada
Neka je:

1. t vrijeme
2. $y(t)$ količina radioaktivne materije (na primjer $(C-14)$), u trenutku t
3. $y_0 := y(0)$ količina radioaktivne materije u početku (za $t=0$).

Problem opisa radioaktivnog raspada jest problem odredjivanja $y(t)$ u ovisnosti o t.
Ograničit ćemo se na raspad u izoliranim uvjetima. S problemom se upoznajemo pokusom; glavna je poteškoća (na primjer s teškim elementima kao što je $C-14$), što se vrlo sporo raspada pa je teško doći do podataka u širokoj vremenskoj skali. Zato treba naći metodu koja će iz **lokalnih** rezultata dati **globalne**.
Intuitivno je jasno da je $y(t)$ neka padajuća funkcija (sl.1.).



Sl. 1

1. korak - Eksperimentalno odredjivanje diferencijalne jednadžbe raspada. Intuitivno je jasno, a potvrdjuje se pokusom, da je količina raspadnute materije, izmedju dvaju relativno bliskih mjerenja u vremenima t i $t+\Delta t$, približno proporcionalna proteklom vremenu Δt i količini $y(t)$ materije u vremenu t. Dakle, postoji pozitivna konstanta k (ovisna samo o vrsti radioaktivne materije, a ne i o vremenu), tako da bude:

$$\Delta y \approx -ky(t)\Delta t$$

Naime, količina raspadnute materije je

$$y(t) - y(t+\Delta t) = -\Delta y$$

(predznak minus je jer se količina smanjuje). Sve se može zapisati i kao:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx -ky$$

2. korak - Diferencijalna jednadžba raspada
Iz gornje približne jednadžbe naslučujemo diferencijalnu jednadžbu raspada (skupa s početnim uvjetom):

$$\frac{dy}{dt} = -ky;\ y(0) = y_0$$

Odavde se može rekonstruirati jednadžba raspada ovako:
$\frac{dy}{y} = -kdt$, pa je $\int \frac{dy}{y} = \int(-kdt)$, tj.

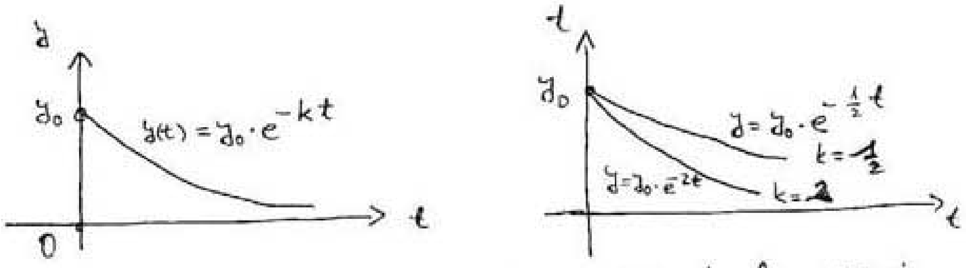
$\ln y = -kt + \ln C$ (tu smo iskoristili da je $y(t) > 0$ za sve t i konstantu smo, napisali kao $\ln C$). Sad je:
$y = e^{\ln C - kt} = e^{\ln C} e^{-kt} = Ce^{-kt}$, a iz uvjeta $y(0) = y_0$, dobijemo $C = y_0$. Konačno, imamo:

$$y = y_0 e^{-kt}$$

što možemo zapisati i kao:

$$y(t) = y(0)e^{-kt}$$

Da bismo raspad opisali do kraja potrebno je znati koeficijent k. Na primjer, za $(C-14)$ je $k = 1.244 \cdot 10^{-4}$ (približno, uz uvjet da se vrijeme mjeri u godinama) (sl.2.).



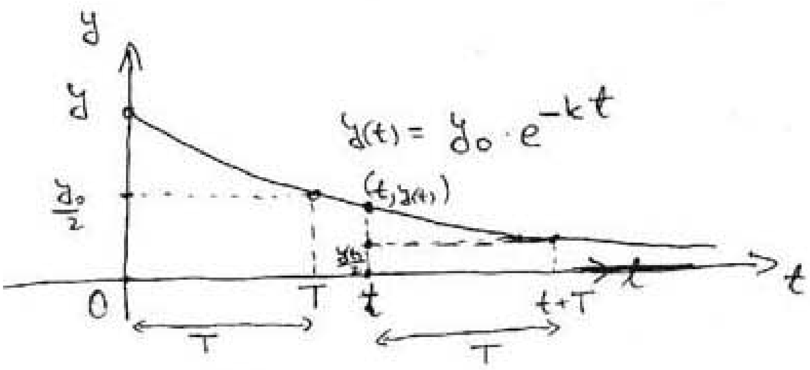
što je k manji
raspadanje je sporije

Sl. 2.

Primjer 2. - vrijeme poluživota. Odredimo vrijeme poluživota radioaktivne materije, tj. vrijeme T za koje se količina radioaktivne materije prepolovi (posebice za $(C-14)$).
Treba biti $y(t+T) = \frac{1}{2}y(t)$. Uvrštavanjem se dobije:
$y(0)e^{-k(t+T)} = \frac{1}{2}y(0)e^{-kt}$, tj. $e^{-kt}e^{-kT} = \frac{1}{2}e^{-kt}$, tj. $e^{-kT} = \frac{1}{2}$, tj. $-kT = \ln 1 - \ln 2$, tj.

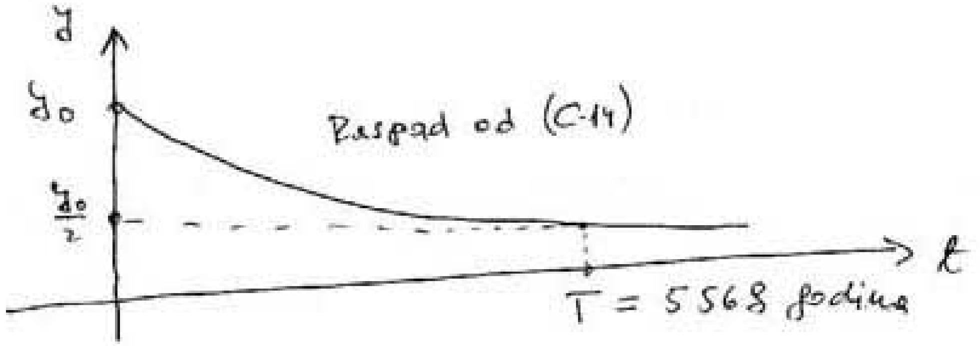
$$T = \frac{\ln 2}{k}.$$

Vidimo da vrijeme poluživota T ne ovisi o t već samo o k (tj. o vrsti materije). Zato je T važna karakteristika radioaktivne materije (sl.3.).



Sl. 3

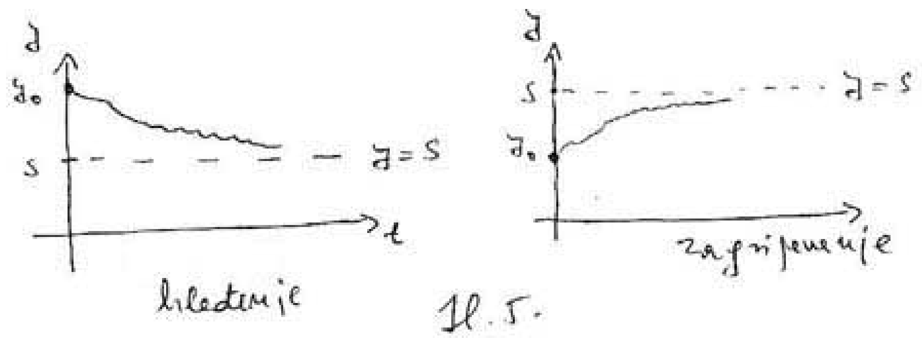
Za $(C-14)$ je $k = 1.244 \cdot 10^{-4}$ (približno), pa je $T = 5568$ godina (približno, uz uvjet da vrijeme mjerimo u godinama) (sl.4).



sl. 4

Hladjenje - zagrijavanje tijela u sredini stalne temperature
Neka je:
1. t - vrijeme.
2. S - stalna temperatura sredine.
3. $y(t)$ - temperatura tijela smještena u sredinu.
4. y_0 - početna temperatura tijela.

Problem: Treba opisati mijenjanje temperature tijela ovisno o vremenu.
Intuitivno je jasno da će se tijelo hladiti ako je $y_0 > S$, da će se zagrijavati i približavati temperaturi S ako je $y_0 < S$, te da će zadrzavati stalnu temperaturu ako je $y_0 = S$ (sl.5.).



sl. 5.

Takodjer je intuitivno jasno, a potvrdjuje se pokusom (Newtonov zakon), da je, u svakom trenutku, promjena temperature proporcionalna razlici izmedju temperature tijela i sredine, takodjer da je proporcionalna proteklom vremenu (za male vremenske pomake). Dakle, pokus pokazuje:

$$\Delta y(t) \approx -k[y(t) - S]\Delta t$$

za pozitivnu konstantu k (koja ovisi o materijalu); negativni predznak dolazi od toga što se termperatura tijela smanjuje ako je $y(t) - S > 0$. Odatle dobijamo

diferencijalnu jednadžbu hladjenja - zagrijavanja.

$$\frac{dy}{dt} = -k(y - S)$$

Primjer 3. - opis mijenjanja temperature tijela u sredini stalne temperature.
Treba riješiti Cauchy-ev problem

$$\frac{dy}{dt} = -k(y - S); \; y(0) = y_0$$

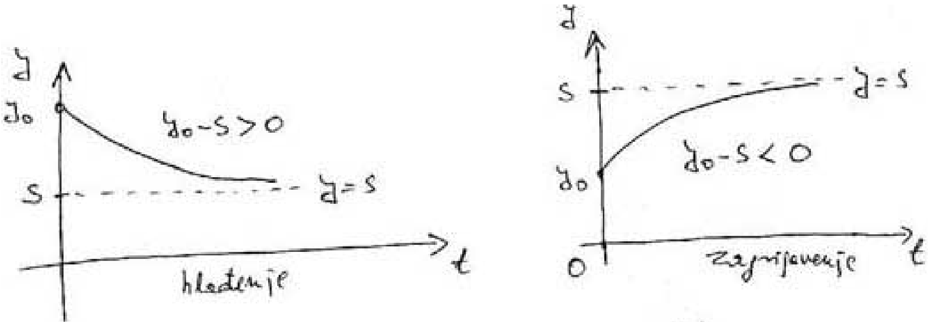
Nakon zamjene: $z = y - S$; $dz = dy$ dolazimo do

$$\frac{dz}{dt} = -kz; \; z(0) = y_0 - S$$

što znamo riješiti (jer je sve kao kod radioaktivnog raspada). Dobijemo: $z(t) = (y_0 - S)e^{-kt}$, tj.

$$y(t) = S + (y_0 - S)e^{-kt}$$

Grafički prikaz je na sl. 6.



Sl. 6 : $y(t) = S + (y_0 - S) \cdot e^{-kt}$

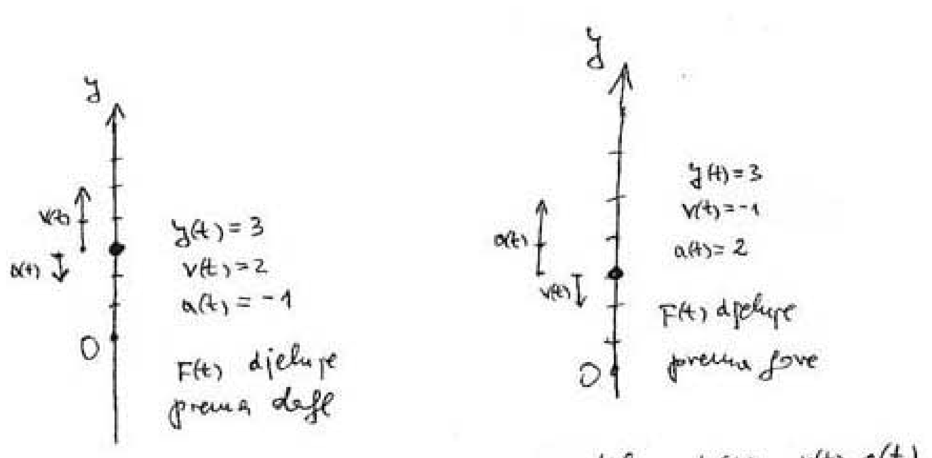
Primjer 4. Tijelo se nalazi u sredini stalne temperature $S = 18°C$ i ima u prvom trenutku mjerenja (za $t = 0$) temperaturu od $35°C$. Nakon sat vremena izmjerena mu je temperatura od $27°C$. Treba odrediti:
(i) konstantu hladjenja.
(ii) temperaturu dva sata vremena prije nultog trenutka.
(iii) temperaturu za dva sata (nakon nultog trenutka).
(iv) vrijeme u kojem će tijelo poprimiti temperaturu od $21°C$.
(v) vrijeme u kojem će tijelo poprimiti temperaturu sredine.

Gibanje po pravcu

Dogovor o brzini, akceleraciji i sili pri gibanju po koordinatnom pravcu

Neka je:
1. $y(t)$ - položaj, tj. koordinata položaja tijela (koje se giba po pravcu) u

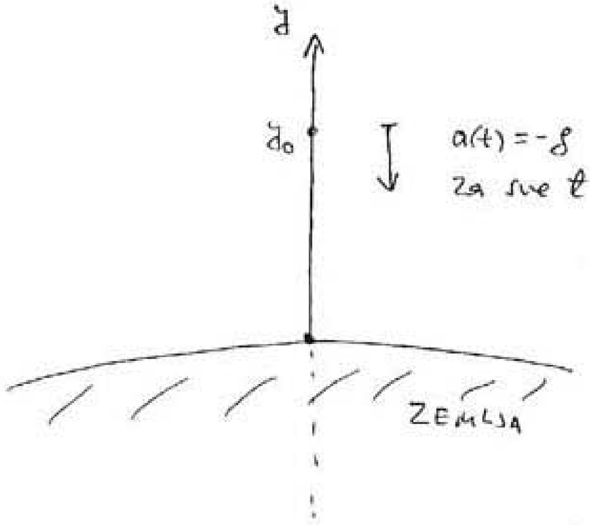
trenutku t.
2. $v(t)$ - brzina tijela u trenutku t.
3. $a(t)$ - akceleracija (ubrzanje) tijela u trenutku t.
4. $F(t)$ - sila koja djeluje na tijelo dok se nalazi u položaju $y(t)$; vrijedi $F(t) = ma(t)$, gdje je m masa tijela.
Tada je:
1. $y(t)$ je realan broj koji označuje položaj, tj. udaljenost od ishodišta koordinatnog sustava na pravcu (to je broj $|y(t)|$) i usmjerenje, tj. ako je $y(t) > 0$ tijelo je na pozitivnom dijelu, a ako je $y(t) < 0$, ono je na negativnom dijelu pravca.
2. $v(t)$ je realan broj, ali ima značenje vektora brzine (kako i treba, jer je brzina vektor); iznos brzine u trenutku t je $|v(t)|$, ako je $v(t) > 0$, onda se u tom trenutku tijelo giba u pozitivnom smjeru, a ako je $v(t) < 0$, onda se u tom trenutku tijelo giba u negativnom smjeru osi y.
3. $a(t)$ je realan broj, ali ima značenje vektora akceleracije (kako i treba, jer je akceleracija vektor); iznos akceleracije u trenutku t je $|a(t)|$; ako je $a(t) > 0$, onda je $F(t) > 0$, pa u tom trenutku sila djeluje u pozitivnom smjeru, a ako je $a(t) < 0$, onda je $F(t) < 0$, pa u tom trenutku sila djeluje u pozitivnom smjeru (sl.7.).



sl.7. Primjeri mogućih $y(t)$, $v(t)$, $a(t)$

Gibanje po pravcu pri djelovanju konstantne sile
Problem: Treba opisati gibanje na pravcu tijela na koji djeluje konstantna sila. Da bi to učinili treba uvesti (t, y) koordinatni sustav ovako:
Neka je:
1. t - vrijeme (koordinatnu os vremena možemo zamišljati horizontalnom).
2. os y - koordinatni pravac (možemo ga zamišljati vertikalnim - okomitim na vremensku os, i pozitivno usmjerenim *prema gore*)
3. $y(t)$ - položaj u trnutku t (tj. koordinata položaja) tijela koje se giba po koordinatnom pravcu y.
4. y_0 - početni položaj tijela, tj. $y_0 := y(0)$.
5. v_0 - brzina tijela u nultom trenutku, tj. $v_0 := v(0)$.
6. $-g$ - stalna akceleracija, tj. sila je stalna i usmjerena suprotno od usmjerenja

y osi i ima iznos g (to smo napravili tako da nas podsjeća na gibanje pod utjecajem sile teže - vertikalni hitac) (sl.8.).



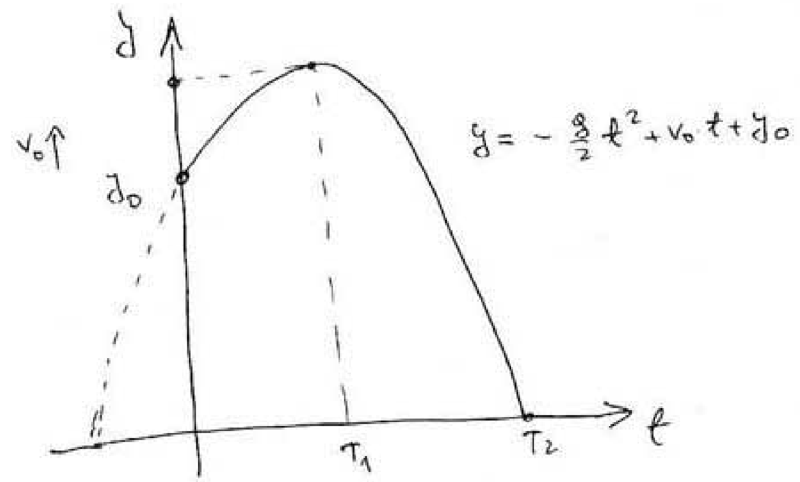
Sl 8. Vertikalni hitac relativno blizu površine Zemlje uz zanemareni otpor zraka i utjecaj drugih sila osim gravitacije.

Rješenje problema - gibanje pod utjecajem stalne sile - vertikalni hitac.

Znademo:
(i) $v(t) = y'(t)$, tj. $v(t) = \frac{dy}{dt}$. Posebno $v(0) = y'(0)$
(ii) $a(t) = v'(t) = (y'(t))' = y''(t)$.
(iii) $a(t) = -g$, za svaki t (jer je sila, pa time i akceleracija, konstantna).
Sad postavljamo Cauchy-ev problem:

$$y'' = -g;\ y(0) = y_0;\ y'(0) = v_0$$

Iz $(y')' = -g$, dobijemo integriranjem
$y'(t) = -gt + C_1$, a odavde, opet integriranjem:
$y(t) = -g\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$, za neke konstante C_1, C_2.
Sad iz $y'(0) = v_0$, dobijemo $C_1 = v_0$, a iz $y(0) = y_0$ dobijemo $C_2 = y_0$. Konačno imamo:
$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + y_0$, i
$v(t) = -gt + v_0$
To je opis položaja i brzine u svakom trenutku t (ako ne dodje do promjene uvjeta) (sl.9.).



Sl. 8. grafički prikaz gibanja pri vertikalnom hitcu za $y_0>0$ i $V_0>0$.

Fizikalno tumačenje rješenja. $y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + y_0$.
Dio $-\frac{g}{2}t^2$ je doprinos od djelovanja sile; $v_0 t$ je doprinos od početne brzine, y_0 od početnog položaja. Na primjer, ako zamislimo da je riječ o vertikalnom hitcu pod utjecajem gravitacije (koja je blizu površine zemlje konstantna) i ako zanemarimo otpor, onda je:
(i) y_0 visina na kojoj je tijelo bilo u početku (i tu bi ostalo da nije početne brzine i gravitacije).
(ii) $v_0 t$ promjena položaja tijela za vrijeme t, koje se giba stalnom brzinom v_0 (to je pozitivno za $v_0 > 0$).
(iii) $\frac{g}{2}t^2$ je put koji bi tijelo prešlo pri slobodnom padu za vrijeme t (ako prije toga ne udari u zemlju); negativni je predznak jer se za tu vrijednost koordinata položaja smanjila.

V. Pitanja i zadaci

1. Odredite formulu radioaktivnog raspada u terminu vremena poluživota.
Uputa. U formulu stavite $k = \frac{\ln 2}{T}$.
2. Tijelo je bačeno u vis brzinom $v_0 = 3m/s$ s početnog položaja $y_0 = 12m$. Uz pretpostavku da je $g = 9.81m/s^2$ i da nema otpora, odredite:
(i) jednadžbu gibanja tog tijela.
(ii) brzinu $v(t)$ u svakom trenutku.
(iii) maksimalnu visinu i vrijeme kad se postiže.
(iv) vrijeme za koje ce tijelo opet biti na početnoj visini i brzinu u to trenutku (komentirajte).
(v) vrijeme pada tijela na površinu zemlje i brzinu u tom trenutku.
(vi) Odredite vremenske intervale ubrzanog i usporenog gibanja.
Uputa: Za (vi) koristite se **kriterijem** ubrzanog, odnosno usporenog gibanja po pravcu: **gibanje po pravcu je ubrzano u nekom trenutku ako, u tom**

trenutku, brzina i akceleracija imaju isto usmjerenje, a usporeno, ako su usmjerenja suprotna.
Taj se kriterij zasniva na definiciji ubrzanja: **gibanje je ubrzano ako se iznos brzine povećava**.
Uočite, da, iako je ovdje akceleracija stalna (i negativna), tj. $a(t) = -g$ za sve t, postoji i ubrzano i usporeno gibanje.

3. Postavite Cauchy-ev problem vertikalnog hitca, ako je otpor u svakom trenutku proporcionalan i suprotno usmjeren brzini.

Lekcije iz Matematike 2.

3. Problem površine - odredjeni integral. Leibnitz-Newtonova formula.

I. Naslov i objašnjenje naslova

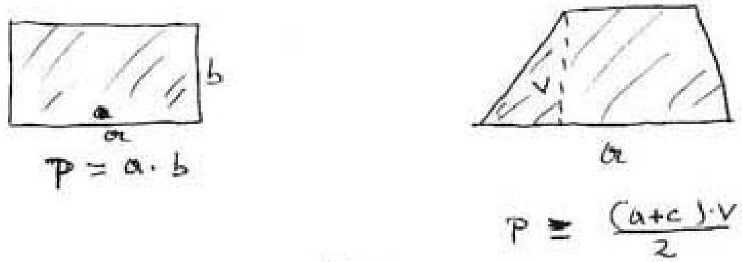
U lekciji se objašnjava kako problem odredjivanja površine podskupova ravnine vodi do pojma odredjenog integrala, te kako se, preko Leibnitz-Newtonove formule, odredjeni integral računa pomoću neodredjenog, tj. pomoću primitivne funkcije.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Formule za površinu geometrijskih likova omedjenih dužinama pronadjene su u dalekoj prošlosti (u starogrčkoj, indijskoj i arapskoj matematici). S likovima omedjenim zakrivljenim crtama bilo je puno teže. Osim formule za površinu kruga, malo toga je bilo poznato; Arhimed je uspijevao s površinama omedjenim dijelovima parabole, hiperbole ili elipse.
Pomoću integrala mogu se, barem načelno, odrediti površine podskupova ravnine, omedjene dijelovima grafova elementarnih funkcija (i općenitije).
Vidjet ćemo da se pomoću integrala rješavaju i mnogi drugi geopmetrijski problemi (problem obujma, duljine luka krivulje i sl.), te mnogi fizikalni problemi (problem rada sile, težista i sl.).

III. Potrebno predznanje

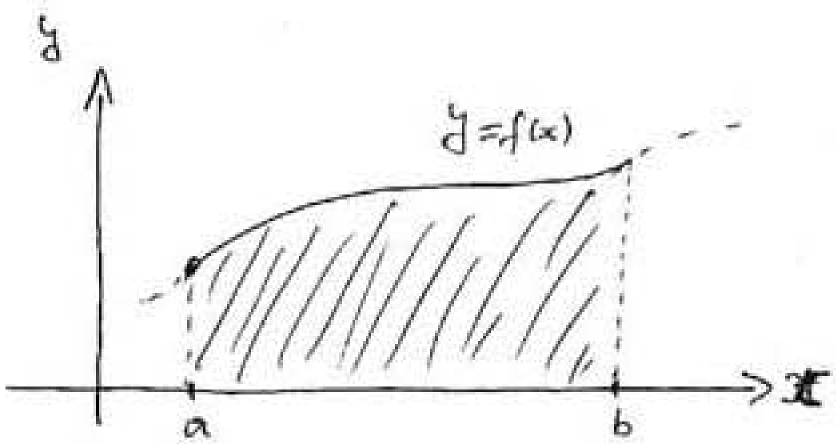
Potrebno je poznavati pojam nedredjenog integrala i računanja nekih važnih neodredjenih integrala.
Takodjer je potrebno poznavanje pojma površine i računanja površine pravokutnika $\mathcal{P} = a \cdot b$ i površine trapeza $\mathcal{P} = \frac{(a+c)v}{2}$ (sl.1).



sl.1.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Problem odredjivanja površine ispod grafa pozitivne funkcije.
Neka je f pozitivna funkcija na segmentu $[a, b]$, tj. $f(x) \geq 0$ za sve x sa svojstvom $a \leq x \leq b$.
Problem. Treba odrediti površinu omedjenu grafom funkcije f, osi x i vertikalnim pravcima $x = a$ i $x = b$ (sl.2).



sl. 2

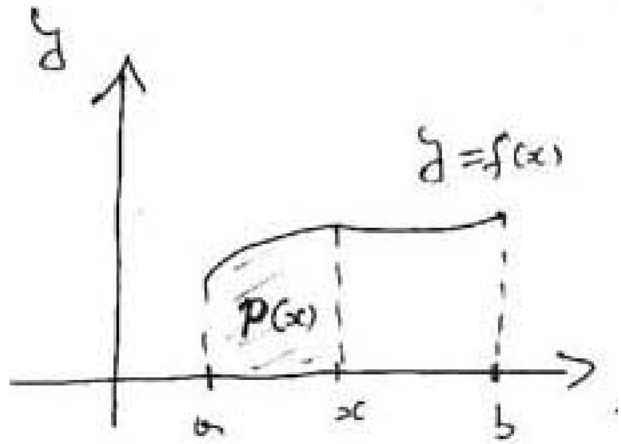
Taj se problem kraće zove **problem odredjivanja površine ispod grafa funkcije**.
Tradicionalno, oznaka za površinu ispod grafa funkcije f, za x od a do b, označava se kao

$$\int_a^b f(x)dx$$

i čita: *integral od a do be ef od x de x.* Taj se izraz zove i **odredjeni integral** funkcije f na segmentu $[a, b]$. Brojevi a, b zovu se **granice integrala**, f je **podintegralna funkcija**, a je **donja**, a b je **gornja granica**.
Vezu s neodredjenim integralom i uporabu ove oznake vidjet ćemo uskoro.

Ovaj se problem može vrlo precizno matematički postaviti i vrlo precizno riješiti. Mi ćemo izbjeći strogo matematičko izlaganje i prikloniti se geometrijskoj intuiciji. Napomenimo da nas prvenstveno zanimaju elementarne funkcije, iako se ova problematika može razmatrati za puno šire klase funkcija.

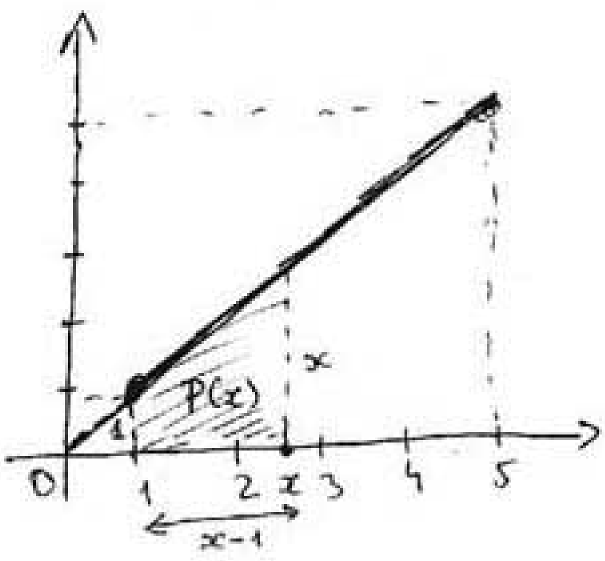
Funkcija površine ispod grafa pozitivne funkcije.
Prirodno je razmotriti funkciju površine $P(x)$ za $a \leq x \leq b$, definiranu kao: $P(x) :=$ površina ispod grafa od a do x (sl.3.).



Sl. 3

Vidimo dva očita svojstva:
1. $P(a) = 0$.
2. $P(b) = \mathcal{P} =$ ukupna površina (koju tražimo).

Primjer 1. Odredimo funkciju $P(x)$ ako je $f(x) := x$ i $a = 1$ i $b = 5$ (sl.4.).

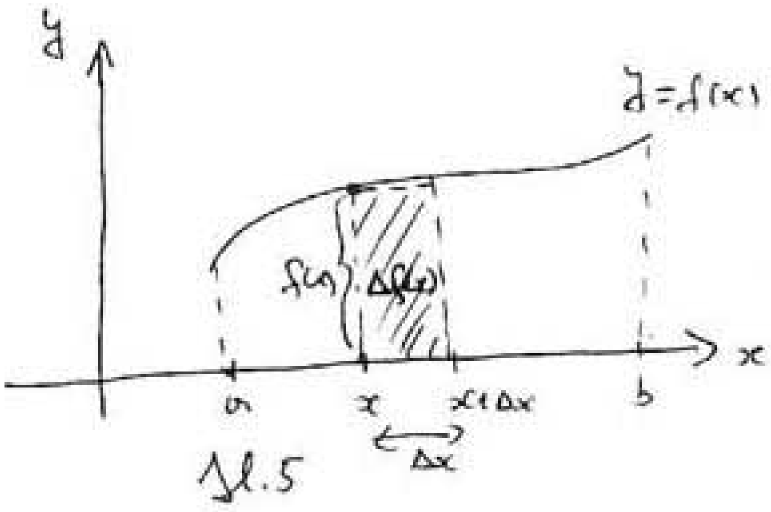


Sl. 4.

Vidimo da je:
$P(x) =$ **Površina trapeza, s osnovicama x i 1, i visinom $x-1$.**
Zato je:
$P(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{2} = \frac{x^2-1}{2}$.
Vrijedi: $P(1) = 0$ **i** $P(5) = 12 = \mathcal{P}$. **Uočimo: kako x ide od 1 do 5, funkcija površine $P(x)$ raste od 0 do 12.**

Diferencijal površine - $dP(x)$
Na sl.5 vidimo da za prirast površine $\Delta P(x) := P(x + \Delta x) - P(x)$ vrijedi:

$$\Delta P(x) \approx f(x) \cdot \Delta x$$



Odatle naslućujemo:

$$dP(x) = f(x)dx$$

što je formula za diferencijal površine, a možemo je shvatiti kao diferencijalnu vezu izmedju funkcije f i njoj pripadajuće funkcije površine. Ta se veza može zapisati i kao:
$\frac{dP(x)}{dx} = f(x)$, tj. kao $P'(x) = f(x)$,
što znači da je $P(x)$ primitivna funkcija funkcije f.

Uporaba izraza *integral* i oznake $\int$ tradicionalna je. Oznaka $\int$ je iskrivljenje oznake za sumu $\sum$, a suma se odnosi na zamišljanje da se zbrajanjem beskonačno mnogo doprinosa $f(x)dx$ dok se x mijenja (što dolazi od zbrajanja površina $f(x)\Delta x$ i može se strogo matematički opisati pomoću limesa).
Kraće možemo zamišljati:
Zbroj doprinosa $f(x)dx$ za x od a do b prelazi u $\int_a^b f(x)dx$.

Primjer 2. - provjera na primjeru da je $P'(x) = f(x)$. U Primjeru 1. imali smo: $f(x) := x$ i $P(x) = \frac{x^2-1}{2}$. Vidimo da je $P'(x) = [\frac{x^2-1}{2}]' = \frac{2x}{2} = x = f(x)$.

Leibnitz-Newtonova formula (za pozitivne funkcije).
Neka je F **bilo koja** primitivna funkcija funkcije f (tj. takva da je $F' = f$).
Tada je:
$P(x) = F(x) + C$, gdje je C neka konstanta (to je zato što je i $P(x)$ primitivna funkcija funkcije f).
Sad je lako odrediti površinu $\mathcal{P}$ u terminima funkcije F:
$\mathcal{P} = P(b) = P(b) - 0 = P(b) - P(a) = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$.
Dakle,

$$\mathcal{P} = F(b) - F(a)$$

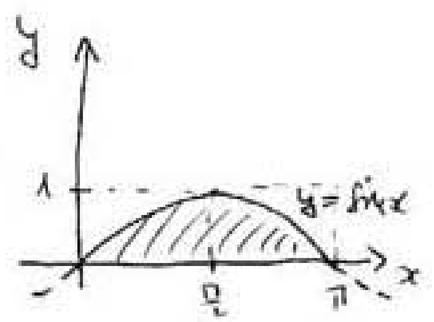
Budući da je $\mathcal{P} = \int_a^b f(x)dx$, pišemo:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

gdje je F bilo koja primitivna funkcija funkcije f (razlika $F(b) - F(a)$ ne ovisi o tome koji smo F izabrali).
Izraz $F(b) - F(a)$ često pišemo kao $F(x)\mid_a^b$, dakle:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\mid_a^b$$

Primjer 3. - primjena Leibnitz-Newtonove formule.
Odredimo površinu ispod sinusoide za $0 \leq x \leq \pi$ (sl.6.).



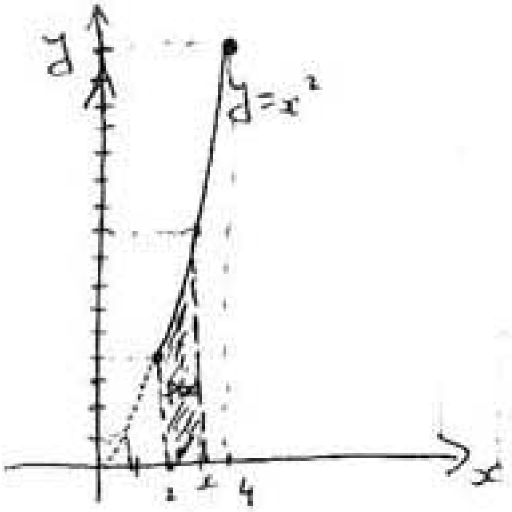
sl. 6

$\int_0^\pi \sin x dx = (-\cos x)\mid_0^\pi = -\cos(\pi) - [-\cos(0)] = -(-1) - (-1) = 2.$

Primjer 4. - izraz za $P(x)$ u ovisnosti o bilo kojoj primitivnoj funkciji F funkcije f
Ako u jednakost $P(x) = F(x) + C$ uvrstimo $x = a$, dobijemo $0 = F(a) + C$, dakle $C = -F(a)$. Zato je

$$P(x) = F(x) - F(a)$$

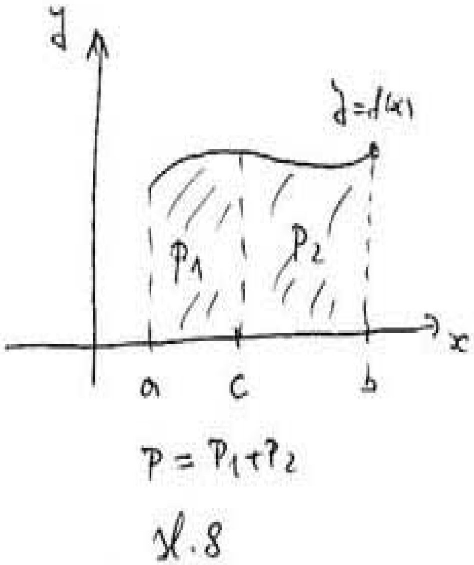
Na primjer, ako je $f(x) := x^2$ i $a = 2$ i $b = 4$, onda je $F(x) = \frac{x^3}{3}$ jedna od primitivnih funkcija od f. Zato je $P(x) = F(x) - F(2) = \frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}$ funkcija površine (sl.7.).



Sl.7.

Očita svojstva odredjenog integrala za pozitivne funkcije (sl.8.)

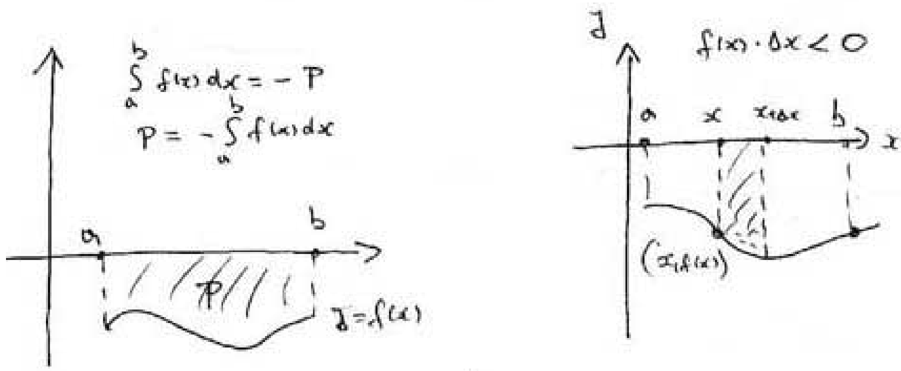
1. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
2. $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$
3. $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$, za $a < c < b$.



Sl.8

Odredjeni integral za bilo koje funkcije.

1. odredjeni integral za negativne funkcije
Ako je f negativna na segmentu $[a, b]$, tj. ako je $f(x) \leq 0$ za $a \leq x \leq b$, onda **definiramo** (sl.9.):
$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b |f(x)|dx$, tj.
$\int_a^b f(x)dx = -\mathcal{P}$ (u ovom slučaju).

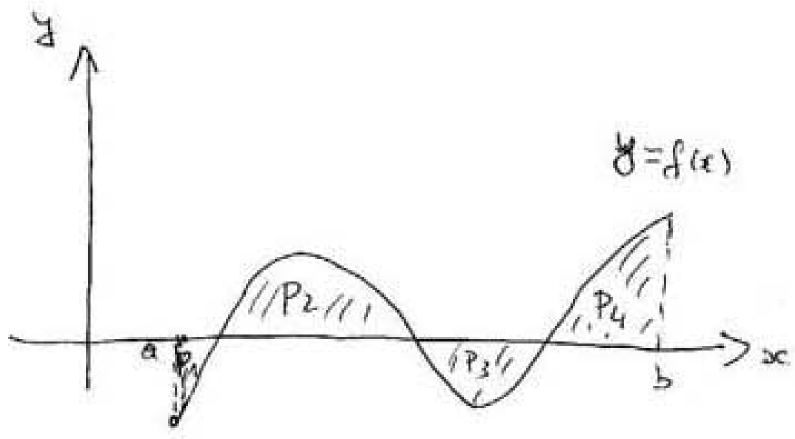


Sl. 9.

Razlog za tu definiciju prirodan: izraz $f(x)\Delta x$ u tom je slučaju negativan za sve x (uz $\Delta x > 0$).

2. Odredjeni integral općenito (sl.10.).

$\int_a^b f(x)dx =$ **Zbroj površina iznad osi** x **- Zbroj površina ispod osi** x**.**



Sl.10 $\quad \int_a^b f(x)dx = -P_1 + P_2 - P_3 + P_4$

Dogovori o odredjenom integralu:
1. dogovor. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
2. dogovor. $\int_a^a f(x)dx = 0.$

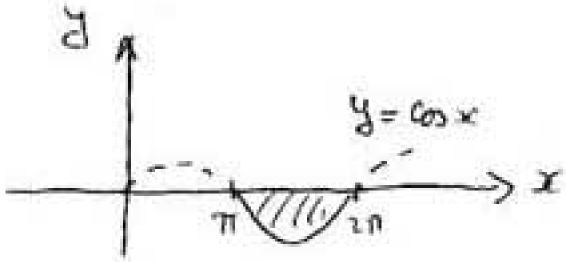
Važno!: Od sad u odredjenom integralu $\int_a^b f(x)dx$, f može biti bilo koja (razumna) funkcija, a granice integrala a, b mogu biti bilo koja dva realna broja.

Još važnije - opća Leibnitz-Newtonova formula.
Za svaki odredjeni integral (bez obzira na funkciju ili granice) vrijedi:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

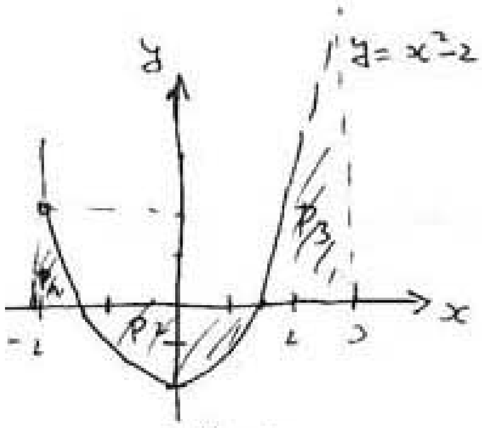
gdje je f bilo koja primitivna funkcija funkcije f.

Primjer 5. - primjena opće Leibnitz-Newtonove formule.
Izračunajmo i geometrijski interpretirajmo:
(i) $\int_\pi^{2\pi} \sin(x)dx$ (sl.11)



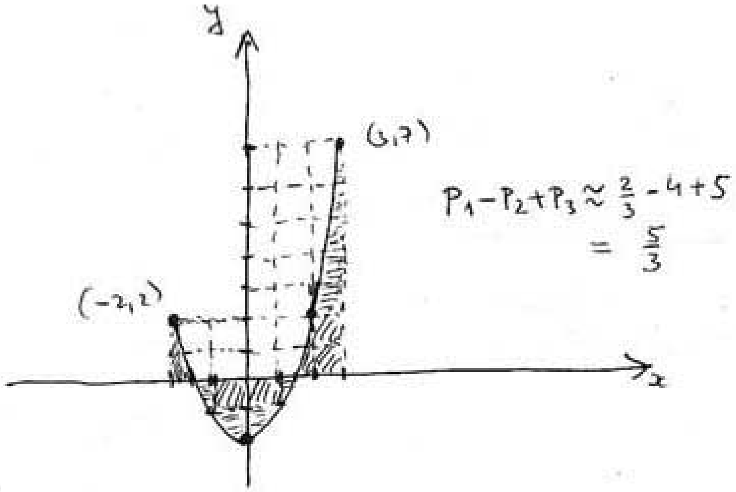
sl. 11

(ii) $\int_{-2}^{3}(x^2 - 2)dx$ (sl.12)



sl. 12

(i) $\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)dx = -\cos x|_{\pi}^{2\pi} = -\cos(2\pi) - [-\cos\pi] = -1 - [-(-1)] = -2$
Rezultat je negativan jer je krivulja ispod osi x i očekivan (ako uzmemo u obzir Primjer 3.).
(ii) $\int_{-2}^{3}(x^2-2)dx = [\frac{x^3}{3} - 2x]|_{-2}^{3} = 3 - (-\frac{8}{3}+4) = \frac{5}{3}$. Smisao ovog rezultata jest da je $\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3 = \frac{5}{3}$, što se može i približno provjeriti (sl.13.).



Sl. 13

Napomena o očitim svojstvima integrala.
Ona tri očita svojstva (koja su vrijedila za pozitivne funkcije i u slučaju da je donja granica manja od gornje), vrijede i općenito, i u svojstvu 3. nije potreban uvjet $a < c < b$.
Ta svojstva su izravna posljedica opće Leibnitz-Newtonove formule.

V. Pitanja i zadaci

1. Geometrijski predočite i izračunajte, potom komentirajte rezultat. Jeste li rezultat mogli unaprijed pogoditi?
(i) $\int_0^{2\pi} \cos x dx$.
(ii) $\int_{-\frac{pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$,
(iii) $\int_{-\frac{pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$.
(iv) $\int_{-a}^{a} f(x)dx$, gdje je f neka neparna funkcija.
Uputa. (iv) U (iv) je rezultat 0 zbog neparnosti; to se posebno odnosi na (ii) i na (iii), a na neki način i na (i).

2. Obrazložite slikom i riječima jednakost: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ za parnu funkciju f.

3. Odredite i geometrijski interpretirajte funkciju površine ispod grafa funkcije $f(x) = x^2$ za:
(i) $x \geq 0$
(ii) $x \geq -1$
(iii) $x \geq 1$.

Lekcije iz Matematike 2.

4. Metode računanja odredjenog integrala. Nepravi integral.

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se pokazuje da metode računanja neodredjenog integrala, nakon odredjene preformulacije, vrijede i za odredjeni integral. Takodjer, uvodi se pojam nepravog integrala; to je proširenje pojma odredjenog integrala i na funkcije koje nisu definirane u granicama integrala ili kojima su granice $-\infty$ ili ∞.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Katkad je u primjenama potrebno računati površine koje se protežu u beskonačnost. To se, u mnogim važnim slučajevima, rješava pomoću nepravog integrala.

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati pojam nedredjenog integrala i metoda računanja te pojam odredjenog integrala.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Metoda parcijalne integracije odredjenog integrala.

Primjer 1. Izračunajmo $\int_0^3 xe^{-x}dx$.
1. način. Primijenimo formulu parcijalne integracije za neodredjeni integral

$$\int udv = uv - \int vdu$$

pa poslije uvrstimo granice:
$\int xe^{-x}dx = [u = x,\ du = dx;\ dv = e^{-x}dx,\ v = -e^{-x}] = x(-e^{-x}) - \int(-e^{-x})dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$
Sad je:
$\int_0^3 xe^{-x}dx = (-xe^{-x} - e^{-x})|_0^3 = -4e^{-3} + 1.$
2. način - izravna parcijalna integracija odredjenog integrala.
Koristimo formulu:

$$\int_a^b udv = (uv)|_a^b - \int_a^b vdu$$

(uz napomenu da se granice u svim integralima odnose na x, tj. x ide od a do b, a ne u, odnosno v).
$\int_0^3 xe^{-x}dx = [u = x,\ du = dx;\ dv = e^{-x}dx,\ v = -e^{-x}] = x(-e^{-x})|_0^3 - \int_0^3(-e^{-x})dx = -3e^{-3} - e^{-x}|_0^3 = -4e^{-3} + 1.$

Uvodjenje nove nepoznanice u odredjeni integral.
Prema analognim formulama za neodredjeni integral imamo:

1. formula. Ako je $f(x) = h[g(x)]g'(x)dx$, onda je

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b h[g(x)]g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} h(t)dt$$

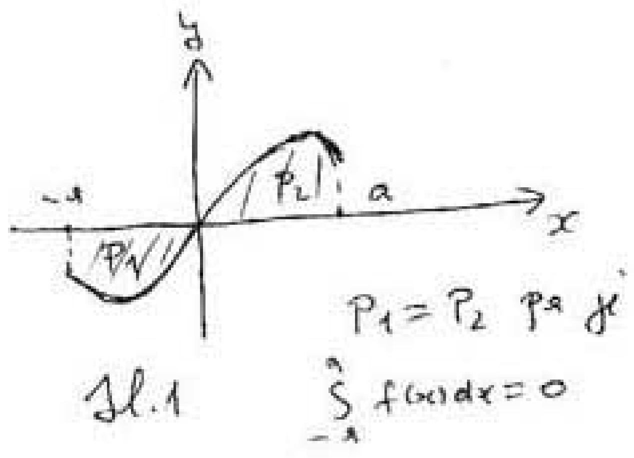
Tu smo zamijenili $[g(x) = t,\ g'(x)dx = dt]$ i **promijenili granice:** za $x = a$ je $t = g(x) = g(a)$ i slično za b.

2. formula - prava supstitucija. Uz zamjenu $x = g(t),\ dx = g'(t)dt$ imamo:

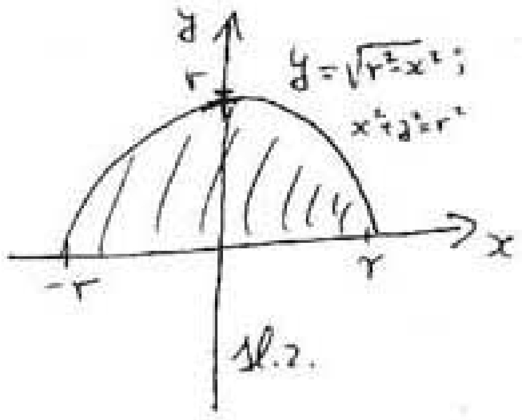
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)dt$$

Tu g treba imati inverznu fiunkciju.

Primjer 2. - uporaba 1. formule. Izračunajmo $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx$.
Stavimo $[g(x) := \sqrt{x^2+3} = t,\ x^2+3 = t^2,\ xdx = tdt]$. Sad je $g(-1) = g(1) = \sqrt{4} = 2$, pa je
$\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx = \int_2^2 \frac{tdt}{t} = 0$ (jer je donja granica jednaka gornjoj; čim smo to dobili mogli smo prestati s računanjem).
Objašnjenje (sl.1.). Podintegralna funkcija je neparna, a interval po kojemu integriramo simetričan, pa smo i bez računanja, mogli zaključiti da je integral jednak nuli (površina ispod osi x jednaka jeonoj iznad osi x).



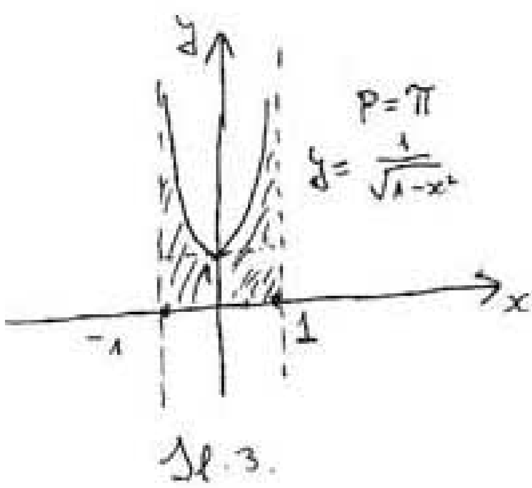
Primjer 3. - uporaba 2. formule - površina kruga. Izračunajmo $\int_{-r}^r \sqrt{r^2-x^2}dx$ (sl.2.).



Stavimo: $[x = g(t) = r\sin t,\ dx = r\cos t dt;\ t = g^{-1}(x) = Arcsin(\frac{x}{r})]$, pa je:
$\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx =$
$\int_{Arcsin(\frac{-r}{r})}^{Arcsin(\frac{r}{r})}\sqrt{r^2-r^2x^2}r\cos t dt =$
$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2 t dt =$
$r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2t)}{2}dt =$
$(\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4})|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$
$r^2\frac{\pi}{2}$.
Iz slike vidimo da smo ovako izračunali površinu polovice kruga.
Uočimo da je ovaj odredjeni integral bilo bitno lakše izračunati ovako, nego preko računanja neodredjenog integrala.

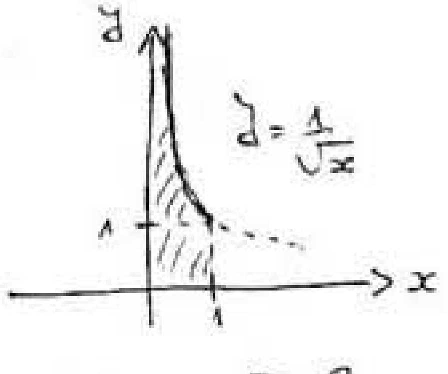
Nepravi integral. Ima više tipova nepravih integrala. Upoznat ćemo ih kroz primjere.

Primjer 4. - kad u jednoj ili objema granicama f nije definirana.
(i) Izračunajmo $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (sl.3.).



Problem je u tome što podintegralna funkcija nije definirana u granicama integrala (već samo na otvorenom intervalu $< -1, 1 >$), pa bi površina mogla biti beskonačna. Tu smo imali sreću da je primitivna funkcija $Arcsix$ podintegralne funkcije definirana i u rubovima integrala pa je
$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = Arcsinx|_{-1}^{1} = Arcsin(1) - Arcsin(-1) = 2Arcsin(1) = \pi$.

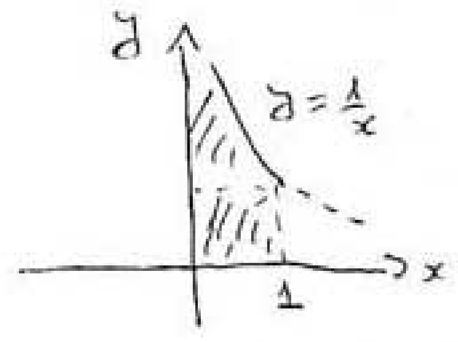
(ii) Izračunajmo $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ (sl.4.).



sl.4 P= 2

Problem je poput onog u (i) - podintegralna funkcija nije definirana u nuli - i razrješava se slično, jer je primitivna funkcija $2\sqrt{x}$ podintegralne funkcije definirana u nuli.
$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}|_0^1 = 2$.

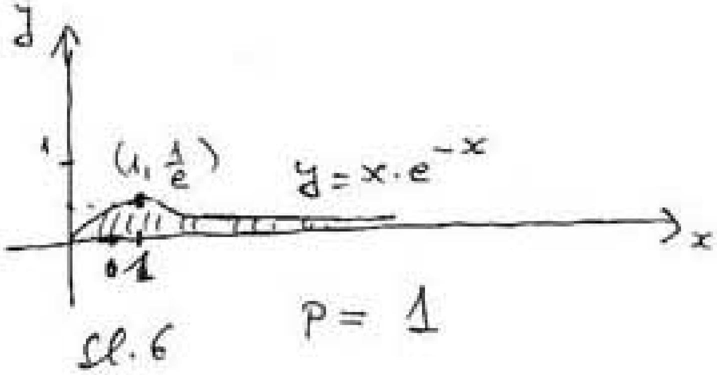
(iii) Izračunajmo $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ (sl.5.).



sl.5. P = +∞

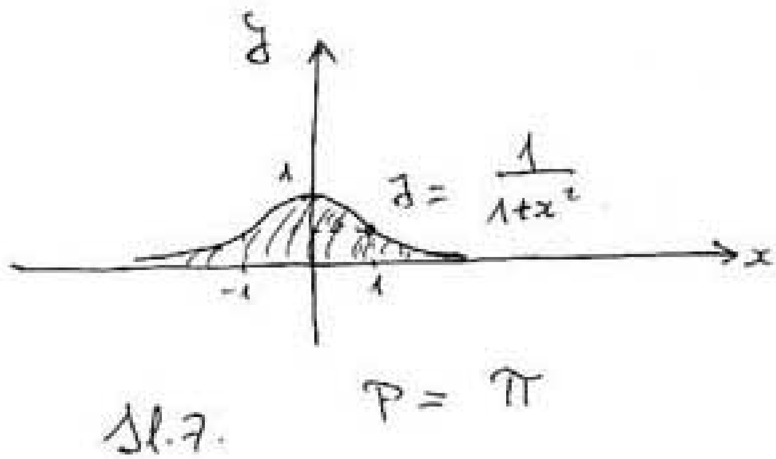
Tu je primitivna funkcija $\ln x$, koja nije definirana u nuli, štoviše, $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$, što pišemo i kao $\ln(0) = -\infty$, pa je:
$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln x|_0^1 = \ln(1) - ln(0) = 0 - (-\infty) = +\infty$, tj. površina je beskonačna.

Primjer 5. - kad je $\pm\infty$ granica integrala.
(i) Izračunajmo $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$
Tu je problem što je područje integracije beskonačan interval (sl.6.).



Sjetimo se (Primjer 1.) da je primitivna funkcija ovdje $-xe^{-x} - e^{-x}$, i da je (iz L'Hospitalova pravila) $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e}^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e}^x = 0$, pa je:
$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x}|_0^{+\infty} = (0-0) - (0-1) = 1$

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\int_0^{+infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2Arctg(x)|_0^{+\infty} = 2Arctg(+\infty) - 2Arctg(0) = 2\frac{\pi}{2} - 0 = \pi$. (sl.7.)



V. Pitanja i zadaci

1. Izračunajte površinu unutar elipse s jednadžbom

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Uputa: U jednadžbi poluelipse: $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, stavite $x = a \sin t$.

2. Izaberite po volji segment $[a, b]$ i funkciju f koja mijenja predznak (možda i više puta).
(i) Pomaknite graf u desno ili u lijevo za $c > 0$. Je su li se time površine izmedju grafa i osi x promijenile? Kako se zadatak može riješiti analitički?
(ii) isto pitanje, samo što sad graf rastegnemo, odnosno spljoštimo vertikalno c puta (crtajte i zaključujte pri $c = 2$).
(iii) isto pitanje, samo što sad graf rastegnemo, odnosno spljoštimo horizontalno c puta (crtajte i zaključujte pri $c = 2$).

Uputa: U (i) površine se ne mijenjaju; analitički, umjesto $f(x)$ imamo funkcije $f(x - c)$, odnosno $f(x + c)$.
U (ii) površine se povećavaju, odnosno smanjuju 2 puta (umjesto f gledamo funkcije $2f$, odnosno $\frac{1}{2}f$).
U (ii) površine se povećavaju, odnosno smanjuju 2 puta (umjesto $f(x)$ od a do b gledamo funkcije $f(\frac{x}{2})$ od $2a$ do $2b$, odnosno $f(2x)$ od $\frac{a}{2}$ do $\frac{b}{2}$.

3. Izračunajte za cijele brojeve m, n:
(i) $\int_{-\pi}^{pi} \sin(mx)\cos(nx)dx$
(ii) $\int_{-\pi}^{pi} \sin(mx)\sin(nx)dx$
(iii) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx$
Uputa: U (i) je funkcija neparna. U (ii) i (iii) koristite formulu za pretvaranja umnoška u zbroj.

4. Izračunajte površinu ispod grafa funkcije $f(x) := \frac{1}{x^2}$ za $x \geq 1$ i nacrtajte sliku.

5. U integralu $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx$, gdje su $\sigma > 0$ i μ realni brojevi, zamijenite varijablu zamjenom: $\frac{x-\mu}{\sigma} = t$. Skicirajte staru i novu podintegralnu funkciju i procijenite rezultat.

Lekcije iz Matematike 2.

5. Primjena odredjenog integrala u geometriji.

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se pokazuje kako se pomoću odredjenog integrala mogu računati površine široke klase podskupova ravnine.
Takodjer se pokazuje kako se može računati obujam rotacijskog tijela.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

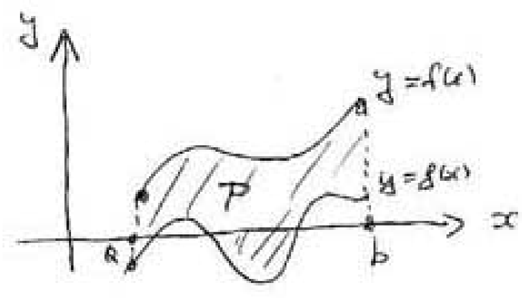
Važni podskupovi ravnine u pravilu su zadani krivuljama koji ih omedjuju. Postavlja se pitanje računanja površine takvih podskupova. Taj se problem načelno rješava pomoću odredjenog integrala, pod uvjetom da su krivulje koje omedjuju podskup grafovi (razumnih) funkcija.
Odredjeni integral omogućuje točan izvod formula za obujam kugle i stožca, i općenito, računanje obujma tijela nastalih rotacijom.

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati pojam odredjenog integrala i metoda računanja te pojam površine i obujma. Takodjer treba znati formulu za obujam V valjka visine h i polumjera r osnovke: $V = \pi r^2 h$.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

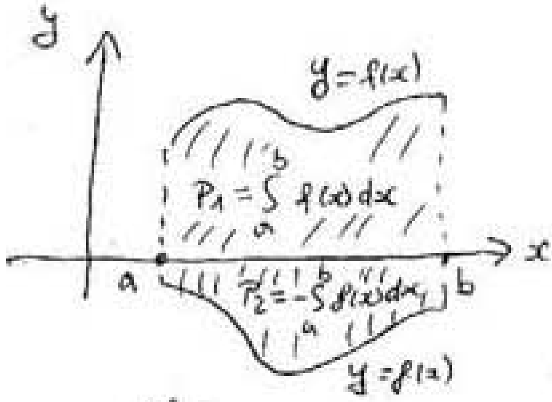
Računanje površina podskupova ravnine zadanih uvjetima: $a \leq x \leq b$ **i** $g(x) \leq y \leq f(x)$ **(sl.1.)**.



Sl. 1.

$$\mathcal{P} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Na sl.2. je ilustracija formule ako je f pozitivna, a g negativna.



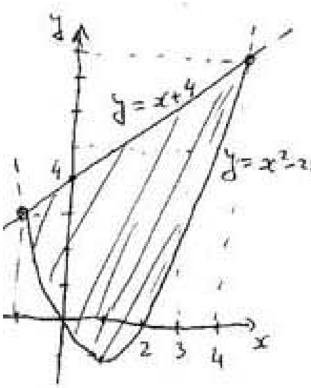
Sl. 2

Primjer 1. Procijenimo, a poslije točno odredimo površinu podskupa ravnine omedjenom krivuljama s jednadžbama $y = x + 4$ i $y = x^2 - 2x$.

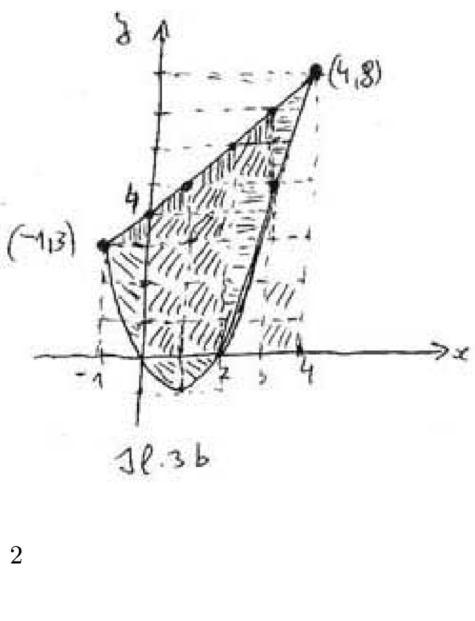
Vidimo da je riječ o ozničenom dijelu ravnine izmedju pravca i parabole (sl.3.a.). Vidimo, takodjer, da možemo primijeniti gornju formulu, samo treba odrediti presjek krivulja: točke A i B. To se ostvaruje rješavanjem sustava:

$$y = x^2 - 2x$$
$$y = x + 4$$

Dobijemo $A(-1, 3)$ i $B(4, 8)$. Sad možemo procijenjivati (sl.3.b.) i točno računati:
$\mathcal{P} = \int_{-1}^{4}[(x+4) - (x^2 - 2x)]dx = \int_{-1}^{4}[-x^2 + 3x + 4]dx = (-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 4x)|_{-1}^{4} = \frac{125}{6} \approx 21.$



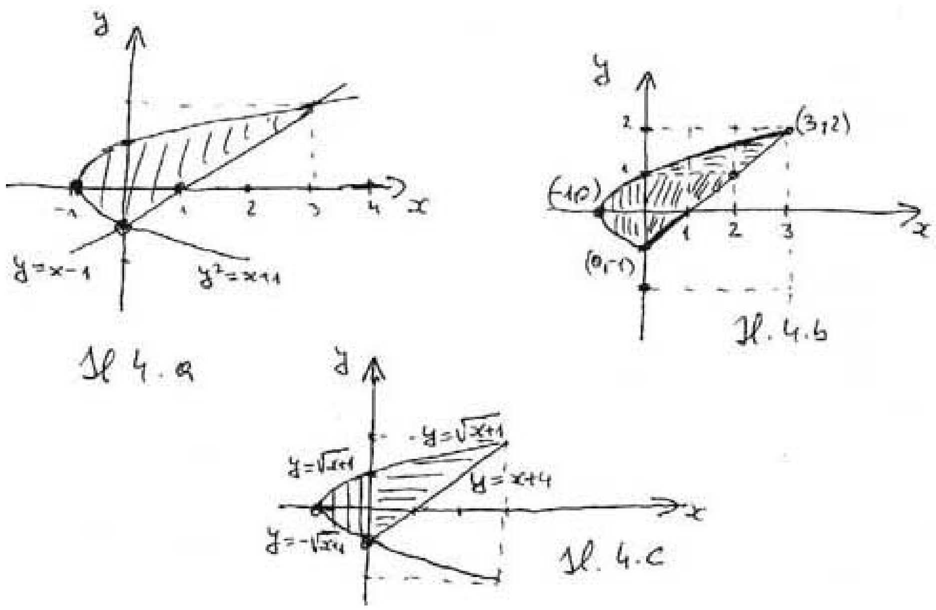
Sl. 3. a.



Sl. 3 b

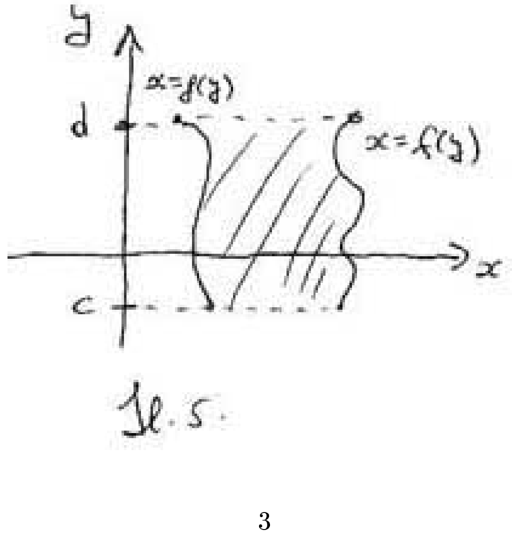
Primjer 2.. Izračunajmo površinu omedjenu krivuljama s jednadžbama: $y^2 = x + 1$ i $y = x - 1$.

Rješavanjem sustava dobije se $A(0, -1)$, $B(3, 2)$ (sl.4.a.) i gruba procjena $\mathcal{P} \approx 4.5$ (sl.4.b.).
Ako želimo primijeniti gornju formulu treba područje podijeliti na dva dijela (sl.4.c.) pa računati dva integrala.
Zadatak ostavljamo za samostalan rad. Vidjet ćemo kako se postupak može pojednostavniti, tako da se račun provede izravno.

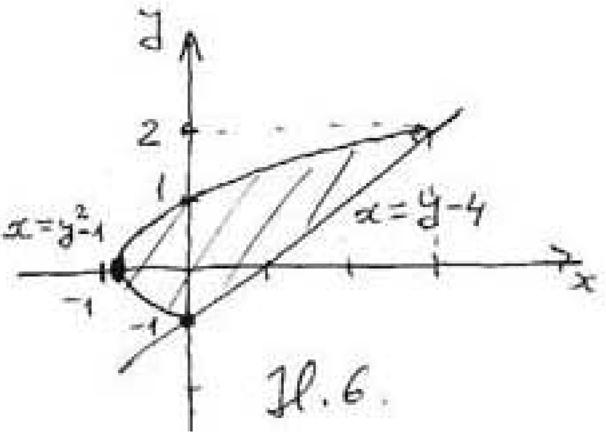


Računanje površina podskupova ravnine zadanih uvjetima:
$c \leq y \leq d$ i $g(y) \leq x \leq f(y)$ (sl.5.).

$$\mathcal{P} = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy$$

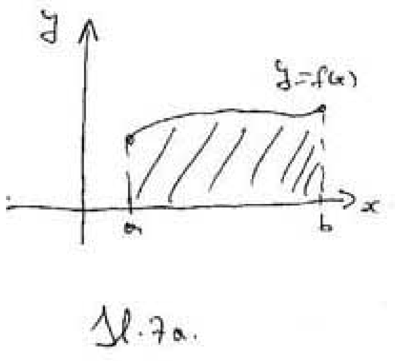


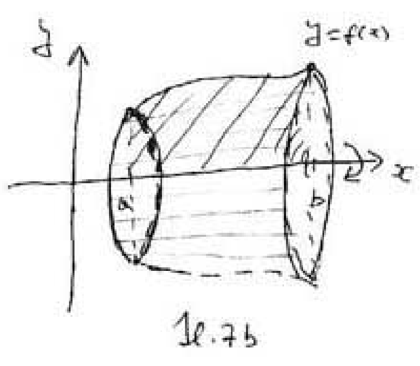
Primjer 3. - drugo, prirodnije, rješenje Primjera 2.).
Vidimo (sl.6.) da je:
$\mathcal{P} = \int_{-1}^{2}[(y+1) - (y^2-1)]dy = (-\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} - 2y)|_{-1}^{2} = \frac{9}{2} = 4.5$,
što je u skladu s procjenom.



Obujam rotacijskog tijela.

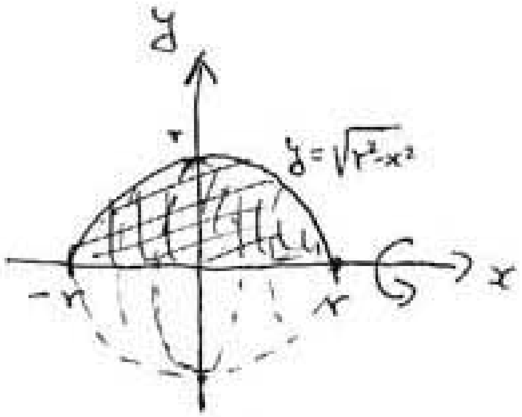
Uočimo dio ravnine izmedju grafa funkcije f i osi x, za x izmedju a i b (sl.7.a.).
Rotacijom oko osi x dobije se rotacijsko tijelo (sl.7.b.).
Presjek tog tijela s ravninom okomitiom na x-os u koordinati x jest krug sa središtem na x-osi, polumjera $f(x)$.



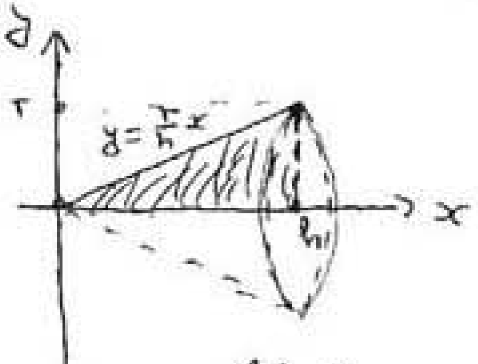


Primjer 4. - kugla i stožac kao rotacijska tijela.
(i) Rotacijom oko osi x polukruga polumjera r sa središtem u ishodištu, nastaje kugla polumjera r sa središtem u ishodištu (sl.8). Jednadžba gornje polukružnice je $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.
Dakle, polukrug je dio ravnine izmedju grafa funkcije $f(x) := \sqrt{r^2 - x^2}$ i x osi za x izmedju $-r$ i r.

(ii) Rotacijom oko osi x pravokutnog trokuta sa sl.9. nastaje stožac polumjera r i visine h. Jednadžba pravca na kojemu je hipotenuza trokuta je $y = \frac{r}{h}x$,



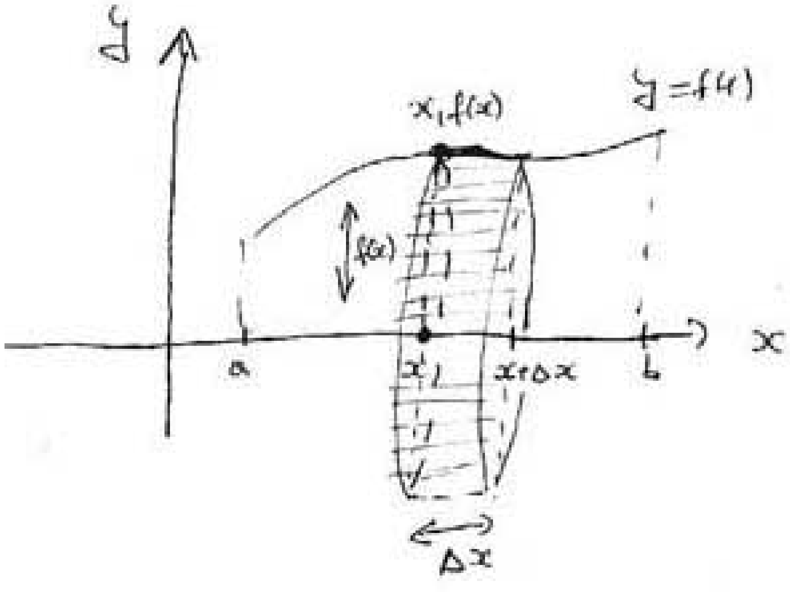
Sl. 8.



Sl. 9.

pa je trokut dio ravnine izmedju grafa funkcije $f(x) := \frac{r}{h}x$ i x osi za x od 0 do h.

Primjer 5. - formula za obujam rotacijskog tijela.
Iz sl.10. vidimo da je djelić rotacijskog tijela od x do $x + \Delta x$ pseudovaljak, tj. približno to je valjak polumjera $f(x)$ i visine Δx.



Sl. 10.

Dakle:

$$\Delta V(x) \approx \pi f^2(x)\Delta x$$

odakle zaključujemo

$$dV(x) = \pi f^2(x)dx$$

pa je, prema definiciji odredjenog integrala

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

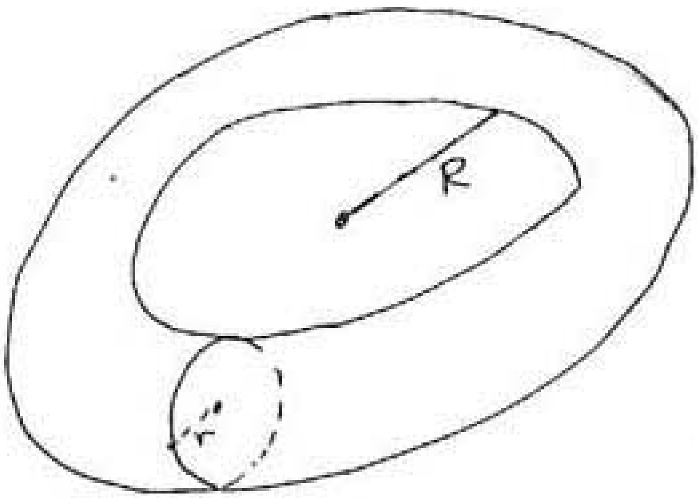
Primjer 6. - obujam kugle i stožca.
Koristeći se Primjerom 4. i formulom za obujam rotacijskog tijela, dobijemo:

(i) **Obujam kugle polumjera** r
$V = \pi \int_{-r}^{r}(r^2 - x^2)dx = \pi(r^2x - \frac{x^3}{3})|_{-r}^{r} = \pi\frac{4r^3}{3}$

(ii) **Obujam stožca polumjera** r **i visine** h
$V = \pi \int_0^h (\frac{r}{h}x)^2 dx = \pi\frac{r^2}{h^2}\frac{x^3}{3}|_0^h = \pi\frac{r^2h}{3}$.

V. Pitanja i zadaci

1. Izračunajte obujam torusa (automobilske gume), ako je poprečni presjek krug polumjera r, a unutarnji promjer (promjer praznog dijela) $2R$ (sl.11.).



Sl. 11.

Lekcije iz Matematike 2.

6. Neke primjene odredjenog integrala u inženjerstvu.

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se ilustriraju tri primjene odredjenog integrala u inženjerstvu. Prva je u rješavanju problema težišta ravne nehomogene žice (to je ujedno i primjena u vjerojatnosti i statistici, što će se razjasniti sljedeće godine). Druga je u rješenju problema momenta inercije, a treća u problemu odredjivanja rada što ga izvrši (promjenjiva) sila koja djeluje uzduž nekog pravca.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

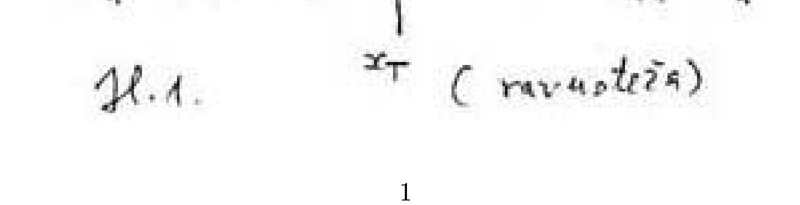
Težište ravne homogene tanke žice je središte žice. Postavlja se pitanje težista ako žica nije homogena (matematički, to je problem težišta nehomogenog segmenta). Taj se problem može riješiti pomo’cu odredjenog integrala, pod uvjetom da poznajemo gustoću žice (gustoću segmenta).
Slično je za moment inercije.
Rad što ga stalna sila koja djeluje uzduž nekog pravca na putu konačne duljine jednaka je, prema definiciji rada, umnošku iznosa sile i duljine puta (uz uskladjene jedinice). Postavlja se pitanje rada ako sila nije stalna, već promjenjiva. I taj se problem rješava pomoću odredjenog integrala.

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati pojam neodredjenog i odredjenog integrala, metoda njihova računanja (naročito metode parcijalne integracije). Takodjer je potrebno poznavati sljedeće fizikalne pojmove:
1. pojam težišta sustava masa na pravcu i razumjevanje formule

$$x_T = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}$$

gdje su mase $m_1, ..., m_n$ smještene na koordinatnom pravcu u točke s koordinatama $x_1, ..., x_n$ (sl.1.).



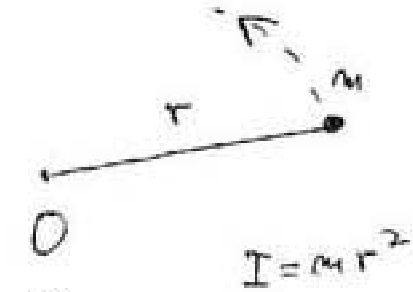
Sl. 1.

2. pojam momenta inercije I mase m oko točke udaljene r od mase (sl.2.) i formule

$$I = mr^2$$

te formule za moment inercije oko težista I_T sustava masa na pravcu (koja odavde izravno slijedi jer se momenti inercije zbrajaju):

$$I_T = \sum (x_i - x_T)^2 m_i$$

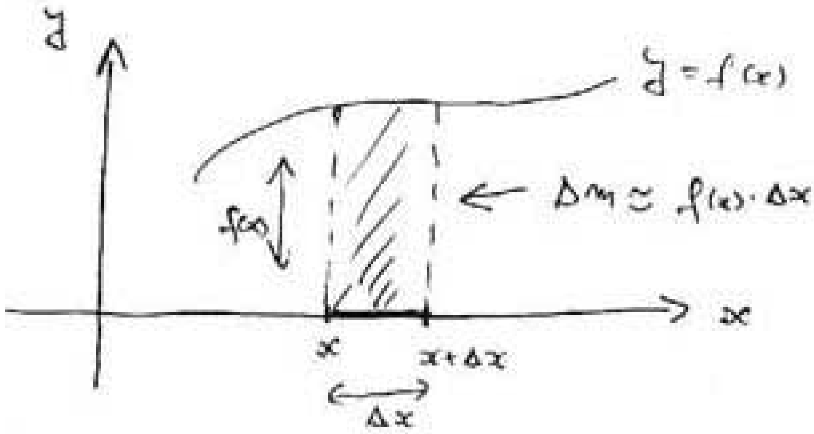


sl.2.

3. pojam funkcije gustoće $f(x)$ mase razmještene na koordinatnom pravcu koja se definira kao limes srednjih gustoća:

$$f(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}$$

dakle, $\Delta m \approx f(x)\Delta x$ (sl.3.), gdje je Δm masa smještena izmedju x i $x + \Delta x$ (na segmentu duljine Δx).

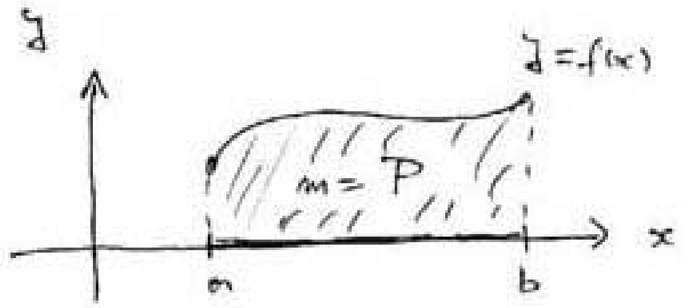


sl.3.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

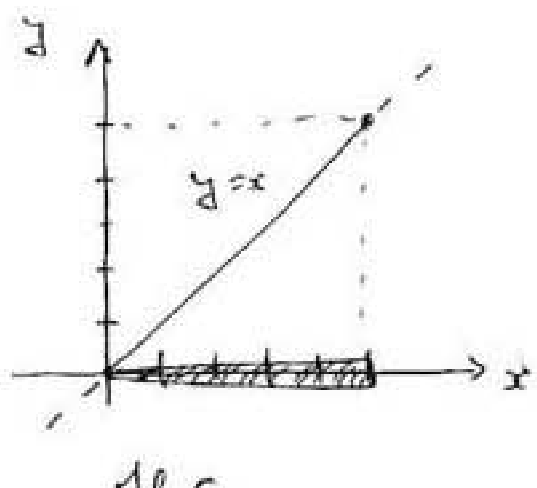
Masa nehomogenog segmenta $[a, b]$ **u ovisnosti o gustoći** (sl.4.).
Iz diferencijalne relacije $\Delta m \approx f(x)\Delta x$, dobijemo $dm = f(x)dx$ (to slijedi i izravno iz definicije gustoće u točki), dobijemo:

$$m = \int_a^b f(x)dx$$



sl. 4.

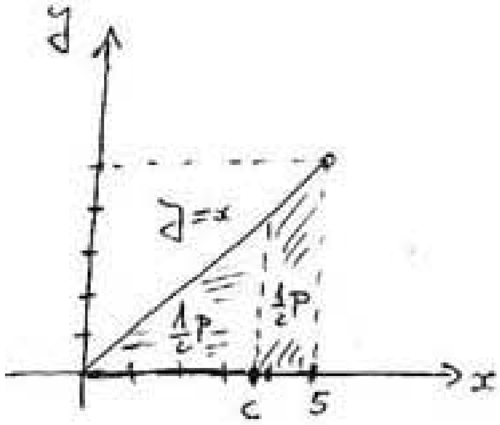
Primjer 1. - primjena formule za masu.
Neka je funkcija gustoće mase $f(x) := x$ za $0 \leq x \leq 5$.
(i) Predočimo grafički raspored mase i interpretirajmo.
Graf je pravac s jednadžbom $y = x$ za $0 \leq x \leq 5$ (sl.5.). Možemo zamisliti da je masa razmazana po segmentu $[0, 5]$ tako da se namaz jednoliko (jediničnom brzinom) pojačava.



sl. 5.

(ii) Odredimo ukupnu masu m.
$m = \int_0^5 xdx = \frac{x^2}{2}|_0^5 = 12.5$ (jedinica mase).

(iii) Odredimo točku c do koje je razmazano polovica mase (sl.6.).
Treba biti: $\int_0^c x dx = \frac{12.5}{2}$, tj. $\frac{c^2}{2} = \frac{12.5}{2}$, dakle $c = \sqrt{12.5}$.

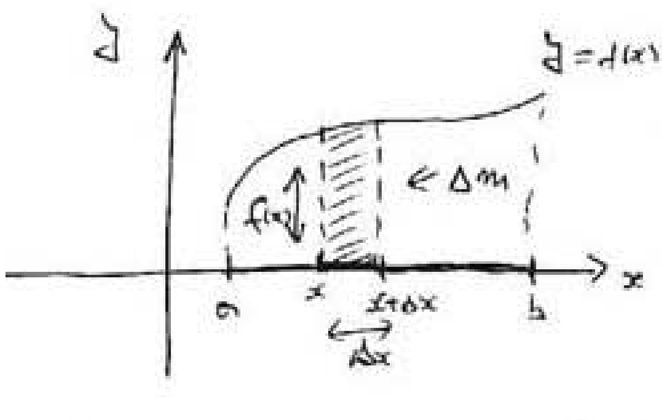


sl. 6.

(iv) Procijenimo je li težište segmenta u c, lijevo od c ili desno od c.
Težište je lijevo od c (jer se gustoća mase povećava).

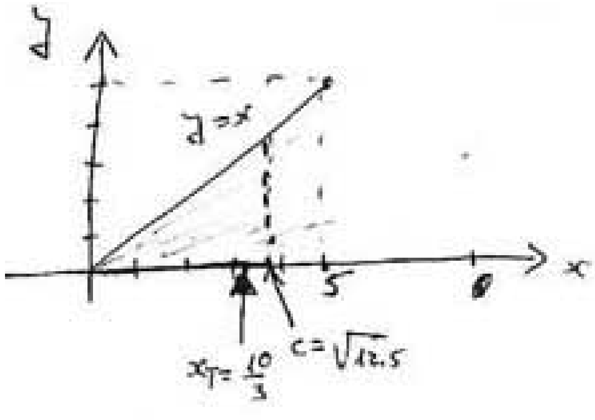
Težište nehomogenog segmenta $[a, b]$ (sl.7.).
Doprinos *krak sile puta sila* djelića mase Δm približno je jednaka $x\Delta m \approx xf(x)\Delta x$. "Zbrajanjem" svih doprinosa i dijeljenjem s ukupnom masom dobijemo:

$$x_T = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$$



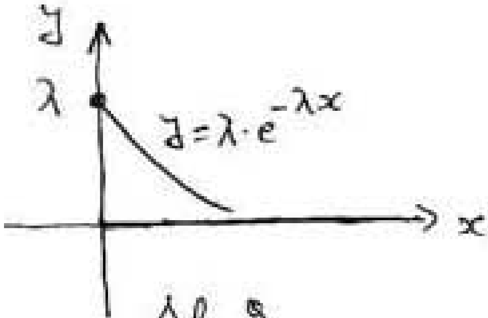
sl. 7. $x \cdot \Delta m \approx x f(x) \Delta x$

Primjer 2. - primjena formule za x_T.
Odredimo težište segmenta iz Primjera 1.
$x_T = \frac{\int_0^5 x \cdot x dx}{\int_0^5 x dx} = \frac{\frac{x^3}{3}|_0^5}{12.5} = \frac{125}{3 \cdot 12.5} = \frac{10}{3}$ (sl.8.).



sl. 8.

Primjer 3 - formula za masu i težište vrijedi i za beskonačne intervale.
Neka je masa razmazana na $[0, +\infty >$ prema pravilu za gustoću $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, za $x \geq 0$, gdje je $\lambda > 0$ realna konstanta (sl.9).



sl. 9

Pokažimo:
(i) $m = 1$ (jedinična masa).

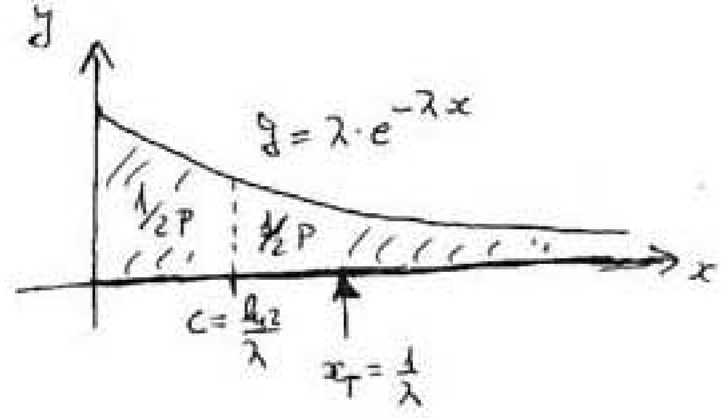
$m = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}|_0^{+\infty} = -0 - (-1) = 1$

(ii) $x_T = \frac{1}{\lambda}$.

$x_T = \frac{\int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx}{\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx} =$
$\int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = [u = x,\ du = dx;\ dv = \lambda e^{-\lambda x},\ v = -e^{-\lambda x}] = (-x e^{-\lambda x})|_0^{+\infty} +$
$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx|_0^{+\infty} = (0 - 0) - \frac{1}{\lambda}(o - 1) = \frac{1}{\lambda}$

(uočite sličnost s Primjerom 5., lekcija 4.).

(iii) polovica mase je do $\frac{\ln 2}{\lambda}$ (sl.10.).



Sl. 10.

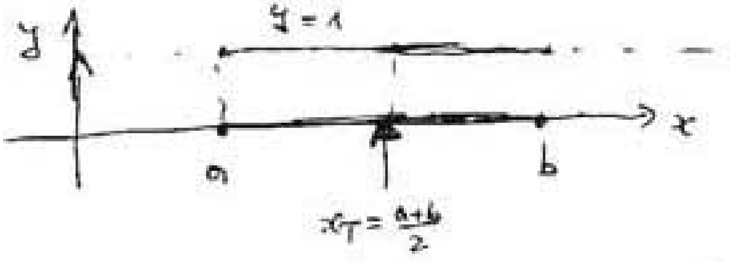
Ako je tražena koordinata z, onda treba biti $\int_0^z \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{2}$, tj. $-e^{-\lambda x}|_0^z = \frac{1}{2}$, tj. $-1 + e^{-\lambda z} = \frac{1}{2}$, tj. $z = \frac{\ln 2}{\lambda}$ (usporedite ovaj rezultat s poluživotom kod radioaktivnosti).

Moment inercije segmenta.
Prema uzoru na moment inercije sustava masa na pravcu, dobijemo formulu za moment inercije oko težišta segmenta $[a, b]$ kojemu je f funkcija gustoće:

$$I_T = \int_a^b (x - x_T)^2 f(x) dx$$

Primjer 4. - moment inercije homogenog segmenta - i to je netrivijalno i potrebna nam je formula.
Homogenost znači: $f(x) = 1$ za svaki $x \in [a, b]$. Znamo da je za homogeni segment $x_T = \frac{a+b}{2}$ (sl.11, iduća stranica), pa je
$I_T = \int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^2 \cdot 1 \cdot dx = \frac{(x-\frac{a+b}{2})^3}{3}|_a^b = \frac{1}{3}(\frac{b-a}{2})^3 - \frac{1}{3}(\frac{a-b}{2})^3 = \frac{2}{3}(\frac{b-a}{2})^3 = \frac{(b-a)^3}{12} = \frac{l^3}{12}$,
gdje je l duljina segmenta. Uočimo da je tu $m = l$ (jednakost brojeva, bez jedinica), pa dobijemo: $I_T = m\frac{l^2}{12}$ što je dobro poznata formula momenta inercije homogenog štapa.

Primjer 5. Odredimo moment inercije oko težišta segmenta iz Primjera 1. Tamo je bilo: $[a, b] = [0, 5]$ i $f(x) := x$; u Primjeru 2. izračunali smo $x_T = \frac{10}{3}$. Zato je:
$I_T = \int_0^5 (x - \frac{10}{3})^2 x dx = \int_0^5 (x^3 - \frac{20}{3}x^2 + \frac{100}{9}x) dx = (\frac{x^4}{4} - \frac{20}{9}x^3 + \frac{50}{9}x^2)|_0^5 = \frac{625}{36}$.



Sl. 11 (homogeni segment)

Rad sile na ravnom putu.
Neka je:
x koordinata pravca uzduž kojeg djeluje sila.
$F(x)$ vrijednost sile u točki x (sjetimo se dogovora: ako je $F(x) > 0$ sila djeluje u pozitivnom smjeru, inače djeluje suprotno).
Za djelić rada $\Delta R(x)$ što ga ta sila učini na putu od x do $x + \Delta x$, vrijedi:

$$\Delta R(x) \approx F(x)\Delta x$$

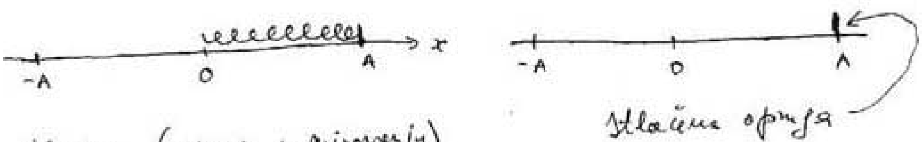
Odavde dobijemo

$$dR(x) = F(x)dx$$

a odavde za rad R što ga F učini od $x = a$ do $x = b$, dobijemo

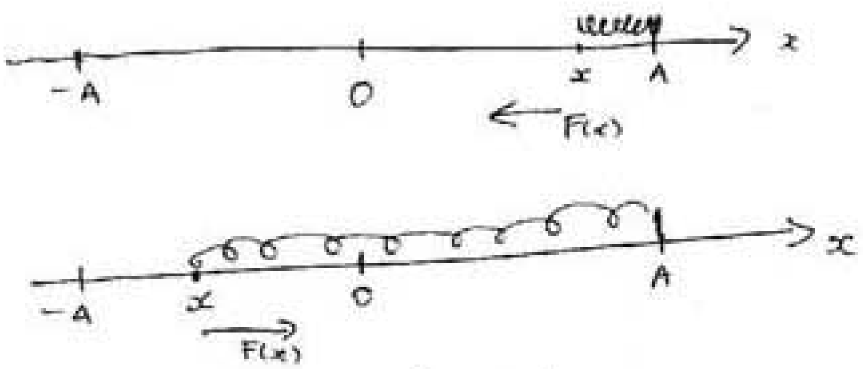
$$R = \int_a^b F(x)dx$$

Primjer 6. - primjer nekonstantne sile - elastična opruga.
Neka je:
x koordinata pravca A koordinata točke u kojoj je pričvršćena savršeno elastična tanka opruga (sl.12.a.) kojoj je u mirovanju vrh u ishodištu.



Sl.12a (opruga u mirovanju)

Oprugu stlačimo u točku A i nakon toga pustimo. Zbog savr sene elestičnosti vrh opruge titra izmedju točaka A i $-A$. Pretpostavimo da je sustav izoliran tj. da je jedina sila koja se tu javlja sila napetosti opruge. Vrijednost te sile u x označimo kao $F(x)$.
Intuitivno je jasno (i lako se možemo uvjeriri) da je sila napetosti na vrh opruge uvijek usmjerena prema ishodištu (sl.12.b.), tj. da su x i $F(x)$ suprotnih predznaka.

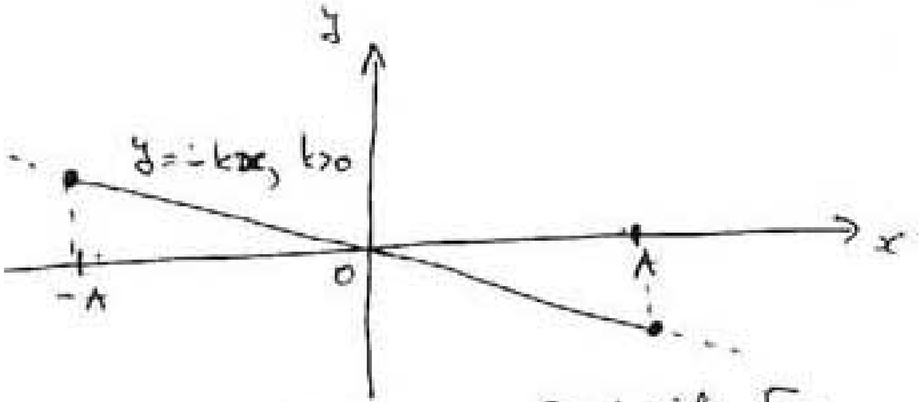


Sl. 12. b

Takodjer je intuitivno jasno, a može se potvrditi pokusom da je ta sila proporcionalna udaljenošću vrha od ishodišta (Hooke-ov zakon). Dakle:

$$F(x) = -kx$$

gdje je $k > 0$ konstanta ovisna o materijalu (sl.13.).

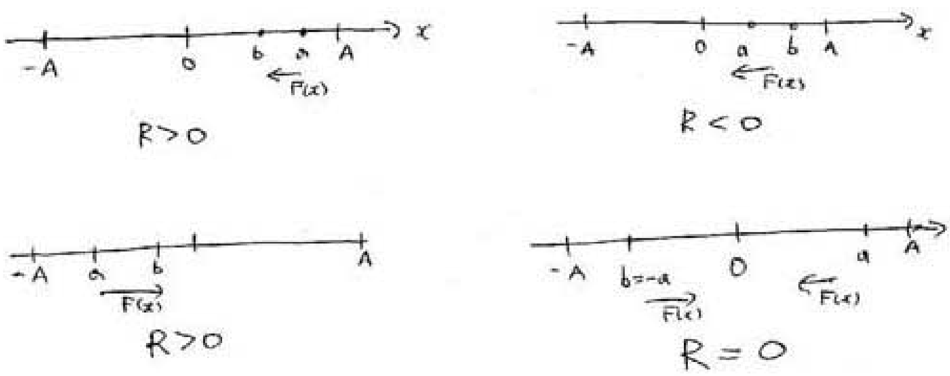


Sl. 13. Graf sile F.

Primjer 7. - rad sile napetosti elastične opruge.
Izračunajmo rad R sile F iz Primjera 6. na putu od a do b, i komentirajmo rezultat.

$R = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b (-kx)dx = (-k\frac{x^2}{2})|_a^b = k\frac{a^2-b^2}{2}$.
Vidimo da je rad pozitivan ako je $|a| > |b|$, inače je negativan ili je jednak nuli (ako je $b = \pm a$). Na sl.14. predočene su i komentirane razne mogućnosti.
Posebno, iz rješenja integrala vidimo (ono što je fizikalno jasno):
(i) na putu od A do ishodišta 0 rad sile je pozitivan (fizikalno, to je zato što put i sila imaju isto usmjerenje),
(ii) na putu od ishodišta 0 do $-A$ rad sile je negativan (fizikalno, to je zato što put i sila imaju različita usmjerenje),

(iii) na putu od $-A$ do ishodišta 0 rad sile je pozitivan (fizikalno, to je zato što put i sila imaju isto usmjerenje),
(iv) na putu od ishodišta 0 do $-A$ rad sile je negativan (fizikalno, to je zato što put i sila imaju različita usmjerenja).



Sl. 14

V. Pitanja i zadaci

1. Izračunajte moment inercije oko težišta u Primjeru 3.
2. Neka je $[a, b] = [0, 5]$ i neka je funkcija gustoće $f(x) = 5 - x$.
(i) Procijenite grafički masu, potom je izračunajte.
(ii) Procijenite, potom izračunajte c (do kojega je polovica mase) te procijenite odnos izmedju c i x_T.
(iii) Izračunajte x_T.
(iv) Procijenite pa izračunajte moment inercije oko težista.
(v) Komentirajte vezu s Primjerima 1, 2. i 5. Jeste li iz rezultata tih primjera mogli izravno riješiti ovaj zadatak?.
Uputa. (i) U istom koordinatnom sustavu predočite funkciju gustoće homogenog segmenta.

Lekcije iz Matematike 2.

7. Pojam funkcije dviju varijabla, grafa i parcijalnih derivacija.

I. Naslov i objašnjenje naslova
U lekciji se obradjuje pojam funkcije više varijabla, ponajviše dviju. Uvodi se pojam grafa funkcije dviju varijabla, daju neki primjeri i usporedjuje s grafom funkcije jedne varijable. Takodjer se, na osnovi pojma derivacije funkcije jedne varijable, uvodi pojam **parcijalne derivacije** funkcije dviju ili više varijabla.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem
U matematici i u primjeni često se pojavljuju veličine koje ovise o više drugih (nezavisnih) veličina, a ne samo o jednoj. Na primjer, u gemetriji, obujam valjka ovisi i o polumjeru osnovke i o visini, u termodinamici tlak plina ovisi i o obujmu i o temperaturi i sl. Takve se veze opisuju funkcijama s dvjema ili više varijabla, a njihove geometrijske predožbe su grafovi funkcija. Brzina promjene neke veličine u odnosu na promjenu veličina o kojoj ona ovisi opisuje se parcijalnim derivacijama.

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati pojam funkcije jedne varijable, njena grafa, derivacije (i derivacija višeg reda). Za predočavanje grafa funkcije dviju varijabla treba poznavati koordinatni sustav u prostoru.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Funkcije dviju varijabla - zadavanje.
Ako neka veličina z zavisi o dvjema nezavisnim veličinama x, y, onda je pravilo f te zavisnosti funkcija dviju varijabla. Tu funkcijsku zavisnost pišemo kao

$$z = f(x, y)$$

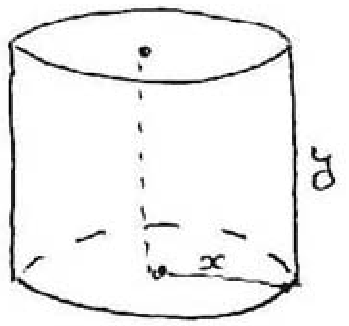
Kažemo da je f funkcija dviju varijabla. **Područje definicije (domena)** D te funkcije je skup svih uredjenih parova (a, b) gdje a ide skupom vrijednosti koje postiže veličina x i b ide skupom vrijednosti koje postiže y. Dakle D je podskup koordinatne ravnine, tj. $D \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. To pišemo i kao:

$$f : D \to \mathbf{R}$$

odnosno kao: $(x, y) \mapsto f(x, y)$.

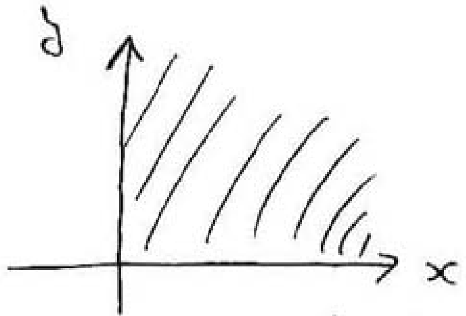
Primjer 1. - neke funkcije dviju varijabla i njihove domene.
(i) Ako je x polumjer osnovke valjka (sl.1.), y visina i z obujam valjka, onda su te tri veličine povezane vezom

$$z = \pi x^2 y$$



Sl.1 $V = \pi \cdot x^2 y$

Tu je
$f(x, y) := \pi x^2 y$.
$D(f) =$ prvi kvadrant (sl.2.),
jer x, y mogu biti bilo koji pozitivni realni brojevi.

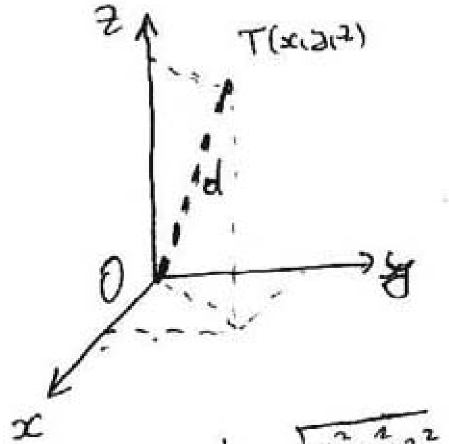


Sl.2. Prvi kvadrant

Na primjer, $f(2, 3) = \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 12\pi$, što znači da valjak polumjera osnovke 2 i visine 3 ima obujam 12π.
Inače, u tu funkciju možemo uvrstiti bilo koji uredjeni par realnih brojeva, samo što oni onda nemaju geometrijsko značenje, naime nema valjaka s negativnima polumjerom ili visinom. To je česta pojava kod zapisivanja odnosa medju veličinama u inženjerstvu. Naime te veličine imaju svoja fizikalna značenja koja utječu na suženje realnih vrijednosti varijabla, tj. na suženje matimatičke, maksimalne domene. Za funkcije zadane analitički, tj. zapisane formulom, ta se maksimalna domena zove **prirodna domena**.
(ii) Ako su x, y, z koordinate u prostoru, onda je funkcija f koja mjeri udaljenost točke od ishodišta zadana formulom:

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

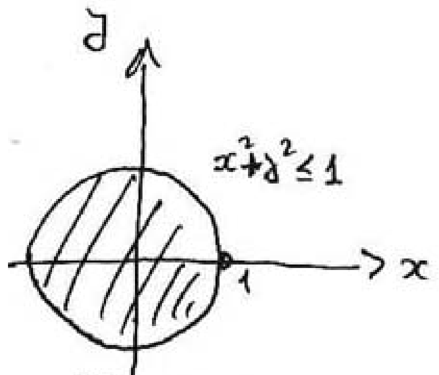
To je funkcija triju varijabla definirana na cijelom prostoru (sl.3.).



Sl.3. $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

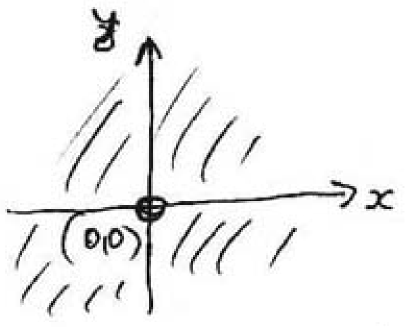
Primjer 2. - odredjivanje prirodne domene. Odredimo prirodnu domenu funkcije
(i) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$
(ii) $f(x,y) := \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(i) Tu treba biti $1-x^2-y^2 \geq 0$, tj. $x^2+y^2 \leq 1$, što je krug polumjera 1 sa središtem u ishodištu (sl.4.).



Sl.4. Krug

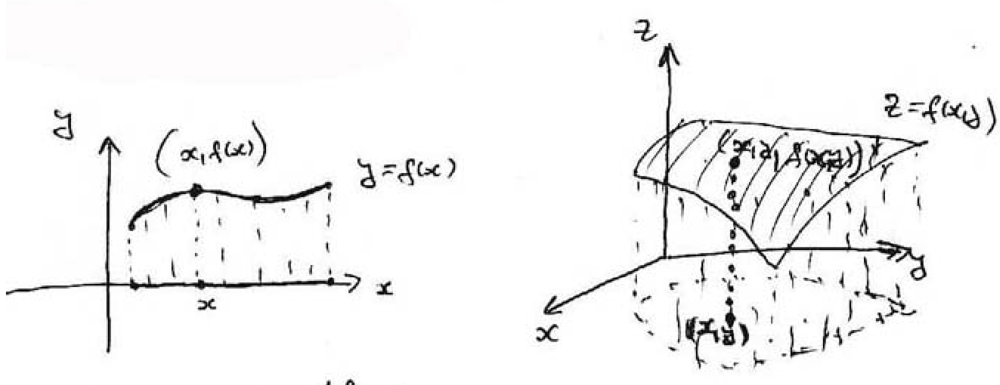
(ii) Tu treba biti $x^2+y^2 \neq 0$, što je ravnina bez ishodišta (sl.5.). Naime $(0,0)$ je jedino rješenje jednadžbe $x^2+y^2=1$.



Sl.5. Ravnina bez ishodišta

Graf funkcije dviju varijabla.
Analogno tome kako je graf funkcije f jedne ravnine **krivulja** u ravnini s jednadžbom $y = f(x)$, tako je graf funkcije dviju varijabla **ploha** u prostoru (sl.6.) s jednadžbom

$$z = f(x, y)$$



Sl. 6.

Tu smo, prirodno, uzeli da su koordinate u prostoru redom x, y, z, i gornja jednadžba govori kako treća koordinata z, ovisi o prvim dvjema (x, y).
Uočite jednostavnu, ali vrlo važnu vezu izmedju grafa i područja definicije:
(i) kod funkcija jedne varijable projekcija grafa $y = f(x)$ na x-os je upravo domena funkcije f, i iznad svake točke domene postoji točno jedna točka grafa-krivulje (iznad točke na osi apscisa s koordinatom x, na grafu je točka $(x, f(x))$.
(ii) kod funkcija dviju varijabla projekcija grafa $z = f(x, y)$ na xy-ravninu je upravo domena funkcije f i iznad svake točke domene postoji točno jedna točka grafa-plohe (iznad točke xy-ravnine s koordinatama (x, y), na grafu je točka $(x, y, f(x, y))$.

Dalje bi bilo: graf funkcije f triju varijabla je **trodimenzionana ploha** u četverodimenzionalnom prostoru (tzv. **hiperploha**), s jednadžbom $w =$

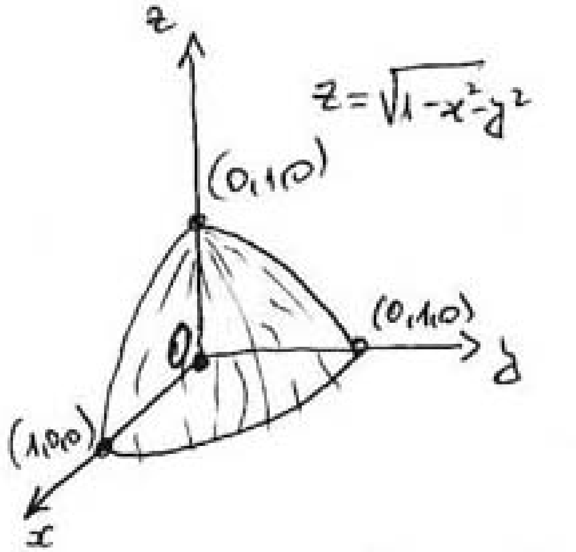
$f(x, y, z)$ itd. Graf funkcije triju ili više varijabla očito ne možemo grafički predočiti, a problemi nastaju i kod funkcija dviju varijabla. Ipak, razvijaju se metode za približno dočaravanje grafova takvih funkcija.

Primjer 3. - jednadžba kugline plohe.
Opišimo i predočimo graf funkcije $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Graf je ploha s jednadžbom $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, što je ekvivalentno sustavu: $z^2 = 1 - x^2 - y^2$ i $z \geq 0$, tj. sustavu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ i \ z \geq 0$$

Kako je $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ udaljenost točke (x, y, z) od ishodišta, to čitamo ovako: *točka* (x, y, z) *je na grafu ako i samo ako joj je udaljenost od ishodišta* 1 *i s gornje je strane* xy*-ravnine.*
Drugim riječima, graf je gornja polusfera polumjera 1 (sl.7.).

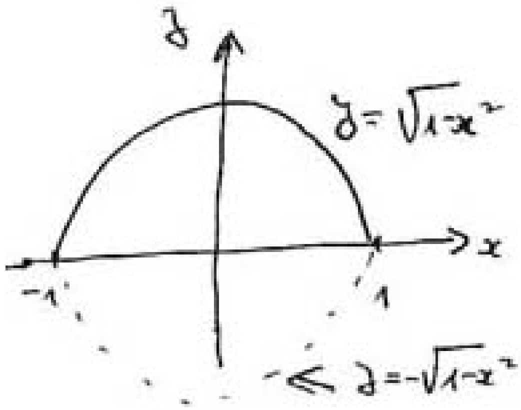


Sl.7. Dio sfere u 1. oktantu

Zato je (ako izbacimo uvjet $z \geq 0$)

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

jednadžba sfere polumjera 1 sa središtem u ishodištu. Uočite sličnost s time što je $x^2 + y^2 = 1$ jednadžba kružnice u xy-ravnini, a $y = \sqrt{1 - x^2}$ jednadžba gornje polukružnice (sl.8.).



Sl. 8. Gornja i donja polukružnica

Parcijalne derivacije funkcije dviju varijabla.

Prema analogiji s derivacijom funkcije f jedne varijable u točki x_0:

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

što pišemo i kao

$$\frac{df}{dx}(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

definiramo parcijalne derivacije funkcije f dviju varijabla u točki (x_0, y_0):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

(to je parcijalna derivacija po varijabli x; tu y_0 stoji, a x se mijenja oko x_0)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

(to je parcijalna derivacija po varijabli y; tu x_0 stoji, a y se mijenja oko y_0). Vidimo da su parcijalne derivacije u točki dva broja. Poput funkcija jedne varijable, ako umjesto (x_0, y_0) stavimo (x, y) dobijemo parcijalne derivacije funkcije f; to su dvije nove funkcije, koje označavamo kao

$$\frac{\partial f}{\partial x} \; \textit{odnosno} \; \frac{\partial f}{\partial y}$$

One se lako računaju, na primjer da bismo dobili $\frac{\partial f}{\partial x}$, u izrazu za f, varijablu y smatramo konstantom, a varijablu x promjenjivom. To pokazujemo na primjeru.

Primjer 4. Neka je $f(x,y) = x^2y + xy^2$. Odredimo $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2,3)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2,3)$.

Tu je
$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2$, i $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + x \cdot 2y = x^2 + 2xy$.
Zato je: $\frac{\partial f}{\partial x}(2,3) = 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3^2 = 21$, i $\frac{\partial f}{\partial y}(2,3) = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 16$.
Tu se jasno vidi da su parcijalne derivacije funkcije, a parcijalne derivacije u točki brojevi.

Primjer 5. - parcijalne derivacije funkcije triju varijabla.
Odredimo parcijalne derivacije funkcije $f(x,y,z) := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

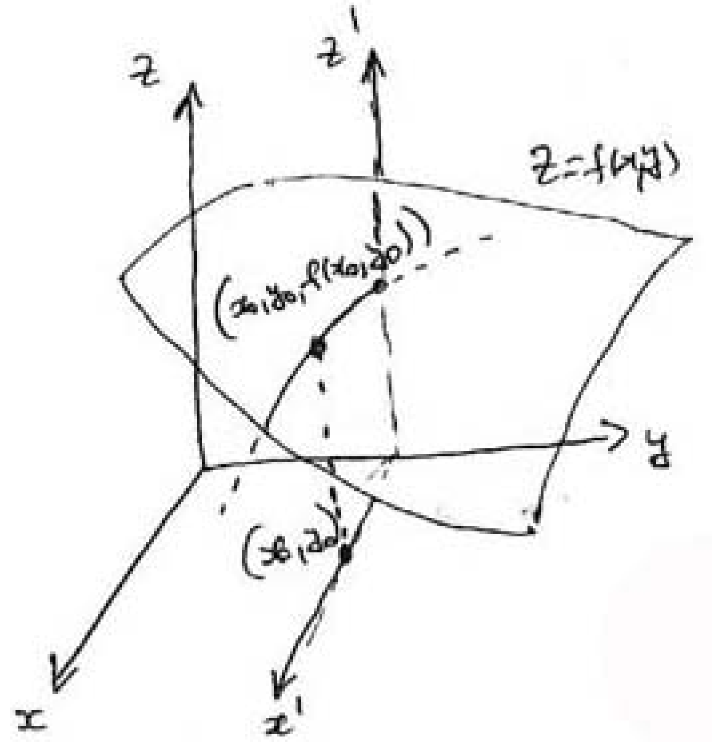
Tu je $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
Sad, koristeći se simetrijom, bez računanja dobijemo:
$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, i $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Fizikalno značenje parcijalnih derivacija.
Poput činjenice da derivacija funkcije jedne varijable opisuje brzinu promjene jedne varijable s obzirom na promjenu druge; za funkciju f dviju varijabla x, y, parcijalna derivacija $\frac{\partial f}{\partial x}$ opisuje brzinu promjene varijable z (gdje je $z = f(x,y)$), s obzirom na promjenu varijable x (pri stalnoj vrijednosti varijable y). Slično je s $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Primjer 6. Komentirajmo brzinu promjene veličine z iz Primjera 4. u točki $(2,3)$.

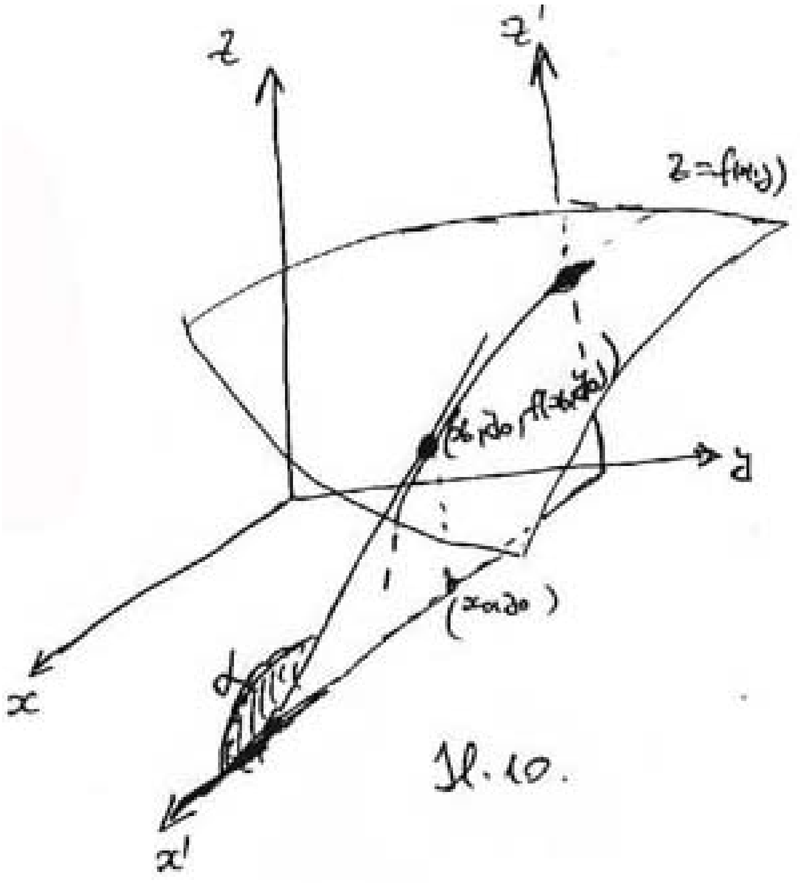
Tu je $z = f(x,y) = x^2y + xy^2$, pa je $z(2,3) = 30$. Takodjer je $\frac{\partial f}{\partial x}(2,3) = 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3^2 = 21$, i $\frac{\partial f}{\partial y}(2,3) = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 16$. Odatle očitavamo da se da je brzina promjene u x smjeru 21, a u y smjeru 16 (manja brzina).
To možemo tumaciti ovako:
za malu promjenu vrijednosti h veličine x (od 2 do $2+h$), dok y zadržava stalnu vrijednost 3, z će se približno promijeniti za $21h$, a za malu promjenu h vrijednosti veličine y (od 3 do $3+h$), dok x zadržava stalnu vrijednost 2, z će se približno promijeniti za $16h$.

Geometrijsko značenje parcijalnih derivacija.
Da opišemo geometrijsko značenje parcijalne derivacije po x u (x_0, y_0), presijecimo graf funkcije f ravninom s jednadžbom $y = y_0$, koja je usporedna s xz-ravninom (sl.9.).



sl. 9.

Dobijemo krivulju u toj ravnini, (možemo je zvati $x'z'$-ravninom) kod koje se mijenjaju vrijednosti x i z prema formuli $z = f(x, y_0)$, koja prolazi točkom (x_0, y_0, z_0), gdje je $z_0 = f(x_0, y_0)$.
Poput činjenice da je derivacija funkcije jedne varijable u točki jednaka koeficijentu smjera (nagibu) tangente na graf te funkcije u toj točki; za funkciju f dviju varijabla x, y, parcijalna derivacija $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ je nagib tangente na gornju krivulju u točki (x_0, y_0, z_0). Tu je nagib tangens kuta što ga tangenta čini s novom x-osi, tj. s x' osi (sl.10.).



Sl. 10.

Parcijalne derivacije višeg reda.

Prema uzoru na derivaciju drugog reda funkcije jedne varijable, definiraju se parcijalne derivacije drugog reda funkcije dviju varijabla (ili više varijabla). Sjetimo se oznaka za drugu derivaciju funkcije dviju varijabla:

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

Tu eksponent 2 ne znači kvadriranje već samo činjenicu da se deriviranje vrši dva puta i to po x. Slično je za funkcije dviju varijabla.
Načelno imamo četiri mogućnosti (i četiri oznake):
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ - obje derivacije po x
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ - obje derivacije po y
$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ - prva derivacija po x, druga po y
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ - prva derivacija po y, druga po x.

Primjer 7. Neka je $f(x,y) = x^2 y + x y^2$. Odredimo parcijalne derivacije drugog reda.

Već smo vidjeli da je
$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2$, i
$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy$.
Zato je:
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\delta x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial}{\delta x}(2xy + y^2) = 2y$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial}{\delta y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial}{\delta y}(x^2 + 2xy) = 2x$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := \frac{\partial}{\delta y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial}{\delta y}(2xy + y^2) = 2x + 2y$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \frac{\partial}{\delta x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial}{\delta x}(x^2 + 2xy) = 2x + 2y$.

Vidimo da je u Primjeru 7. bilo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

To vrijedi općenito, a ne samo u ovom primjeru (istina, neki prirodni uvjeti moraju bili zadovoljeni). Ta činjenica poznata je kao Clairautov teorem, katkad se naziva i Schwartzov teorem.

Slično bi se definirale parcijalne derivacije trećeg ili višeg reda.

V. Pitanja i zadaci

1. Nadjite parcijalne derivacije prvog i drugog reda funkcije $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
2. Nadjite parcijalne derivacije prvog i drugog reda funkcije $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ i funkcije $g := \frac{1}{f}$.

Lekcije iz Matematike 2.

8. Linearna aproksimacija funkcije više varijabla, tangentna ravnina, diferencijal.

I. Naslov i objašnjenje naslova
U lekciji se pojmovi linearne i kvadratne aproksimacije za funkcije jedne varijable, uvode i za funkcije dviju ili više varijabla. Takodjer, navode se neke primjene tih pojmova.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem
Linearna i kvadratna aproksimacija (aproksimaciji višeg reda, i, konačno, Taylorov red), uz mnoge druge primjene, imaju važnu ulogu u problemu približnog odredjivanja vrijednosti funkcija. Pokazuje se da se ti važni pojmovi mogu definirati i za funkcije više varijabla (samo što ćemo se mi zadržati samo na linearnoj i kvadratnoj aproksimaciji). Naravno, pomoću njih se rješavaju analogni problemi. Jedno od osnovnih jest ovo: kako se približno promijeni vrijednost funkcije f dviju varijabla, ako se varijabla x promijeni od x_0 do $x_0 + \Delta x$, a varijabla y od y_0 do $y_0 + \Delta y$?
S matematičkog stanovišta ova je lekcija važna jer se u njoj uvježbava analogija, jedna od najvažnijih matematičkih, a i znanstvenih metoda.

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati pojam i geometrijsko značenje derivacije funkcije jedne varijable, te pojam parcijalnih derivacija prvog i drugog reda funkcija više varijabla. Takodjer, potrebno je poznavati pojam linearne i kvadratne aproksimacije za funkcije jedne varijable, te pojam diferencijala funkcije jedne varijable.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Linearna aproksimacija funkcije dviju varijabla.
Prema uzoru na linearnu aproksimaciju funkcije f jedne varijable oko x_0:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

iliti, u drugom zapisu, uz zamjenu $x_0 + \Delta x = x$,

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

definiramo linearnu aproksimaciju funkcije dviju varijabla f oko (x_0, y_0):

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$$

iliti, u drugom zapisu, uz zamjenu $x_0 + \Delta x = x$ i $y_0 + \Delta y = y$,

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Vidimo da formula uzima u obzir doprinos od promjene varijable x i varijable y; ti se doprinosi zbrajaju.

Primjer 1. - primjena formule za linearnu aproksimaciju. Odredimo linearnu aproksimaciju funkcije $f(x,y) := \sqrt{6-x^2-y^2}$ oko $(1,2)$ i $(1,1)$.

Tu je $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{6-x^2-y^2}}$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{6-x^2-y^2}}$
Zato je $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{-1}{\sqrt{6-1^2-2^2}} = -1$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \frac{-2}{\sqrt{6-1^2-2^2}} = -2$
Tu je još: $f(1,2) = 1$. Zaključujemo (iz druge formule) da za $(x,y) \approx (1,2)$ vrijedi

$$\sqrt{6-x^2-y^2} \approx 1 - (x-1) - 2(y-2) = 6 - x - 2y$$

Takodjer je $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{-1}{2}$ i $f(1,1) = 2$, pa je, za $(x,y) \approx (1,1)$,

$$\sqrt{6-x^2-y^2} \approx 2 - \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) = 3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$$

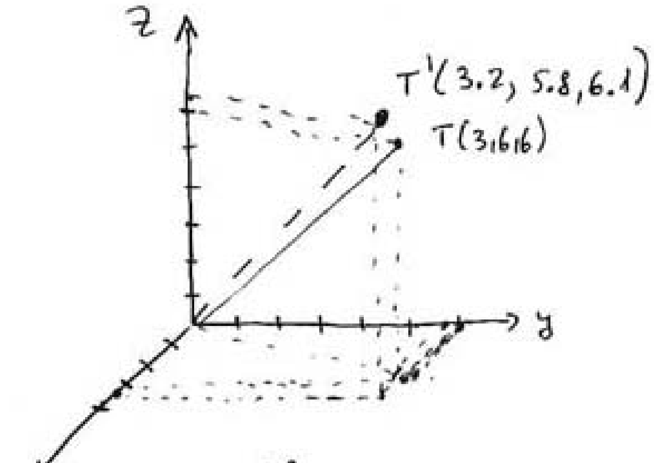
Iz tablice se možete uvjeriti u doseg tih formula.

x	y	$\sqrt{6-x^2-y^2}$	$6-x-2y$	$3-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y$
1	2	1	1	1.5
1.1	2.1	0.6164	0.7	1.4
1.1	1.9	1.0863	1.1	1.5
0.9	2.1	0.8832	0.9	1.5
1	1	2	3	2
1.1	1.1	1.8321	2.7	1.9
1.1	0.9	1.9950	3.1	2

Primjer 2. Odredimo približno promjenu udaljenosti točke $T(3,6,6)$ od ishodišta, ako joj se prva koordinata poveća za 0.2, druga smanji za 0.2 i treća poveća za 0.1?.

Koristimo se formulom za linearnu aproksimaciju funkcije f triju varijabla oko (x_0,y_0,z_0), iz koje dobijemo približnu formulu za prirast funkcije oko (x_0,y_0,z_0):
$\Delta f := f(x_0+\Delta x, x_0+\Delta y, x_0+\Delta z) \approx$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\Delta z$.
Tu je $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $(x_0,y_0,z_0) = (3,6,6)$,
$\Delta x = 0.2$, $\Delta y = -0.2$, $\Delta z = 0.1$.
Dalje, vidjeli smo već da je:
$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Dakle, $f(3,6,6) = 9$, što je početna udaljenost točke T od ishodišta, $\frac{\partial f}{\partial x}(3,6,6) = \frac{1}{3}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(3,6,6) = \frac{\partial f}{\partial z}(3,6,6) = \frac{2}{3}$, i konačno: $\Delta f \approx \frac{1}{3} \cdot 0.2 - \frac{2}{3} \cdot 0.2 + \frac{2}{3} \cdot 0.1 = 0$, pa se udaljenost praktično nije promijenila (sl.1.). Izravnim računom dobijemo da je nova udaljenost $\sqrt{3.2^2 + 5.8^2 + 6.1^2} \approx 9.005$.



sl.1.

Geometrijska interpretacija linearne aproksimacije - tangentna ravnina.

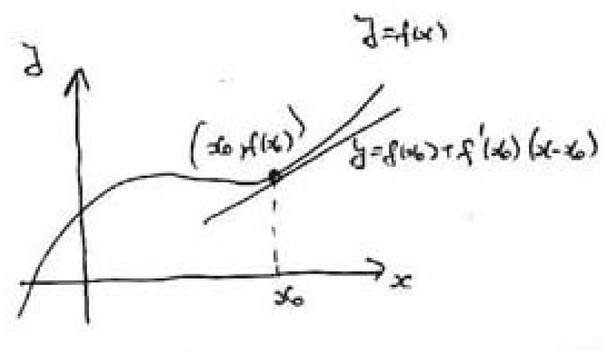
Za funkciju f jedne varijable, formula linearne aproksimacije oko x_0:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

geometrijski se interpretira time što je **pravac** s jednadžbom

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

tangenta na graf funkcije f u točki (x_0, y_0) (sl.2). Uočite prijelaz s formule na tangentu: $f(x)$ se zamijeni s y, a približna vrijednost znakom jednakosti.



sl.2.

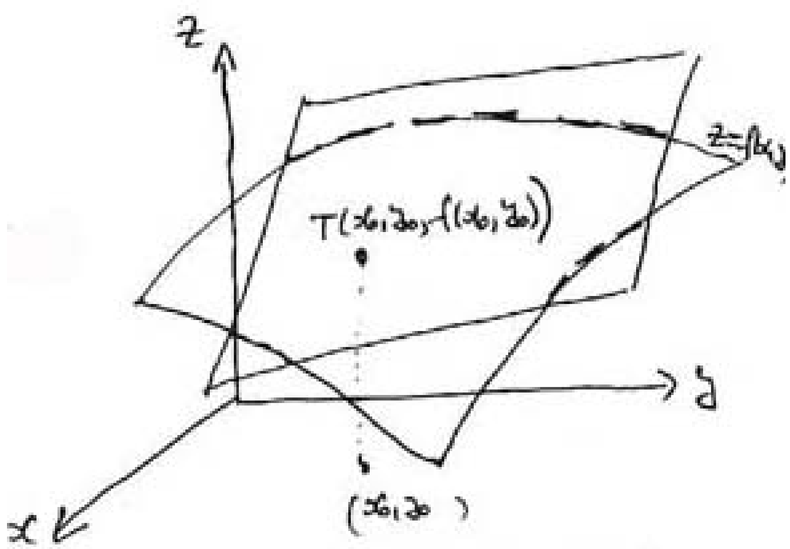
Analogno tome, formula linearne aproksimacije funkcije f oko (x_0, y_0):

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

geometrijski se interpretira time što je **ravnina** s jednadžbom

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

tangentna ravnina na graf funkcije f u točki $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)))$ (sl.3). Uočite da je u obje formule desna strana ista.



Sl. 3. Tangencijalna ravnina u točki T.

Primjer 3. Odredimo jednadžbu tangentne ravnine na graf funkcije $f(x,y) := \sqrt{6-x^2-y^2}$ u točki $(1,2,1)$.

Koristeći se rezultatom Primjera 1, dobijemo jednadžbu
$z = 6 - x - 2y$. To znači da je točka (x, y, z) prostora na tangentnoj ravnini ako i samo ako vrijedi $z = 6 - x - 2y$.

Diferencijal funkcije dviju varijabla.
Prema usporedbi prirasta, približnog prirasta (na osnovi linearne aproksimacije) i diferencijala funkcije jedne varijable:
Prirast funkcije f u x: $\Delta f(x) := f(x + \Delta x) - f(x)$
Približni prirast u x: $\Delta f(x) \approx f'(x)\Delta x$
Diferencijal u x: $df(x) = f'(x)dx$,
imamo analogne pojmove za funkcije dviju (ili više) varijabla:

Prirast funkcije f u (x,y): $\Delta f(x,y) := f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$
Približni prirast u (x,y): $\Delta f(x,y) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Delta y$
Diferencijal u (x,y): $df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy$.
Uočite kako se diferencijal dobije iz formule za približni prirast, zamjenom Δx s dx,Δy s dy, i znaka približne vrijednosti znakom jednakosti.
Analogno vrijedi za funkcije triju ili više varijabla.

Primjer 4. Odredimo diferencijal funkcije $f(x,y,z) := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ i diferencijal te funkcije u $(3,6,6)$.

Koristeći se rješenjem Primjera 2, dobijemo:
$df(x,y,z) := \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)dz =$
$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dy + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz$
Uvrštavanjem $x=3,\ y=z=6$ (ali ne u dx,dy,dz), dobijemo:
$d(f(3,6,6)) = \frac{3}{9}dx + \frac{6}{9}dy + \frac{6}{9}dz = \frac{1}{3}dx + \frac{2}{3}dy + \frac{2}{3}dz$

Dodatak: Kvadratna aproksimacija funkcija dviju varijabla.
Prema uzoru na kvadratnu aproksimaciju funkcije f jedne varijable oko x_0:

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2$$

iliti, u drugom zapisu, uz zamjenu $x_0+\Delta x = x$,

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

definiramo kvadratnu aproksimaciju funkcije dviju varijabla f oko (x_0,y_0):

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y +$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\frac{(\Delta y)^2}{2!}$$

iliti, u drugom zapisu, uz zamjenu $x_0+\Delta x = x$ i $y_0+\Delta y = y$,

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) +$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\frac{(y-y_0)^2}{2!}.$$

Vidimo da formule, iz linearni dio, imaju dodatni, kvadratni dio. Uočite tri pribrojnika u kvadratno dijelu; oni se odnose, redom, na $(\Delta x)^2,\ \Delta x\Delta y,\ (\Delta y)^2$. Uz $\Delta x\Delta y$ nema dijeljenja s 2!, što se može tumačiti time što se jedanput gleda $\Delta x\Delta y$, a drugi $\Delta y\Delta x$.
Postoje analogne formule i za funkcije triju ili više varijabla.
Takodjer, postoje formule za kubnu aproksimaciju itd.

Primjer 5. Odredimo kvadratnu aproksimaciju funkcije
$f(x,y) := \ln(x^2+y^2)$ oko (x_0,y_0), posebice oko $(1,0)$.

Vrijedi $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$,
Odavde dobijemo:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \cdot \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \cdot \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

Sad možemo zapisati kvadratnu aproksimaciju (druga formula):
$\ln(x^2+y^2) \approx \ln(x_0^2+y_0^2) + \frac{2x_0}{x_0^2+y_0^2}(x-x_0) + \frac{2y_0}{x_0^2+y_0^2}(y-y_0) +$
$\frac{y_0^2-x_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2}(x-x_0)^2 + (-4)\frac{x_0 y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{x_0^2-y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2}(y-y_0)^2$

Ako sad stavimo $(x_0, y_0) = (1, 0)$, dobit ćemo
$\ln(x^2+y^2) \approx 0 + 2(x-1) + 0 \cdot (y-0) + (-1)(x-1)^2 - 4 \cdot 0(x-1)(y-0) + 1 \cdot (y-0)^2$,
tj.
$\ln(x^2+y^2) \approx 2(x-1) - (x-1)^2 + y^2$.

Lekcije iz Matematike 2.

9. Lokalni ekstremi funkcije više varijabla.

I. Naslov i objašnjenje naslova
U lekciji se obradjuje metoda za odredjivanje najmanje i najveće vrijednosti funkcije dviju varijabla.

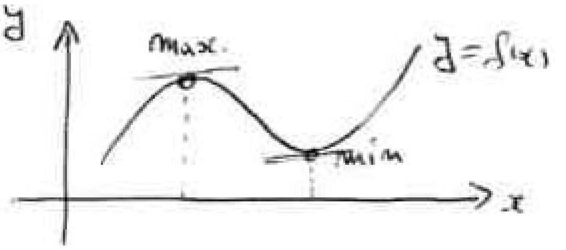
II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem
Problemi minimizacije i maksimizacije spadaju u najvažnije praktične i teoretske probleme. Smisao je da se odrede vrijednosti argumenata u kojima neka funkcija postiže svoju najmanju ili najveću vrijednost (lokalno ili globalno). Vidjeli smo da se taj problem za funkcije jedne varijable rješava pomoću derivacija. Sad ćemo vidjeti da se analogan problem za funkcije više varijabla rješava pomoću parcijalnih derivacija.

III. Potrebno predznanje
Potrebno je poznavati pojam lokalnog ekstrema funkcije jedne varijable i metode njegova odredjivanja. Takodjer, treba poznavati pojam i i geometrijsko značenje parcijalnih derivacija funkcije dviju varijabla, te jednadžbu tangentne ravnine na graf funkcije f dviju varijabla u točki grafa $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

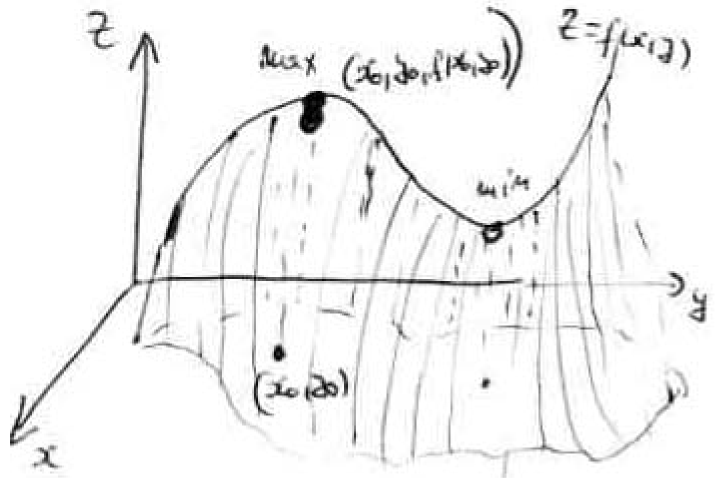
$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

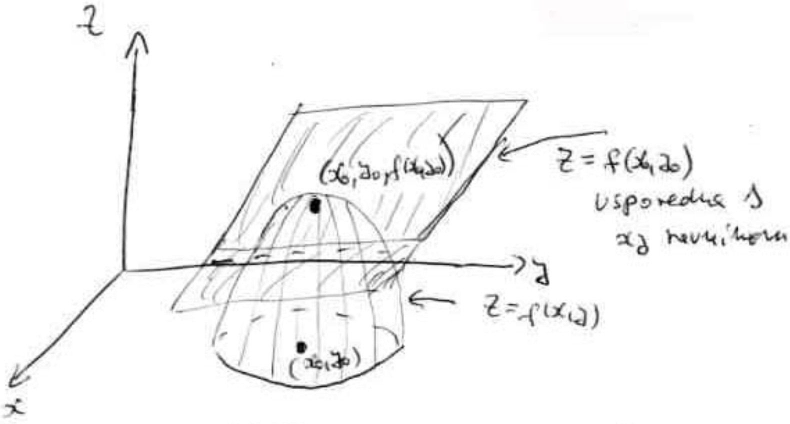
Pojam i geometrijska predožba lokalnog ekstrema funkcije dviju varijabla.
Prema uzoru na lokalni ekstrem funkcije jedne varijable (sl.1.), uvodimo pojam lokalnog ekstrema funkcije f dviju varijabla (sl.2.):
f ima lokalni minimum u (x_0, y_0) ako je $f(x_0, y_0)$ najmanja vrijednost u nekoj okolini od (x_0, y_0).
f ima lokalni maksimum u (x_0, y_0) ako je $f(x_0, y_0)$ najveća vrijednost u nekoj okolini od (x_0, y_0).
Uočite da je tangentna ravnina na graf u lokalnom ekstremu usporedna s xy-ravninom, i analogiju s lokalnim ekstremom funkcije jedne varijable, kod koje je tangenta u lokalnom ekstremu usporedna s x-osi (sl.3.).


y
max.
$y=f(x)$
min
x

Sl. 1.


z
max
$(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$
$z=f(x,y)$
min
y
(x_0,y_0)
x

Sl. 2.

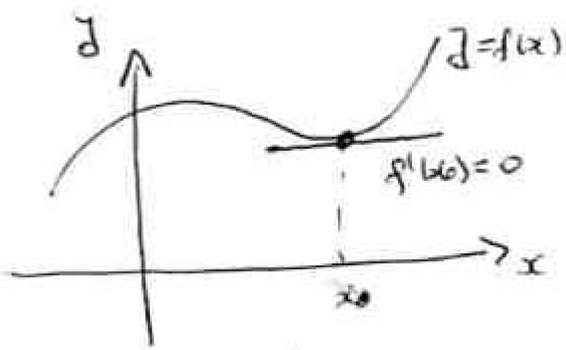

z
$(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$
$z=f(x_0,y_0)$
usporedna s
xy ravninom
y
$z=f(x,y)$
(x_0,y_0)
x

Sl. 3.

Nužan uvjet ekstrema funkcije dviju varijabla - stacionarne točke. Iz jednadžbe tangentne ravnine na graf funkcije f dviju varijabla u točki grafa $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ i geometrijske predodžbe lokalnog ekstrema, zaključujemo da jednadžba tangentne ravnine u lokalnom ekstremu mora biti $z = f(x_0, y_0)$, tj. da su uvjeti:

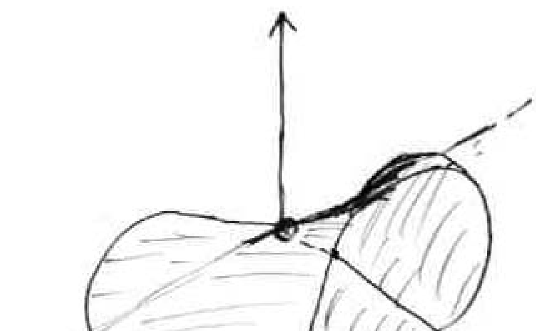
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \ i \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

nužni uvjeti lokalnog ekstrema u (x_0, y_0). Usporedite s lokalnim ekstremom funkcije jedne varijable (sl.4.).



Sl.4.

Točke koje zadovoljavaju nužan uvjet ekstrema zovu se **kritične točke** (kao i kod funkcija jedne varijable). U kritičnoj točki može biti lokalni minimum ili lokalni maksimum ili može biti **sedlasta točka** - analogon točke infleksije za funkcije jedne varijable (sl.5.).

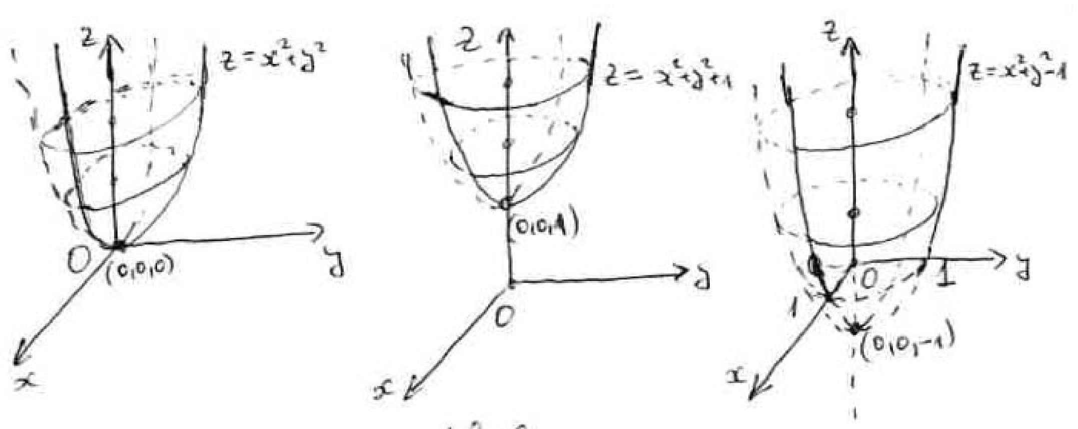


Sl.5. Sedlasta točka u ishodištu

Analogno se dobiju nužni uvjeti lokalnog ekstrema za funkcije triju ili više varijabla, samo što se ne mogu ovako jednostavno geometrijski predočiti.

Primjer 1. Skicirajmo graf i odredimo kritične točke funkcije:
a) $f(x, y) := x^2 + y^2$,
b) $f(x, y) := x^2 + y^2 + 1$,
c) $f(x, y) := x^2 + y^2 - 1$,
d) $f(x, y) := x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5$,
e) $f(x, y) := 4 - x^2 - y^2$,
Pokušajmo odrediti njihov karakter.

Za a), b) i c) je $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$.
Zato je $x = y = 0$ rješenje sustava $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, pa je $(0, 0)$ jedina stacionarna točka. Iz slike 6. vidimo da je to uvijek minimum, samo što je vrijednost minimuma redom $0, 1, -1$.

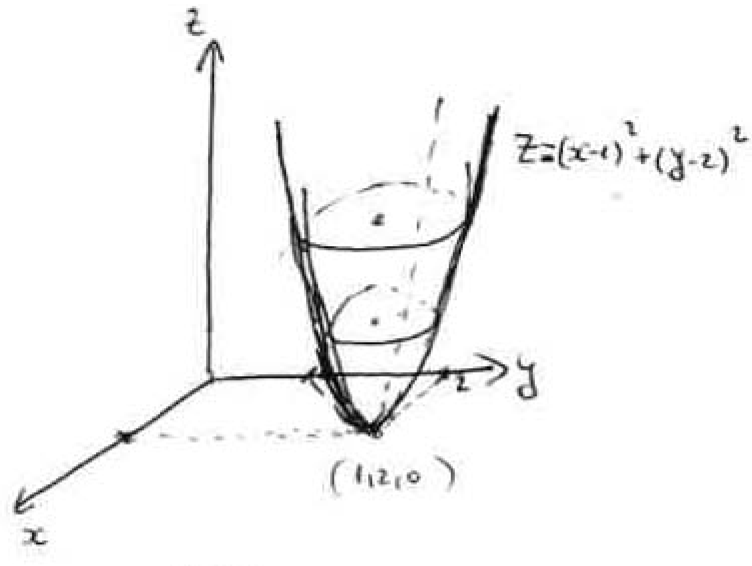


Sl. 6.

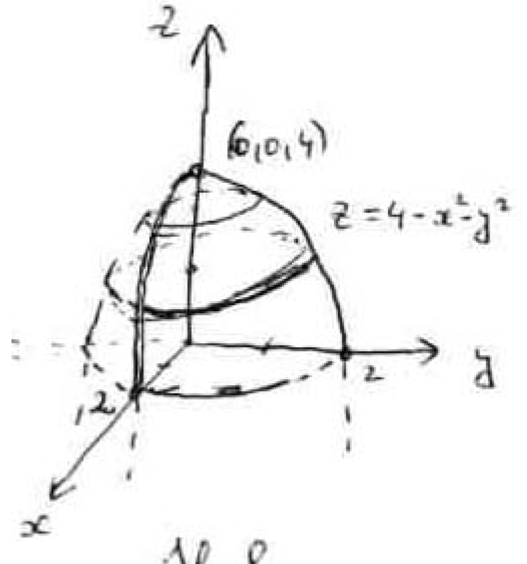
Drugim riječima, tjemena su redom $T(0, 0, 0)$, $T(0, 0, 1)$, $T(0, 0, -1)$.
Uočite da ste do rezultata mogli doći samo crtanjem grafa (bez traženja stacionarnih točaka).
U d) je $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4$, što vodi do stacionarne točke $(1, 2)$. I u toj je točki minimum, što se vidi iz jednakosti

$$x^2 - 2x + y^2 - 4x + 5 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$$

pa možemo pisati $f(x, y) := (x - 1)^2 + (y - 2)^2$. Slika je poput one iz a), samo što je tjeme u $(1, 2, 0)$ (sl.7.).
U e) je $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$, pa je, opet, $(0, 0)$ stacionarna točka. U toj je točki maksimum (sl.8.).



Sl. 7.

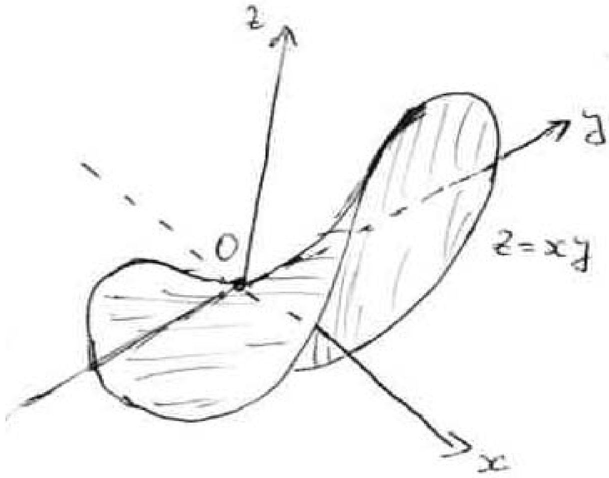


Sl. 8

Primjer 2. Skicirajmo graf i odredimo kritične točke funkcije $f(x, y) = xy$.

Tu je $\frac{\partial f}{\partial x} = y$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = x$, pa je, opet, $(0, 0)$ stacionarna točka. U toj točki nije lokalni ekstrem, već **sedlasta točka**. Graf nije lako jasno predočiti, ali se vidi sljedeće:
1. graf sadrži koordinatne osi (jer je na njima $xy = 0$, tj. $z = 0$),
2. Za (x, y) iz prvog ili trećeg kvadranta, graf je iznad, a za one iz trećeg i četvroga kvadranta, on je ispod xy ravnine.
Zato graf možemo zamisliti kao sedlo: prednji dio sedla je iznad 1. kvadranta

(uzdiže se), a stražnji iznad 3. kvadranta (takodjer se uzdiže). Desna i lijeva strana sedla ide prema dolje i ona je ispod 2. i ispod 4. kvadranta. Kako se ti dijelovi sastaju u ishodištu, ono se naziva sedlastom točkom (sl.9.).



sl. 9.

Fizikalno, sedlaste točke odgovaraju nestabilnim točkama procesa.

Dodatak. Kriterij lokalnog ekstrema i sedlaste točke.
Prema analogiji s funkcijama jedne varijable, gdje se karakter stacionarne točke može opisati pomoću derivacija višeg reda, izvodi se analogan, ali bitno složeniji kriterij, za karakter stacionarnih točaka funkcije dviju varijabla (sl.10).
Iz slike vidimo da je logično da se uvjet: $f''(x_0) > 0$ zamijeni s $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) > 0$, slično za $f''(x_0) < 0$. Pokazuje se da to nije dovoljno. Potreban je još jedan uvjet u kojemu sudjeluje determinanta sastavljena od drugih parcijalnih derivacija u stacionarnoj točki.
Evo opisa kriterija:
Neka je (x_0, y_0) stacionarna točka od f. Definiramo:
$A := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$
$C := \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$
$B := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$
$\Delta := AC - B^2$.
Tada vrijedi:
(i) Ako je $\Delta < 0$ onda je (x_0, y_0) sedlasta točka.
(ii) Ako je $\Delta > 0$ onda je (x_0, y_0) točka lokalnog ekstrema i to:
Za $A < 0$ to je lokalni maksimum
Za $A > 0$ to je lokalni minimum.
Uočite sličnost s kriterijom za funkcije jedne varijable.
Uočite takodjer, da je, uz uvjet $\Delta > 0$, uvjet $A > 0$ ekvivaletan uvjetu $C < 0$ (i slično za $A > 0$). Zato je dovoljno provjeriti bilo koji od tih uvjeta. Mi smo stavili uvjet za A, a mogli smo i za C.
(iii) Ako je $\Delta = 0$, kriterij ne daje odluku.

Primjer 3. - primjena kriterija. Odredimo lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) := x^3 - 3xy + y^3$.

Tu je $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x$.
Zato je:
$A = 6x$, $C = 6y$, $B = -3$, $\Delta = 6x \cdot 6y - (-3)^2 = 9(4xy - 1)$.
Stacionarne se točke dobiju iz sustava:
$y = 3x^2$ i $x = 3y^2$.
Dobiju se točke: $(0,0)$ i $(1,1)$. Izrazi A, B, C, Δ mogu se gledati kao funkcije dviju varijabla. Vidimo da je:
$\Delta(0,0) = -9 < 0$ pa je $(0,0)$ sedlasta točka.
$\Delta(1,1) = 27 > 0$ pa je $(1,1)$ točka lokalnog ekstrema.
Kako je $A(1,1) = 6 > 0$, zaključujemo da je $(1,1)$ lokalni minimum.

Primjer 4. - primjena pojma lokalnog ekstrema. Od svih kvadara zadana obujma odredimo onaj minimalna oplošja.

Prije rješavanja napomenimo da su zadatci ovoga tipa vrlo su važni u primjeni, jer organske i anorganske tvorevine često imaju ovakvo (ili nekakvo drugčije) svojstvo minimalnosti. Naravno, ovaj je zadatak zanimljiv za minimizaciju potrošnje materijala.

Označimo s x, y, z duljine bridova kvadra, s O oplošje i s V obujam. Tada je
$V = xyz$, tj. $z = \frac{V}{xy}$ i $O = 2(xy + xz + yz) = 2(xy + \frac{V}{y} + \frac{V}{x})$, pa se zadatak svodi na odredjivanje minimuma funkcije

$$f(x,y) := xy + \frac{V}{x} + \frac{V}{y}$$

za pozitivne x, y. Dobijemo:
$\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{V}{x^2}$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{V}{y^2}$.
Stacionarne točke dobijemo iz sustava:
$y = \frac{V}{x^2}$; $x = \frac{V}{y^2}$,
odakle dobijemo $xy^2 = yx^2$, tj. $y = x$ (jer je $x, y > 0$). Uvrštavanjem u neku od gornjih jednadžba, dobijemo: $x = y = z = \sqrt[3]{V}$. Zaključujemo da je rješenje kocka. Dakle:
Od svih kvadara stalnog obujma, najmanje oplošje ima kocka.
Da je dobiveno rješenje minimum, a ne maksimum, možemo zaključiti na dva načina:
1. način (čisto matematički, pomoću kriterija). Postupak provedite sami.
2. način (zdravorazumski). Oplošje nema najveće vrijednosti, uz stalni obujam može biti po volji veliko (objasnite). Zato stacionarna točka treba biti minimum.

V. Pitanja i zadaci
1. Provjerimo kriterij ekstrema na funkcijama iz Primjera 1 i Primjera 2.

2. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) := x^3 - 3xy^2 + 3y^2$.

Lekcije iz Matematike 2.

10. Višestruki integrali - uzastopno integriranje.

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se uvodi pojam dvostrukog i, općenito, višestrukog integrala i objašnjava njegovo geometrijsko značenje. Takodjer se objašnjava jedna metoda efikasnog računanja dvostrukog integrala - uzastopno integriranje, u pravokutnim i u polarnim koordinatama.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Problem odredjivanja obujma tijela koji su omedjeni zakrivljenim plohama odavno je važan matematički i praktični problem. Taj se problem načelno rješava pomoću dvostrukog integrala (analogno tome kako se problem površine rješava pomoću običnog - jednostrukog integrala).

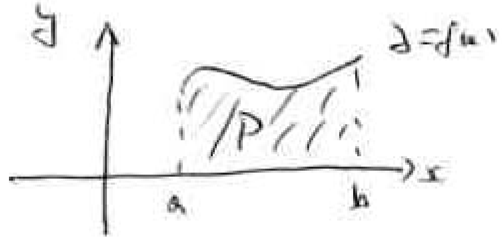
III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavanje pojma funkcije dviju varijabla i njena grafa, te pojam i gemetrijsku interpretaciju odredjenog integrala funkcije jedne varijable - jednostrukog integrala. Takodjer je potrebno poznavati pojam obujma i računanja obujma prizme.

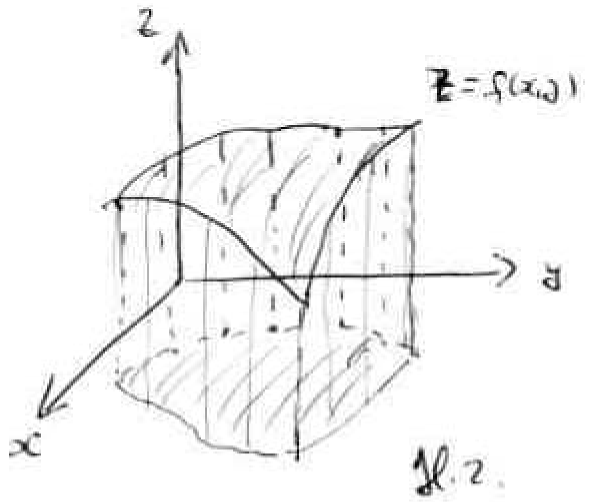
IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Obujam ispod grafa pozitivne funkcije dviju varijabla.

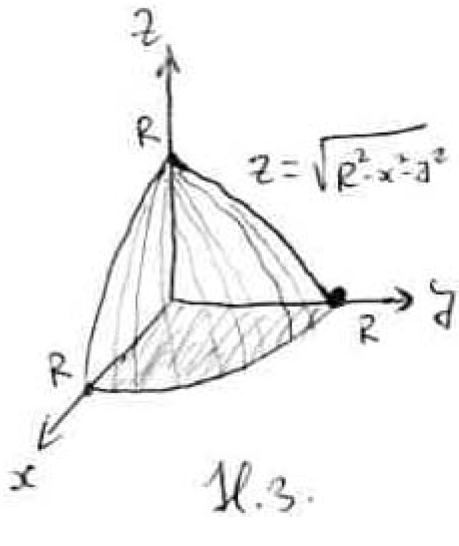
Analogno tome kako graf pozitivne funkcije f jedne varijable zatvara s osi x površinu (sl.1.), tako graf pozitivne funkcije dviju varijabla s xy-ravninom zatvara prostor (sl.2.). U prvom slučaju riječ je o površini ispod krivulje, a u drugom o prostoru ispod plohe.



Sl.1.



Primjer 1. - polukugla. Polukugla polumjera R može se shvatiti kao dio prostora izmedju grafa funkcije $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ i xy-ravnine (sl.3.).



Djelić obujma - diferencijal obujma.
Prema uzoru na djelić površine $\Delta P(x)$ ispod grafa pozitivne funkcije f jedne varijable, a iznad segmenta od x do $x + \Delta x$ duljine Δx, približnu vrijednost

$$\Delta P(x) \approx f(x)\Delta x$$

i diferencijal površine u x:

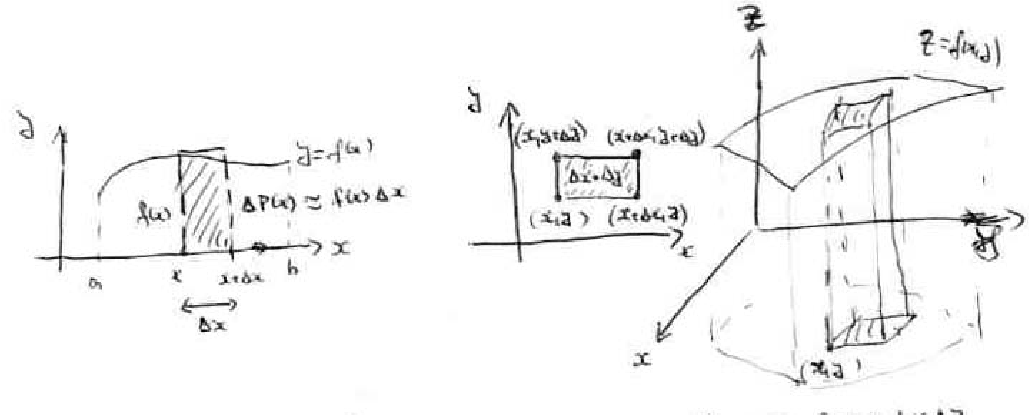
$$dP(x) = f(x)\Delta x$$

definiramo djelić obujma $\Delta V(x)$ ispod grafa pozitivne funkcije f dviju varijabla, a iznad pravokutnika sa stranicama duljina Δx, Δy s jednim vrhom u točki (x, y) kao na slici 4. Vidimo da taj pravokutnik ima površinu $\Delta x \cdot \Delta y$, i da je

$$\Delta V(x) \approx f(x)\Delta x\Delta y$$

odakle definiramo diferencijal obujma u (x, y):

$$dV(x, y) = f(x, y)dxdy$$



Sl. 4.

Računanje obujma ispod pozitivne funkcije - dvostruki integral pozitivne funkcije.

Kod funkcije jedne varijable imali smo pozitivnu funkciju f, segment $[a, b]$ na x-osi i površinu P izmedju segmenta i grafa. Veza izmedju tih veličina dana je odredjenim integralom

$$P = \int_a^b f(x)dx$$

koji se može pisati kao

$$P = \int_{[a,b]} f(x)dx$$

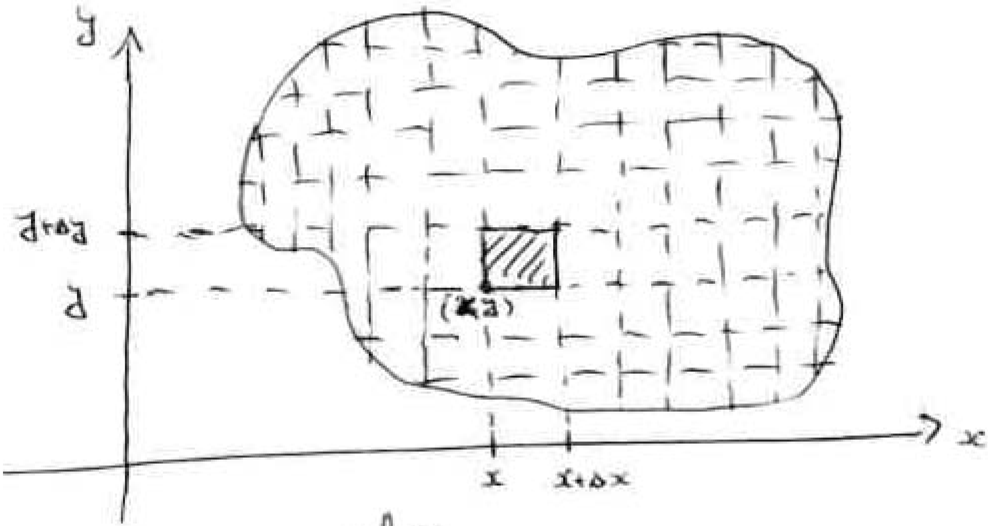
(čitamo: *integral funkcije f po segmentu* $[a, b]$).

Analogno, kod funkcija dviju varijabla imamo pozitivnu funkciju f dviju varijabla, područje D u xy-ravnini i obujam V izmedju D i grafa funkcije f. Imamo i analognu vezu

$$V = \int\int_D f(x, y)dxdy$$

(čitamo: *dvostruki integral funkcije f po području D*).

Smisao dvostrukog integrala je ukupni obujam, koji je približno suma djelića volumena iznad malih pravokutnika kad područje D podijelimo kao na slici 5. Intuitivno, zamišljamo da smo integriranjem zbrojili beskonačno mnogo diferencijala površina $f(x, y)dxdy$ kad (x, y) prolazi svim točkama područja D i tako dobili ukupni obujam.



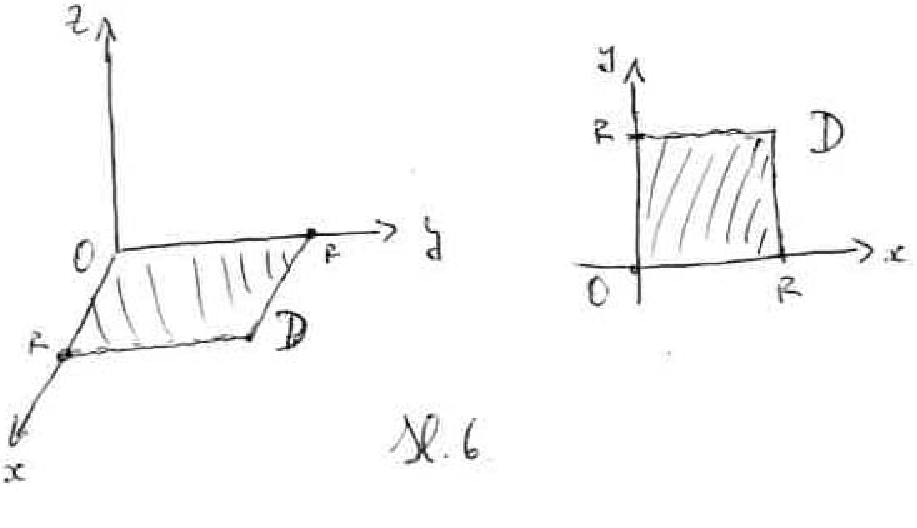
Sl 5

Primjer 2. U Primjeru 1. imamo
$f(x,y) := \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$,
$D :=$ krug u xy ravnini polumjera R sa središtem u ishodištu,
a dvostruki integral

$$\int\int_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dxdy$$

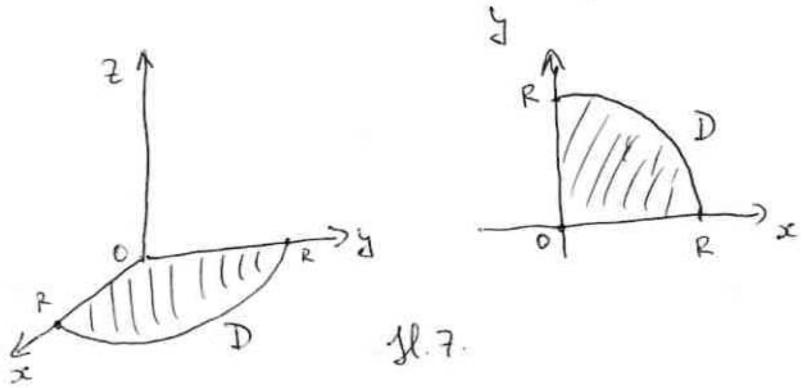
ima značenje obujma polukugle polumjera R.

Primjer 3. (i) $\int\int_D xydxdy$, gdje je D kvadrat u prvom kvadrantu zadan s $0 \leq x \leq R$ i $0 \leq y \leq R$ (sl.6.), ima značenje obujma izmedju tog kvadrata i sedlaste plohe.



Sl. 6

(ii) $\int\int_D xydxdy$, gdje je D dio kruga polumjera R u prvom kvadrantu zadana s $0 \leq x \leq R$ i $0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$ (sl.7.), ima značenje obujma izmedju tog dijela kruga i sedlaste plohe.



Sl.7.

Izračunavanje dvostrukog integrala - uzastopno integriranje.
Ne postoji opća metoda za računanje dvostrukog integrala $\int\int_D f(x,y)dxdy$ za svako područje D. Takva metoda postoji ako je područje D kao na slici 8., tj. ako je zadano nejednakostima

$$a \leq x \leq b \ i \ \phi(x) \leq y \leq \psi(x)$$

Tada se dvostruki integral svodi na dva uzastopna jednostruka integrala, prema formuli:

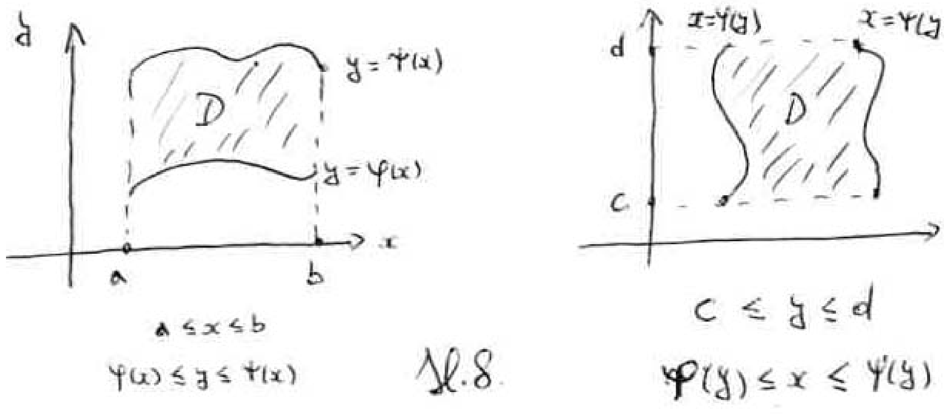
$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b [\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy]dx$$

Slično je pri zamjeni x i y koordinate, tj. ako je zadano nejednakostima

$$c \leq y \leq d \ i \ \phi(y) \leq x \leq \psi(y)$$

Tada se dvostruki integral svodi na dva uzastopna jednostruka integrala, prema formuli:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_c^d [\int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx]dy$$

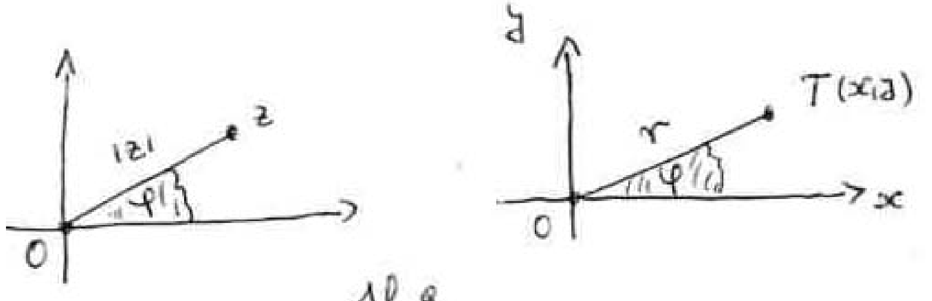


Sl.8.

Opis postupka uzastopnog integriranja.
1. korak - računanje integrala $\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$ kao integrala po varijabli y, uz uvjet da je u podintegralnoj funkciji varijabla x konstanta; rezultat će biti neka funkcija ovisna o x.
2. korak - integriranje dobivene funkcije po x; rezultat će biti broj.
Objašnjenje postupka uzastopnog integrala.
Rezultat 1. koraka može se, za svaki konkretni x, interpretirati kao površina presjeka zadanog obujma s ravninom kroz x okomito na os apscisa, a usporedno s yz ravninom. Drugi korak zamišljamo kao "zbrajanje" svih tih površina za sve x od a do b i tako dobijemo traženi obujam.

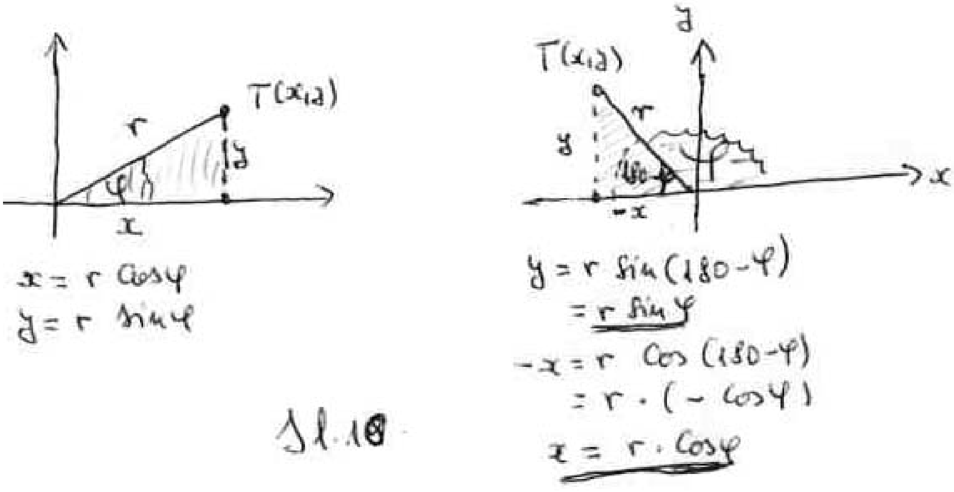
Primjer 4. - primjena uzastopnog integriranja. Izračunajmo obujam iz primjera 3.
(i) Tu je $f(x,y) := xy$, D kvadrat stranice R u prvom kvadrantu, pa je $a = 0,\ b = R,\ \phi(x) = 0,\ \psi(x) = R$, dakle
$V_1 = \int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_D xydxdy =$
$\int_0^R[\int_0^R xydy]dx = \int_0^R[(x\frac{y^2}{2})\ |_{y=0}^{y=R}]dx = \int_0^R \frac{R^2x}{2}dx = \frac{R^2x^2}{4}\ |_0^R = \frac{R^4}{4}$
(ii) Tu je opet $f(x,y) := xy$, ali sad je D dio kruga polumjera R u prvom kvadrantu, pa je $a = 0,\ b = R,\ \phi(x) = 0,\ \psi(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, dakle
$V_2 = \int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_D xydxdy =$
$\int_0^R[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} xydy]dx = \int_0^R[(x\frac{y^2}{2})\ |_{y=0}^{y=\sqrt{R^2-x^2}}]dx = \int_0^R x\frac{R^2-x^2}{2}dx = (\frac{R^2x^2}{4} - \frac{x^4}{8})\ |_0^R = \frac{R^4}{8}$.
Dakle, $V_1 = 2V_2$ (komentirajte).

Dvostruki integral u polarnim koordinatama. U primjenama katkad je prirodnije razmatrati polarne koordinate umjesto pravokutnih, Kartezijevih. Polarne koordinate su analogne trigonometrijskom prikazu kompleksnog broja: kako je svaki kompleksni broj z različit od nule jednoznačno odredjen svojom apsolutnom vrijednošću $|z|$ i argumentom (kutom) ϕ , tako je i svaka točka T ravnine jednoznačno odredjena udaljenošću od ishodišta r, i kutom ϕ što ga spojnica $\overline{OT}$ zatvara s pozitivnom zrakom x-osi (slika 9.). Uobičajena je ova terminologija:
realni brojevi x, y su kartezijeve koordinate točke T, uredjeni par (x, y) je prikaz točke T u Kartezijevim koordinatama,
pozitivan realan broj r, i realan broj ϕ uz $0 \le \phi < 2\pi$, su polarne koordinate točke T, uredjeni par (r, ϕ) je prikaz točke T u polarnim koordinatama.

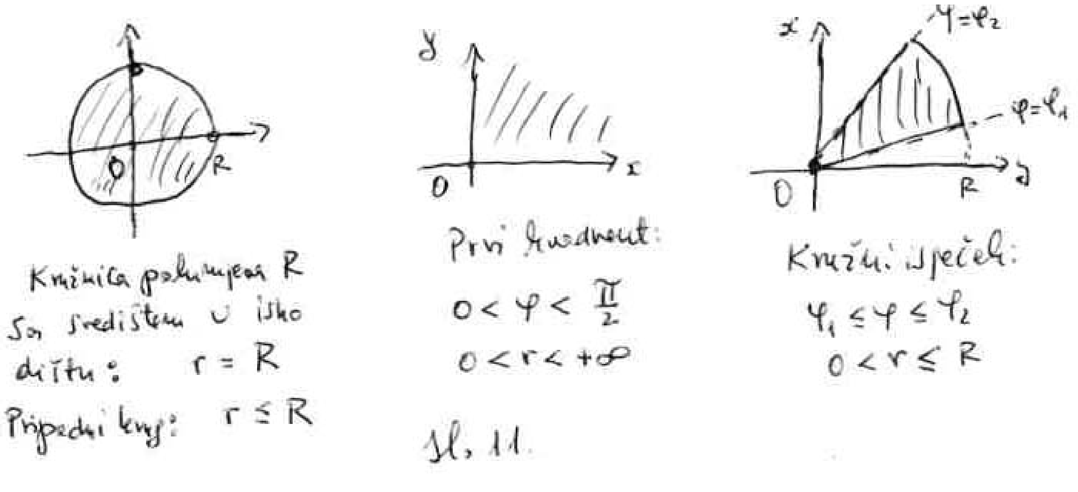


sl. 9

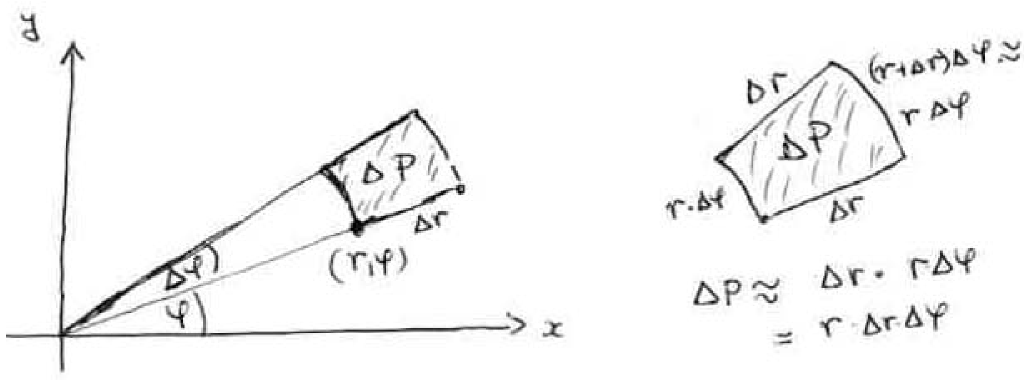
Veza izmedju kartezijevih i polarnih koordinata (sl.10.).
Formule kojim se iz polarnih koordinata dobiju kartezijeve:
$x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi$.



Primjer 5. - jednadžbe u polarnim koordinatama.
Na sl.11. predočeni su neki podskupovi ravnine i njihove jednadžbe u polarnim koordinatama.



Djelić površine i obujma, diferencijal površine i obujma u polarnim koordinatama (sl.12.).

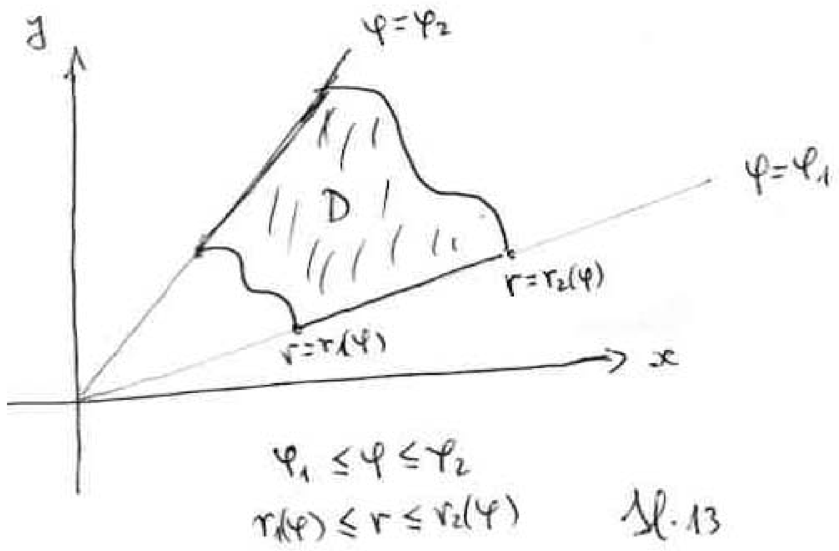


Sl. 12.

$\Delta P(r,\phi) \approx r\Delta r\Delta\phi$
$dP(r,\phi) = rdrd\phi$.
Dakle, $dxdy$ u kartezijevim koordinatama, prelazi u $rdrd\phi$ u polarnim koordinatama.
Zato je djelić obujma što ga nad djelićem površine čini pozitivna funkcija f:
$\Delta V(r,\phi) \approx f(r\cos\phi, r\sin\phi)r\Delta r\Delta\phi$,
a pripadni diferencijal obujma
$dV(r,\phi) = f(r\cos\phi, r\sin\phi)rdrd\phi$.

Dvostruki integral u polarnim koordinatama (sl.13.).
Ako je područje D zadano u polarnim koordinatama nejednadžbama:
$\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2$ *i* $r_1(\phi) \leq r \leq r_2(\phi)$, onda je

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_{\phi_1}^{\phi_2}[\int_{r_1(\phi)}^{r_2(\phi)} f(r\cos\phi, r\sin\phi)rdr]d\phi$$



Sl. 13

Primjer 6. - obujam polukugle polumjera R. Prema primjerima 1. i 2. vidimo da tu područje D zadovoljava uvjete za uzastopno integriranje. Naime, krug polumjera R zadan je uvjetima

$$-R \leq x \leq R \ i \ -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$$

Zato je:
$V = \int\int_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dxdy = \int_{-R}^{R} [\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dy] dx$.
Vidimo da se problem svodi na računanje kompliciranih integrala. Medjutim, uz pomoć polarnih koordinata, račun postaje puno jednostavniji. Naime, u polarnim se koordinatama krug polumjera R zadaje nejednadžbom $r \leq R$, dakle: $0 \leq \phi < 2\pi$ i $0 < r \leq R$. Takodjer, vrijedi $x^2 + y^2 = r^2$, pa dobijemo:
$V = \int\int_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dxdy = \int_0^{2\pi} [\int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr] d\phi = [R^2 - r^2 = t^2,\ rdr = -tdt] =$
$\int_0^{2\pi} [\int_R^0 (-t^2) dt] d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{R^3}{3} d\phi = (\frac{R^3}{3}\phi) \mid_0^{2\pi} = \frac{2\pi R^3}{3}$,
što je obujam polukugle polumjera R.

Dvostruki integral bilo koje funkcije dviju varijabla.
Analogno interpretaciji jednostrukog integrala prema kojem je integral negativne funkcije suprotan površini izmedju grafa i x-osi, dvostruki integral negativne funkcije je suprotan obujmu izmedju grafa i xy-ravnine.
Takodjer, uzastopno integriranje i zamjena s polarnim koordinatama mogu se primijeniti općenito, a ne samo za pozitivne funkcije.

Trostruki, višestruki integral.
Analogno dvostrukom definira se trostruki integral, ali tu ga nećemo obradjivati.

Lekcije iz Matematike 2.

11. Primjena višestrukog integrala.

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se ilustriraju dvije primjene dvostrukog integrala u inženjerstvu. Prva je u rješavanju problema mase nehomogenog područja u ravnini, a druga u odredjivanju njegova težišta (to je ujedno i primjena u vjerojatnosti i statistici, za dvodimenzionalne razdiobe). Napominju se i analogne primjene trostrukog integrala. Takodjer se ilustrira primjena dvostrukog integrala za računanje površina i jedna primjena u vjerojatnosti.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Problem mase i težišta ravne nehomogene tanke ploče ili tijela, vrlo je čest u primjenama. Taj se problem može riješiti pomoću dvostrukog integrala (odnosno pomoću trostrukog integrala), pod uvjetom da poznajemo gustoću ploče (odnosno gustoću tijela).

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati pojam dvostrukog integrala i metode računanja usastopnim integriranjem i u polarnim koordinatama. Takodjer je potrebno poznavati sljedeće fizikalne pojmove:

1. Pojam mase i funkcije gustoće mase.
2. Pojam težišta nehomogenog segmenta.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

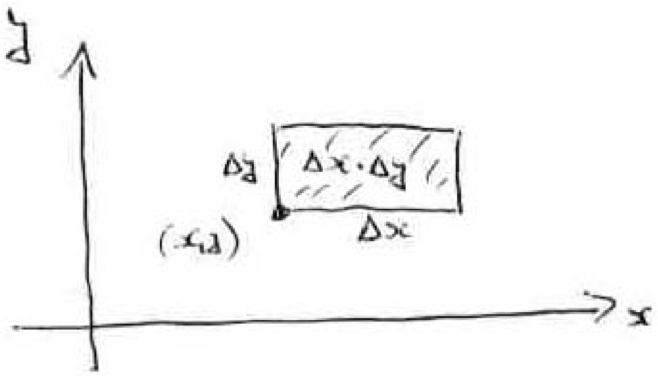
Funkcija gustoće mase područja (ploče) D u ravnini.

Zamislimo da je masa m tanko razmazana po području D u ravnini. Postoje dvije bitno različite mogućnosti. Prva je da je masa razmazana jednoliko; tada kažemo da je područje homogeno (homogena ploča). Druga je mogućnost da je masa razmazana nejednoliko (nehomogeno područje). Tada se karakter razmazavanja opisuje funkcijom gustoće mase f. Srednja gustoća mase na malom pravokutniku sa stranicama $\Delta x, \Delta y$ (sl.1.), prema definiciji je omjer mase i površine:

$$\overline{f(x,y)} := \frac{\Delta m}{\Delta x \cdot \Delta y}$$

Prelaskom na limes, dolazimo do pojma gustoće u točki (x, y):

$$f(x,y) := \lim_{\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x \cdot \Delta y}$$



Sl.1

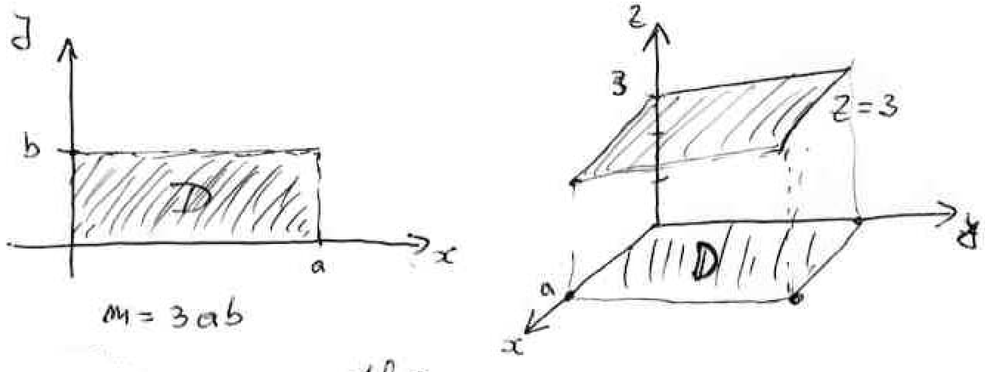
Masa nehomogenog područja D u ravnini u ovisnosti o gustoći.
Iz diferencijalne relacije $\Delta m \approx f(x,y)\Delta x \Delta y$, dobijemo $dm = f(x,y)dxdy$ (to slijedi i izravno iz definicije gustoće u točki). Zato je, prema definiciji dvostrukog integrala,

$$m = \int_D f(x,y)dxdy$$

Primjer 1. - primjena formule za masu područja
Neka je D pravokutnik zadan relacijama:

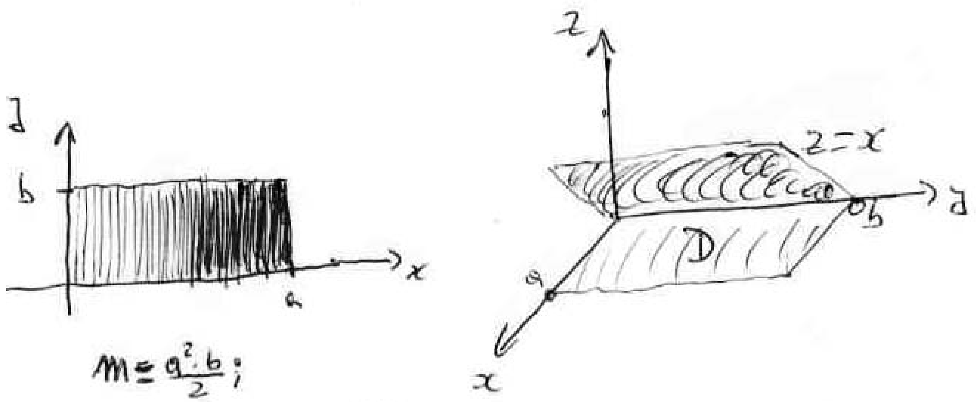
$$0 \leq x \leq a \ i \ 0 \leq y \leq b$$

i neka je redom, funkcija gustoće mase
a) $f(x,y) := 3$, b) $f(x,y) := x$, c) $f(x,y) := xy$.
(i) Predočimo grafički raspored mase i interpretirajmo.
a) Graf je pravokutnik - dio ravnine usporedne s xy ravninom iznad zadanog pravokutnika D (sl.2). Masa je jednoliko razmazana; na jedinicu površine dolaze 3 jedinice mase.



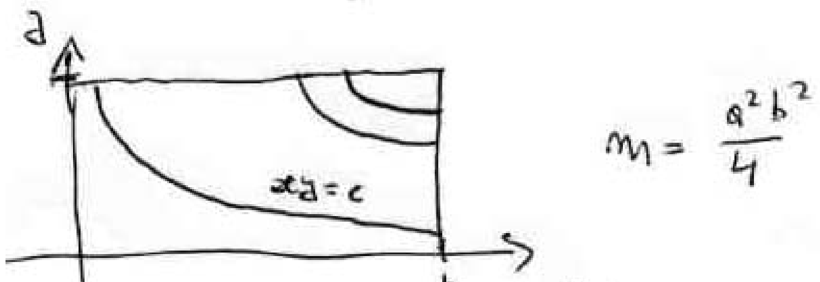
Sl.2.

b) Graf je dio kose ravnine iznad pravokutnika D, a zadan je jednadžbom $z = x$ (sl.3.). Možemo zamisliti da je masa razmazana po pravokutniku D nekim valjkom kojeg smo postavili na vertikalnu stranicu b, i gurajući valjak horizontalno (uzduž osi x), količinu namaza pojačavamo jediničnom brzinom. Vertikalne linije (dijelovi pravaca s jednadžbom $x = c$, za $0 \leq c \leq a$) imaju stalnu gustoću namaza.



sl.3

c) Graf je dio sedlaste plohe iznad pravokutnika D. Da dočaramo promjenu gustoće namaza, nacrtamo dijelove hiperbola s jednadžbama $xy = c$, za $c > 0$; te hiperbole imaju stalnu gustoću namaza c, a gustoća se povećava s povećavanjem parametra c (sl.4.).



sl.4.

(ii) Odredimo ukupnu masu m.

a) $m = 3 \cdot ab$ jer je, pri jednolikom namazu, masa jednaka umnošku površine i gustoće (to se može dobiti i integriranjem).

b) $m = \int_D f(x,y)dxdy = \int_0^a [\int_0^b xdy]dx =$

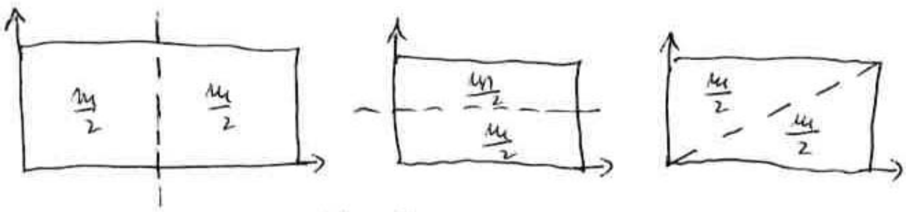
$\int_0^a [xy \,|_{y=0}^{y=b}]dx = \int_0^a bxdx = \frac{a^2b}{2}$.

Vidimo da je masa proporcionalna b, i kvadratno proporcionalna a. Objasnite!

c) $m = \int_D f(x,y)dxdy = \int_0^a [\int_0^b xydy]dx =$

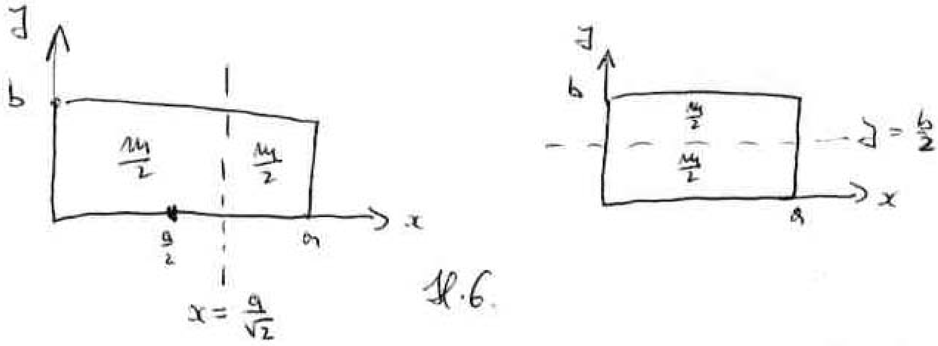
$\int_0^a [x\frac{y^2}{2}\,|_{y=0}^{y=b}]dx = \int_0^a \frac{b^2}{2}xdx = \frac{a^2b^2}{4}$.
Vidimo da je masa kvadratno proporcionalna i a i b. Objasnite!

(iii) Podijelimo područje D vertikalnim pravcem (ili drukčije) na dva dijela jednakih masa.
a) Rješenje je pravac s jednadžbom $x = \frac{a}{2}$. Na slici 5. predočeno je to i neka druga rješenja.



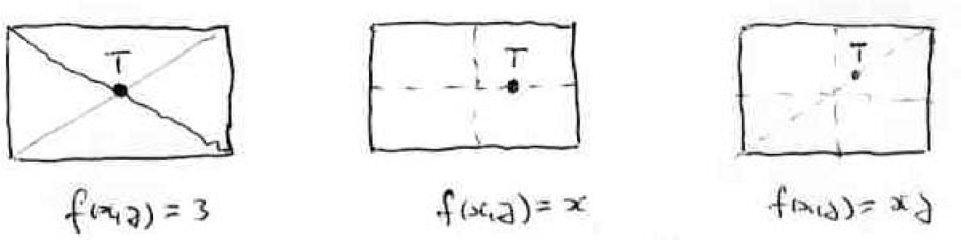
Sl. 5.

b) Treba biti:
$\int_0^c [\int_0^b xdy]dx = \frac{a^2b}{4}$, tj. $\frac{c^2b}{2} = \frac{a^2b}{4}$, tj. $c = \frac{a}{\sqrt{2}}$.
Na slici 6. je to i još jedno rješenje. Pokušajte naći još neko.
c) Treba biti:
$\int_0^c [\int_0^b xydy]dx = \frac{a^2b^2}{8}$, tj. $\frac{c^2b^2}{4} = \frac{a^2b^2}{8}$, tj. $c = \frac{a}{\sqrt{2}}$,
kao i u b). Komentirajte!



Sl.6.

(iv) Procijenimo položaj težišta područja D u odnosu na sjecište dijagonala.
a) Težište je u sjecištu dijagonala.
b) Težište je u točki $(c, \frac{b}{2})$ gdje je $c > \frac{a}{2}$.
c) Težište je u točki (c, d) gdje je $c > \frac{a}{2}$ i $d > \frac{b}{2}$ (sl.7.).



Sl. 7.

Težište ravne ploče - područja D u ravnini.
Na osnovi formule za težiste segmenta $[a,b]$ gustoće $f(x)$:

$$x_T = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$$

i definicije težista, dobijemo prvu i drugu koordinatu težista područja D gustoće $f(x,y)$:

$$x_T = \frac{\int_D xf(x,y)dxdy}{\int_D f(x,y)dxdy}$$

Kraće $x_T = \frac{\int_D xf(x,y)dxdy}{m}$.
Slično,

$$y_T = \frac{\int_D yf(x,y)dxdy}{\int_D f(x,y)dxdy}$$

tj. $y_T = \frac{\int_D yf(x,y)dxdy}{m}$.

Primjer 2. - primjena formule za x_T i y_T.
Odredimo koordinate težišta područja iz Primjera 1.

a) $x_T = \frac{\int_D xf(x,y)dxdy}{m} = \frac{\int_0^a[\int_0^b x\cdot 3\cdot dy]dx}{3ab} = \frac{3\frac{a^2b}{2}}{3ab} = \frac{a}{2}$.

Slično se dobije $y_T = \frac{b}{2}$, kako smo i predvidjeli u Primjeru 1.(iv).

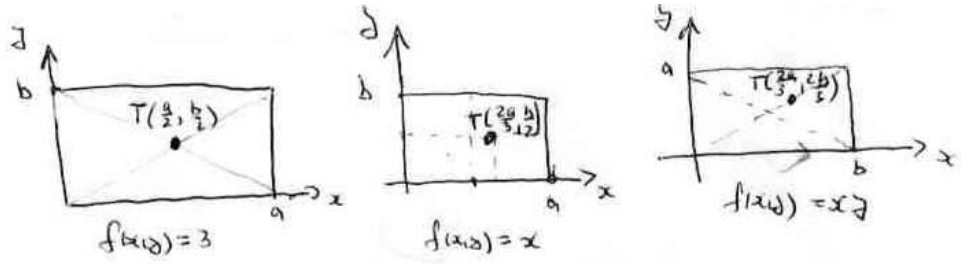
b) $x_T = \frac{\int_D xf(x,y)dxdy}{m} = \frac{\int_0^a[\int_0^b x\cdot x\cdot dy]dx}{\frac{a^2b}{2}} = \frac{\int_0^a[x^2y|_{y=0}^{y=b}]dx}{\frac{a^2b}{2}} = \frac{\int_0^a bx^2dx}{\frac{a^2b}{2}} = \frac{\frac{a^3b}{3}}{\frac{a^2b}{2}} = \frac{2a}{3}$.

$y_T = \frac{\int_D yf(x,y)dxdy}{m} = \frac{\int_0^a[\int_0^b x\cdot y\cdot dy]dx}{\frac{a^2b}{2}} = \frac{\int_0^a[\frac{xy^2}{2}|_{y=0}^{y=b}]dx}{\frac{a^2b}{2}} = \frac{\int_0^a \frac{b^2x}{2}}{\frac{a^2b}{2}} = \frac{\frac{b^2a^2}{2}}{\frac{a^2b}{2}} = \frac{b}{2}$

c) $x_T = \frac{\int_D xf(x,y)dxdy}{m} = \frac{\int_0^a[\int_0^b x\cdot xy\cdot dy]dx}{\frac{a^2b^2}{4}} = \frac{\int_0^a[x^2\frac{y^2}{2}|_{y=0}^{y=b}]dx}{\frac{a^2b^2}{4}} = \frac{\int_0^a \frac{b^2}{2}x^2dx}{\frac{a^2b^2}{4}} = \frac{\frac{a^3b^2}{6}}{\frac{a^2b^2}{4}} = \frac{2a}{3}$.

$y_T = \frac{\int_D yf(x,y)dxdy}{m} = \frac{\int_0^a[\int_0^b y\cdot xy\cdot dy]dx}{\frac{a^2b^2}{4}} = \frac{\int_0^a[x\frac{y^3}{3}|_{y=0}^{y=b}]dx}{\frac{a^2b^2}{4}} = \frac{\int_0^a \frac{b^3}{3}xdx}{\frac{a^2b^2}{4}} = \frac{\frac{a^2b^3}{6}}{\frac{a^2b^2}{4}} = \frac{2b}{3}$.

Rezultati su predočeni na sl. 8. Prokomentirajte te rezultate.



Sl. 8.

Primjer 3 - primjer gustoće pri kojoj je masa ravnine konačna. Neka je masa razmazana po cijeloj ravnini prema pravilu za gustoću $f(x,y) := e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$. Odredimo masu.

Koristit ćemo se polarnim koordinatama:
$m = \int\int_{\mathbf{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy =$

$\int_0^{2\pi}[\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} rdr]d\phi,$

što, nakon zamjene $t = \frac{r^2}{2}$, $dt = rdr$, postaje:

$m = \int_0^{2\pi}[\int_0^{\infty} e^{-t}dt]d\phi = \int_0^{2\pi}[(-e^{-t})\ |_0^{\infty}]d\phi = \int_0^{2\pi} 1 \cdot d\phi = 2\pi.$

Lekcije iz Matematike 2.

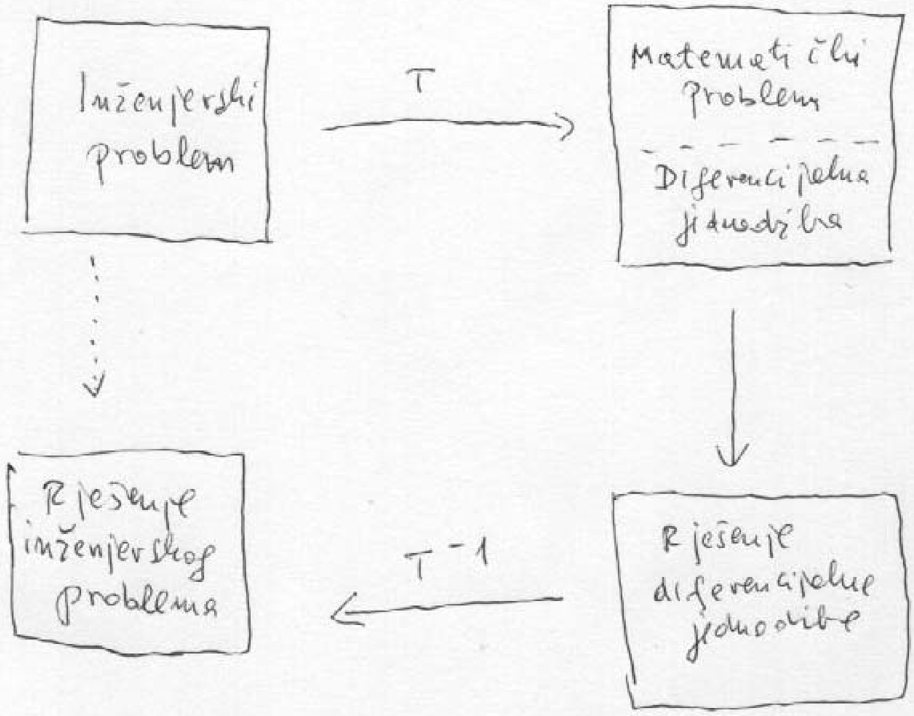
12. Obične diferencijalne jednadžbe 1.reda.

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se sustavno rjeŽavaju obične linearne diferencijalne jednadžbe 1. reda i komentira njihova uloga u primjenama. Posebno se podsijeća na diferencijalne jednadžbe koje smo obradjivali u 2. lekciji, koje su poseban slučaj ovih jednadžba:
1. jednadžbu radioaktivnog raspada.
2. jednadžbu hladjenja (odnosno zagrijavanja) tijela.
Pojam $diferencijalna$ naznačuje da je riječ o jednadžbi u kojoj se pojavljuje derivacija, pojam *obična* da je derivacija funkcije jedne varijable (za razliku od parecijalne), a $1.reda$ da se ne pojavljuju druge derivacije niti derivacije višeg reda.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Ako imamo dvije zavisne varijable, recimo x, y, onda je temeljni problem odredjivanje analitičke veze medju njima. U prirodnim znanostima i u inženjerstvu, tom se problemu pristupa eksperimentalno. Često se iz eksperimentalnih podataka ne može naslutiti izravna veza medju tim veličinama, ali se može naslutiti veza izmedju x, y i y' gdje je y' brzina promjene veličine y s obzirom na promjenu veličine x, dakle $y' := \frac{dy}{dx}$. Na primjer, kao smo već vidjeli u 2. lekciji, eksperimentalno se dade naslutiti veza
$y' = -ky$,
gdje je t vrijeme, y količina radioaktivne materije (na primjer $(C-14)$) i $y' := \frac{dy}{dt}$ (tu je, umjesto x varijabla t).
Vidjeli smo kako se iz diferencijalne jednadžbe može odrediti količina radioaktivne materije $y(t)$ za svaki t (uz uvjet da znamo početnu količinu $y(0)$ i koeficijent k koji je karakteristika materije). Općenito, sve se odvija prema shemi iz sl.1.



Sl. 1.

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati pojam derivacije prvog reda i pojam neodredjenog integrala. Takodjer je potrebno poznavati fizikalnu interpretaciju prve derivacije kao brzine. Dakle, ako su dvije veličine x, y povezane relacijom $y = f(x)$, onda se brzina promjene veličine y s obzirom na promjenu veličine x opisuje derivacijom $f'(x)$ funkcije f po x, tj. s $\frac{df}{dx}$; što se se zapisuje kratko i kao y', odnosno $\frac{dy}{dx}$. Kraće:
Brzina $v(x)$ od y (s obzirom na x) $:= y'(x) = \frac{dy}{dx}$
(tu su navedene različite oznake).
Za razumijevanje te fizikalne interpretacije treba poznavati činjenicu da je $\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Pojam obične diferencijalne jednadžbe 1. reda.
Pojam smo djelomično upoznali u 2. lekciji. Polazi se od dviju zavisnih veličina x, y i brzine od y s obzirom na x, tj. $y' := \frac{dy}{dx}$.
Umjesto x, y često se koriste oznake $t, y, y' := \frac{dy}{dt}$, ako gledamo promjenu veličine y u vremenu t (takodjer $t, x, x' := \frac{dx}{dt}$ i sl.).
Obična diferencijalna jednadžba 1.reda je analitička veza izmedju x, y i y'.

Primjer 1. - nekoliko običnih diferencijalnih jednadžba 1.reda.
(i) $y' = -ky$
(ii) $y' = -k(y - g(x))$
(iii) $g(y)y' = -k\sqrt{y}$
(iv) $\frac{dy}{dt} = ky(M - y)$
(v) $y' - 3(x^2 + 1)y = e^x$.
(vi) $y'^2 y - x \sin y + e^{y'} = 0$.
(vii) $2yy' = 1$.
Napomenimo da je (i), ako je parametar k pozitivan, diferencijalna jednadžba raspada (ali i genetske mutacije), (ii) je tipa diferencijalne jednadžbe hladjenja, (iii) je tipa diferencijalne jednadžbe istjecanja tekućine, (iv) prirodnog rasta, a (v), (vi) i (vii) nemaju neko jasno fizikalno značenje.
Uočimo da se y' pojavljuje u svim jednadžbama, dok se y i x (odnosno t), ne moraju pojaviti.

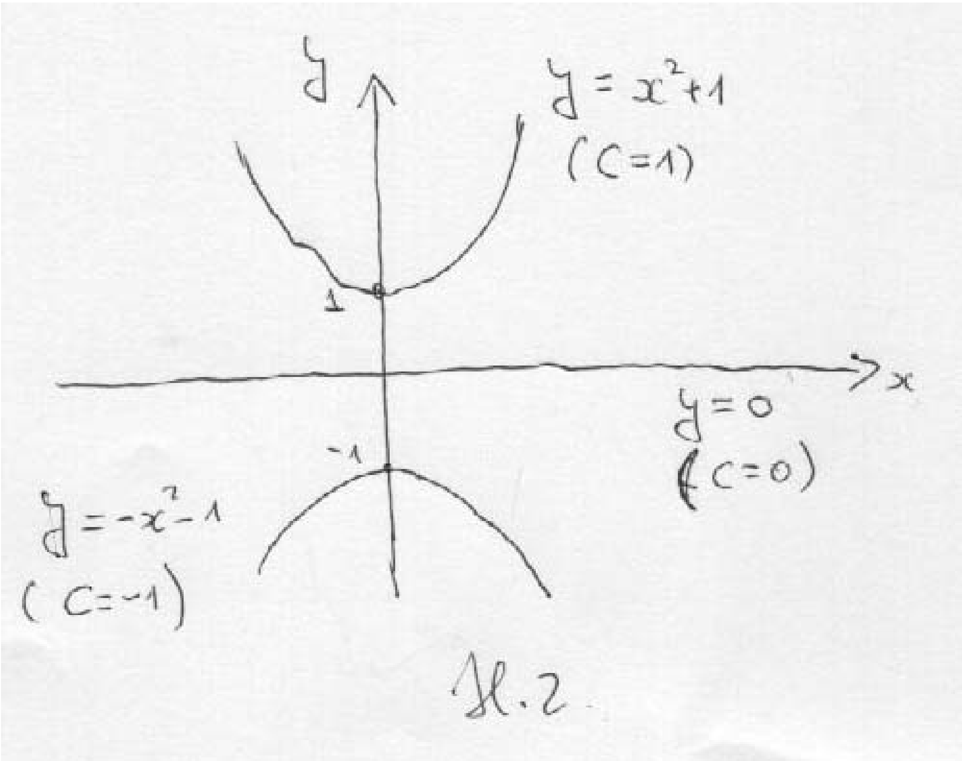
Riješiti diferencijalnu jednadžbu 1.reda znači iz jednadžbe eliminirati derivaciju y' tako da ostanu samo x i y (što nam i treba jer tražimo vezu izmedju njih).

Primjer 2. Riješimo diferencijalnu jednadžbu $(x^2 + 1)y' - 2xy = 0$.
Rješenje provodimo tzv. metodom **separacije varijabla**, tj. odijelimo y i x.

1.korak. Uvodimo oznaku $y = \frac{dy}{dx}$:
$(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$.
2. korak. y stavljamo na lijevu stranu, a x na desnu.
$\frac{dy}{y} = \frac{2x}{x^2+1}dx$
3. korak. Integriramo posebno lijevu, a posebno desnu stranu:
$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x}{x^2+1}dx$
$\ln|y| = \ln(x^2 + 1) + \ln C,\ C > 0$ (tu smo konstantu ovako zapisali, jer će nam tako konačni zapis biti skladniji).
Time je derivacija eliminirana i ovo možemo smatrati rješenjem, ali poželjno je rješenje pojednostavniti.
4. korak. Sredjivanje.
$\ln|y| = \ln[C(x^2 + 1)],\ C > 0$
$|y| = C(x^2 + 1),\ C > 0$
$y = \pm C(x^2 + 1),\ C > 0$
$y = C(x^2 + 1),\ C \in \mathbf{R}$ (tu smo $\pm C$ zamijenili s C, s tim da je sad C bilo koji realan broj; posebno smo uvrstili i $C = 0$ jer je $y = 0$ rješenje početne jednadžbe).
Rješenje

$$y = C(x^2 + 1),\ C \in \mathbf{R}$$

zovemo **općim rješenjem** jer se u njemu pojavljuje neodredjena konstanta C.
Partikularno rješenje je svako konkretno rješenje, tj rješenje u kojemu je specificirano C. Na primjer,
$y = 0$, $y = x^2 + 1$ i $y = -x^2 - 1$ su partikularna rješenja (dobiju se, redom, za $C = 0$, $C = 1$, $C = -1$) (sl.2.).



Cauchyev problem prvog reda. To je sustav diferencijalne jednadžbe prvog reda i početnog uvjeta, tj. vrijednosti veličine y za $x = 0$ ili za neku drugu konkretnu vrijednost veličine x:
$y(x_0) = y_0$.
Cauchyev problem ima **jedinstveno** rješenje. Naime, iz početnog uvjeta možemo odrediti konstantu C. To ćemo ilustrirati primjerom povezanim s predhodnim.

Primjer 3. Riješimo Cauchyev problem:
$(x^2 + 1)y' - 2xy = 0$.
$y(0) = 2$.
Vidjeli smo da je opće rješenje $y = C(x^2 + 1)$, $C \in \mathbf{R}$. Uvrštavajući početni uvjet, dobijemo:
$2 = C(0^2 + 1)$, dakle $C = 2$, pa je konačno rješenje $y = 2x^2 + 2$.

Obična linearna diferencijalna jednadžba 1. reda je takva jednadžba u kojoj se y' i y pojavljuju kao **linearne** funkcije odvojeno jedna od druge. Na primjer, u 2. su primjeru (i), (ii), (iv) i (v) linearne, (iii) nije jer se pojavljuje $\sqrt{y}$, a (vi) nije iz više razloga (pojavljuje se $\sin y$, ali i $e^{y'}$ te y'^2).
Jednadžba (vii) nije linearna iako se, naizgled y, y' javljaju kao linearne. Naime, kad se razdvoje, dobije se $y' = \frac{1}{2y}$. Jednadžba u 2. primjeru je linearna. Dakle, pojam **linearan** odnosi se na y i y', ali ne na x.
Općenito, linearna diferencijalna jednadžba 1. reda može se zapisati kao:

$$y' - h(x)y = g(x)$$

gdje su h i g realne funkcije. Ako je g nula funkcija dobije se homogena linearna diferencijalna jednadžba 1. reda:

$$y' - h(x)y = 0$$

Na primjer, jednadžba iz 2. primjera je homogena. Ona se može napisati u ekvivalentnom obliku:
$y' - \frac{2x}{x^2+1}y = 0$, pa je tu $h(x) := \frac{2x}{x^2+1}$.
Kako smo nju riješili (metodom separacije) tako možemo i bilo koju homogenu:
$\frac{dy}{y} = h(x)dx$
$y = Ce^{H(x)},\ C \in R$,
gdje je H neka primitivna funkcija funkcije h, tj. $H' = h$.

Rješenje nehomogene linearna diferencijalna jednadžba 1. reda $y' - h(x)y = g(x)$.
1. korak. Riješi se pripadna homogena jednadžba: $y' - h(x)y = 0$. Dobije se $y = Ce^{H(x)},\ C \in R$.
2. korak. Rješenje nehomogene se traži u obliku $y = C(x)e^{H(x)}$, dakle da se u rješenju homogene umjesto konstante c uvrsti funkcija $C(x)$.
Daljnji postupak objašnjavamo primjerom.

Primjer 4. Riješimo diferencijalnu jednadžbu $(x^2+1)y' - 2xy = 2x(x^2+1)^2$.
Jednadžba se može zapisati kao:
$y' - \frac{2x}{x^2+1}y = 2x(x^2+1)$
1.korak Pripadna je homogena jednadžba $y' - \frac{2x}{x^2+1}y = 0$, što je samo drukčije zapisana jednadžba iz 2. primjera. Zato joj je rješenje:
$y = C(x^2+1),\ C \in \mathbf{R}$.
2. korak. Rješenje nehomogene tražimo u obliku $y = C(x)(x^2+1)$.
Deriviranjem dobijemo: $y' = C'(x)(x^2+1) + 2xC(x)$.
Uvrštavanjem tih dviju relacija u nehomogenu jednadžbu dobijemo:
$C'(x)(x^2+1) + 2xC(x) - \frac{2x}{x^2+1} \cdot C(x)(x^2+1) = 2x(x^2+1)$, tj. $C'(x)(x^2+1) = 2x(x^2+1)$, tj. $C'(x) = 2x$, tj. $C(x) = x^2 + K,\ K \in \mathbf{R}$.
Uvrštavajući u $y = C(x)(x^2+1)$, dobijemo konačno rješenje:
$y = (x^2+K)(x^2+1),\ K \in \mathbf{R}$.
Izravna provjera pokazuje da je to zaista rješenje.

Lekcije iz Matematike 2.

13. Obične diferencijalne jednadžbe 2.reda.

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se sustavno rješavaju obične linearne diferencijalne jednadžbe 2. reda s konstantnim koeficijentima i komentira njihova uloga u primjenama. Posebno se podsijeća na diferencijalne jednadžbe gibanja po pravcu pri djelovanju stalne sile (vertikalni hitac) i titranja (gibanje po pravcu uz djelovanje sile usmjerene prema ishodištu i po intezitetu proporcionalne udaljenosti od ishodiŽta). Pojam 2.*reda* odnosi se na to da se pojavljuju druge derivacije, ali ne derivacije 3. ili višeg reda.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Ako imamo dvije zavisne varijable, recimo x, y, onda je temeljni problem odredjivanje analitičke veze medju njima. U prirodnim znanostima i u inženjerstvu, tom se problemu pristupa eksperimentalno. Često se iz eksperimentalnih podataka ne može naslutiti izravna veza medju tim veličinama, ali se može naslutiti veza izmedju x, y, y' i y'' gdje je y' brzina promjene veličine y s obzirom na promjenu veličine x, dakle $y' := \frac{dy}{dx}$, a y'' akceleracija te promjene, , dakle $y'' := \frac{d^2y}{dx^2}$. Ako razmatramo vremenski proces onda obično imamo varijable t (za vrijeme) i y ili x (za položaj, količinu i sl.). Tada je $y' := \frac{dy}{dt}$ itd.

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati pojam derivacije prvog i drugog reda i pojam neodredjenog integrala. Takodjer je potrebno poznavati fizikalnu interpretaciju prve derivacije kao brzine i druge derivacije kao akceleracije te vezu sile i akceleracije. Dakle, ako su dvije veličine x, y povezane relacijom $y = f(x)$, onda se brzina promjene veličine y s obzirom na promjenu veličine x opisuje derivacijom $f'(x)$ funkcije f po x, tj. s $\frac{df}{dx}$; što se zapisuje kratko i kao y', odnosno $\frac{dy}{dx}$, dok se akceleracija (ubrzanje) te promjene opisuje drugom derivacijom $f''(x)$ funkcije f po x, tj. s $\frac{d^2f}{dx^2}$; što se se zapisuje kratko i kao y'', odnosno $\frac{d^2y}{dx^2}$. Dalje, sila je proporcionalna akceleraciji (keoficijent proporcionalnosti je masa).

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

Pojam obične diferencijalne jednadžbe 2. reda.
Pojam smo djelomično upoznali u 2. lekciji. Polazi se od dviju zavisnih veličina

x, y brzine od y s obzirom na x, tj. $y' := \frac{dy}{dx}$ te akceleracije od y s obzirom na x, tj. $y'' := \frac{d^2y}{dx^2}$.
Umjesto x, y često se, pri vremenskim procesima, koriste oznake t, y, y', y'', gdje je $y' := \frac{dy}{dt}$ i $y'' := \frac{d^2y}{dt^2}$. (takodjer t, x, x', x'' i sl.).
Obična diferencijalna jednadžba 2.reda je analitička veza izmedju x, y, y' i y''.

Primjer 1. - nekoliko običnih diferencijalnih jednadžba 2.reda.
(i) $y'' = a$
(ii) $y'' + \omega^2 y = 0$
(iii) $y'' + py' + qy = 0$
(iv) $y'' + py' + qy = g(x)$
(v) $y'' - 3(x^2 + 1)y' + xy = e^x$.
(vi) $y''^2 y - x \sin y + e^{y'} = 0$.
(vii) $2yy'' = 1$.
Napomenimo da je (i) diferencijalna jednadžba gibanja po pravcu pri djelovanju stalne sile, (ii) titranja, (iii) i (iv) su opća homogena odnosno nehomogena linearna diferencijalna jednadžba 2.reda s konstantnim koeficijentima (i mnoge od njih imaju jasna fizikalna značenja), a (v), (vi) i (vii) nemaju jasna fizikalna značenja. Uočite da se u jednadžbama ne mora pojaviti ni x ni y ni y', ali y'' mora.

Riješiti diferencijalnu jednadžbu 2.reda znači iz jednadžbe eliminirati derivacije y' i y'' tako da ostanu samo x i y (što nam i treba jer tražimo vezu izmedju njih).

Primjer 2. Riješimo diferencijalnu jednadžbu $y'' = a$.
Rješenje provodimo uzastopnim integriranjem, tj. da najprije odredimo y' potom y. Neka je varijabla po kojoj se derivira t.

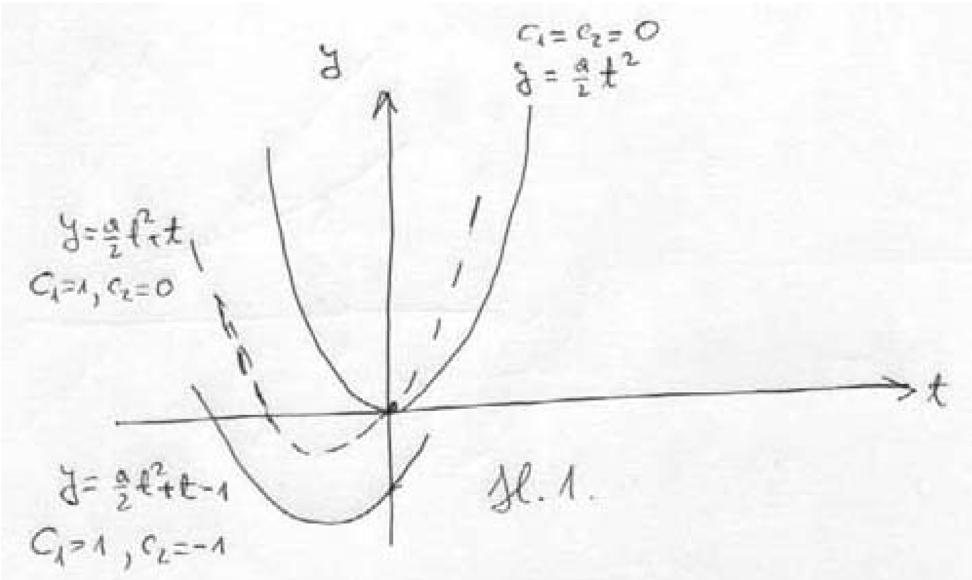
1.korak. Integriranjem jednadžbe $y'' = a$ dobijemo $y' = at + C_1$, za neodredjenu realnu konstantu C_1.
2. korak. Integriranjem jednadžbe $y' = at + C_1$ dobijemo

$$y = \frac{a}{2}t^2 + C_1 t + C_2$$

za neodredjenu realnu konstantu C_2. To je opće rjeŽenje početne diferencijalne jednadžbe.

Uočimo dvije neodredjene konstante C_1, C_2 u općem rješenju, koje možemo birati po volji. Tako je općenito za rješenje svake obične diferencijalne jednadžbe 2. reda (za one 1. reda je jedna konstanta, trećeg reda tri konstante itd.).

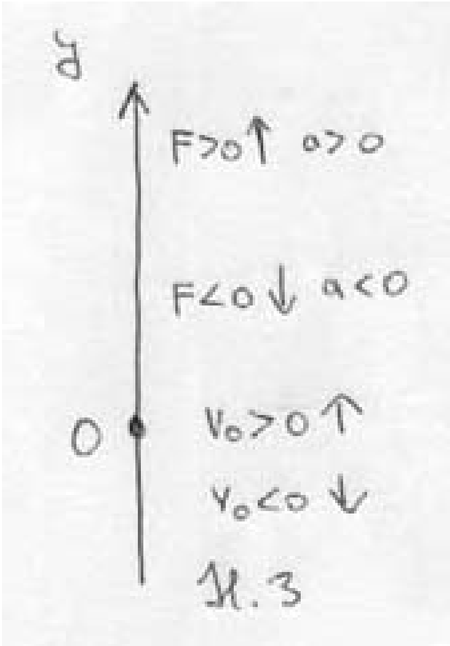
Partikularno rješenje je svako konkretno rješenje, tj rješenje u kojemu je specificirano C. Na primjer,
$y = \frac{a}{2}t^2$, $y = \frac{a}{2}t^2 + t$, $y = \frac{a}{2}t^2 + t - 1$ su partikularna rješenja (dobiju se, redom, za $C_1 = C_2 = 0$, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $C_1 = 1$, $C_2 = -1$) (sl.1.).



Cauchyev problem drugog reda. To je sustav diferencijalne jednadžbe drugog reda i dvaju početnih uvjeta, tj. vrijednosti veličina y i y' za $x = 0$ ili za neku drugu konkretnu vrijednost veličine x, dakle:
$y(x_0) = y_0$.
$y'(x_0) = v_0$.
Cauchyev problem ima **jedinstveno** rješenje. Naime, iz početnih uvjeta možemo odrediti konstante C_1, C_2. To ćemo ilustrirati primjerom povezanim s predhodnim.

Primjer 3. Riješimo Cauchyev problem:
$y'' = a$.
$y(0) = y_0$.
$y'(0) = v_0$.
Vidjeli smo da je opće rješenje $y = \frac{a}{2}t^2 + C_1 t + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.
Zato je $y' = at + C_1$.
Uvrštavajući početni uvjet $y(0) = y_0$ u izraz za y, dobijemo:
$y_0 = \frac{a}{2} \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2$, dakle $C_2 = y_0$.
Uvrštavajući početni uvjet $y'(0) = v_0$ u izraz za y', dobijemo:
$v_0 = a \cdot 0 + C_1$, dakle $C_1 = v_0$,
pa je konačno rješenje (za y i za y')
$y = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + y_0$
$y' = at + v_0$.
Rješenje je predočeno slikom 2.

Fizikalna interpretacija Cauchyeva problema iz 3. primjera - gibanje po pravcu pri djelovanje stalne sile.
Na sl.3. je predočena y-os (pravac s uvedenim koordinatnim sustavom, s koordinatom y).



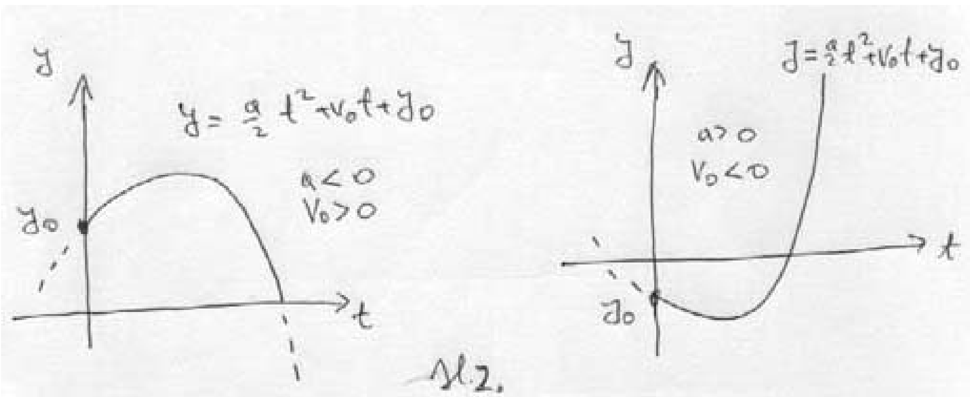
Uzduž pravca djeluje stalna sila koja uzrokuje stalnu akceleraciju a. Napomenimo da, za $a > 0$ sila djeluje u pozitivnom smjeru (prema gore), a za $a < 0$ u negativnom smjeru (prema dolje), dok za $a = 0$ nema sile, pa je eventualno gibanje jednoliko (sa stalnom brzinom). Jednadžba:

$$y'' = a$$

je upravo diferencijalna jednadžba gibanja po pravcu uz djelovanje stalne sile. Iz nje ne možemo u potpunosti rekonstruirati gibanje (tj. položaj u svakom trenutku i brzinu u svakom trenutku). Medjutim to možemo iz početnih uvjeta. Naime (sl.4. i sl.2.):

$y(0) = y_0$ znači da se čestica koja se giba, u trenutku $t = 0$ nalazi u točki s koordinatom y_0.

$y'(0) = v_0$ znači da čestica koja se giba, u trenutku $t = 0$ ima brzinu v_0.



Općenito navedeni Cauchyev problem opisuje gibanje čestice po pravcu pod djelovanjem stalne sile s akceleracijom a, pri čemu čestica ima **početni položaj** y_0 i **početnu brzinu** v_0.
Napomenimo da smo u 2. lekciji obradili ovaj primjer za $a := -g$, što je matematički model za vertikalni hitac, tj. za gibanje u polju sile teže, uz zanemarivanje otpora zraka i pretpostavke o stalnosti gravitacije (u blizini površine zemlje). Tu je y_0 visina na kojoj se čestica nalazi u početku, a v_0 brzina kojom smo tu česticu izbacili u vis ili prema dolje.

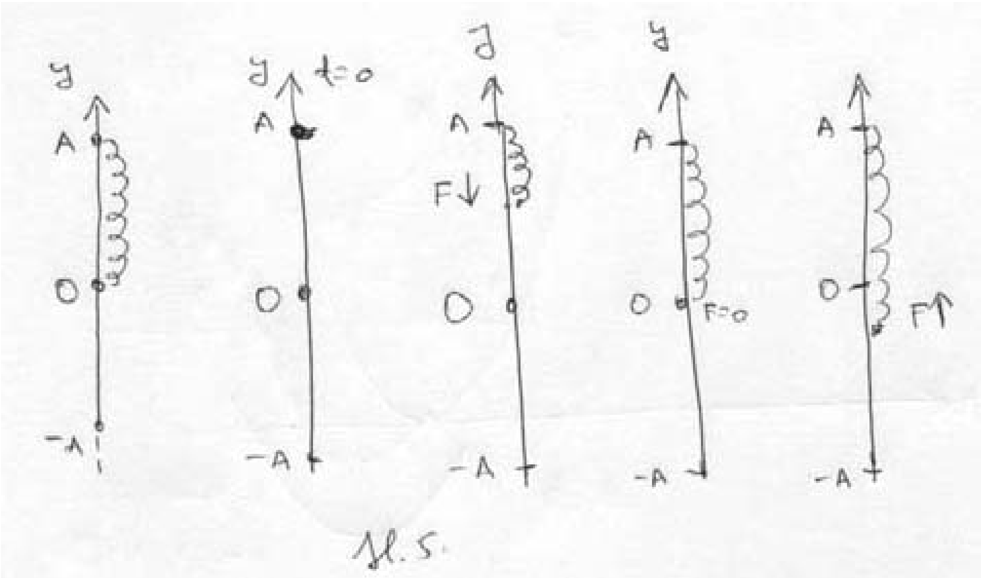
Obična linearna diferencijalna jednadžba 2. reda s konstantnim koeficijentima jednadžba oblika

$$y'' + py' + qy = g(x)$$

gdje su p, q realni brojevi, a g funkcija. Ako je $g = 0$, jednadžba se zove **homogenom**, inače je **nehomogena**.

Na primjer, u 1. je primjeru:
(iv) takva nehomogena jednadžba,
u (iii) nehomogena,
(i) je, za $a \neq 0$ nehomogena (uz $p = q = 0$ i $g(x) = a$ za sve x),
(ii) je homogena uz $p = 0$ i $q = \omega^2$,
(v) je linearna, ali nije s konstantnim koeficijentima, a (vi) i (vii) nisu linearne.
Općenito ovakve diferencijalne jednadžbe fizikalno opisuju tzv. **prigušeni harmonijski oscilator**, što tu nećemo detaljno obrazlagati već dati tipičan primjer.

Primjer 4 - titranje na pravcu (sl.5.).



Cauchyev problem:
$y'' + \omega^2 y = 0$
$y(0) = A$, za pozitivnu konstantu A
$y'(0) = 0$
opisuje titranje po y osi izmedju točaka A i $-A$ (tj. s **amplitudom** A) **perioda** $\frac{2\pi}{\omega}$ tj. **frekvencije** $\frac{\omega}{2\pi}$). Zamišljamo da smo vrlo elastičnu oprugu stiskli u točku A, a onda je u $t = 0$ pustili da titra, te gledamo položaj $y(t)$ vrha opruge u vremenu t.
Vidjet ćemo da je rješenje problema $y = A\cos(\omega t)$.

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y'' + py' + qy = 0$.

1.korak - postavljanje i rješavanje karakteristične jednadžbe $r^2 + pr + q = 0$.
Na primjer, ako je $y'' - 7y' + 10y = 0$, onda je karakteristična jednadžba $r^2 - 7r + 10 = 0$, rješenja su $r_1 = 2$, $r_2 = 5$.

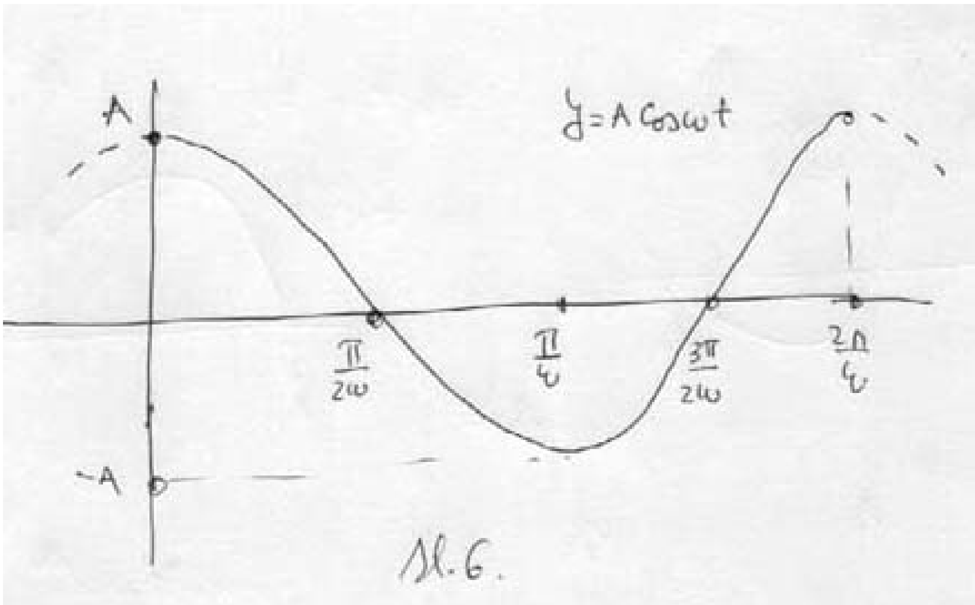
2.korak - ispisivanje općeg rješenja
$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$.
U spomenutom je primjeru, dakle $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}$.

Primjer 5. - slučaj dvostrukog rješenja.
Ako je $r_1 = r_2 = r$, onda je opće rješenje $y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$.
Tako je za $y'' - 4y' + 4y = 0$, $r_1 = r_2 = 2$, pa je opće rješenje $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$.

Primjer 6. - slučaj kompleksno-konjugiranih rješenja.
Ako je $r = \alpha \pm \beta i$, onda je opće rješenje
$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)$.

Tako je za $y'' - 4y' + 7y = 0$, karakteristična jednadžba:
$r^2 - 4r + 7 = 0$, s rješenjima $r = 2 \pm \sqrt{3}i$, pa je opće rješenje:
$y = e^{2x}(C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \sin(\sqrt{3}x)$.

Primjer 7. - rješenje problema titranja.
$y'' + \omega^2 y = 0$
$r^2 + \omega^2 = 0$, tj. $r = \pm\omega i$, pa je $\alpha = 0$ i $\beta = \omega$. Zato je opće rješenje:
$y = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$,
$y' = -\omega C_1 \sin(\omega t) + \omega C_2 \cos(\omega t)$.
Uvrštavanjem početnog uvjeta $y(0) = A$ u izraz za y, dobijemo:
$A = C_1 \cos(\omega \cdot 0) + C_2 \sin(\omega \cdot 0)$, tj. $A = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0$, tj. $A = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0$, tj. $C_1 = A$.
Slično, uvrštavanjem početnog uvjeta $y'(0) = 0$ u izraz za y', dobijemo:
$0 = -\omega C_1 \cdot 0 + \omega C_2 \cdot 1$, tj. $C_2 = 0$. Dakle, konačno je rješenje:
$y = A\cos(\omega t)$ (sl.6.).



Sl.6.