LEKCIJE IZ MATEMATIKE 2

Ivica Gusić

Lekcija 1

Neodređeni integral i metode računanja

Lekcije iz Matematike 2.

1. Neodredjeni integral i metode računanja.

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se razmatra nedredjeni integral funkcije - pojam koji je inverzan pojmu derivacije funkcije. Naziv dolazi od toga što neodredjeni integral funkcije nije jedna funkcija (dakle nije jednoznačno odredjen), već skup funkcija - medjusobno povezanih.
Takodjer, navodi se tablica integrala nekih važnih elementarnih funkcija i objašnjavaju osnovne metode odredjivanja integrala.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

U matematici samoj, napose pri matematičkoj obradi inženjerskih problema, jedan od najvažnijih pojmova jest pojam inverzne operacije: oduzimanje je inverzno zbrajanju (i zasniva se na pojmu suprotnih brojeva, napose negativnih koji su suprotni pozitivnim), slično je s množenjem i dijeljenjem, s pojmom funkcije i njoj inverzne funkcije; ako matricu shvatimo kao preslikavanje prostora, onda se inverzno preslikavanje ostvaruje preko inverzne matrice itd.
Pojam neodredjenog integrala (ili, jednostavno, integrala) inverzan je, na neki način, pojmu derivacije. Deriviranje se može shvatiti kao operacija koja svakoj funkciji pridružuje derivaciju funkcije; integriranje je inverzna operacija.

III. Potrebno predznanje

Potrebno je poznavati:
1. Pojam derivacije funkcije i osnovna svojstva derivacije (kao operacije).
2. Osnovne elementarne funkcije (potencije i korijene, eksponencijalne i logaritamske, trigonometrijske i arkus funkcije), naročito tablicu derivacija tih funkcija.
3. Oznaku $\frac{df(x)}{dx}$ za derivacuju funkcije f; dakle

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

što je **diferencijalni** zapis derivacije funkcije, kao omjer **diferencijala funkcije** $df(x)$ (tradicionalno - beskonačno malog prirasta funkcije) i **diferencijala argumenta** dx (beskonačno malog prirasta argumenta), koje se zasniva na relaciji:

$$f'(x) \approx \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Derivacija kao omjer diferencijala često se piše kao

$$df(x) = f'(x)dx$$

i ta jednakost ima precizno matematičko značenje koje tu ne tumačimo.

IV. Nove definicije i tvrdnje s primjerima

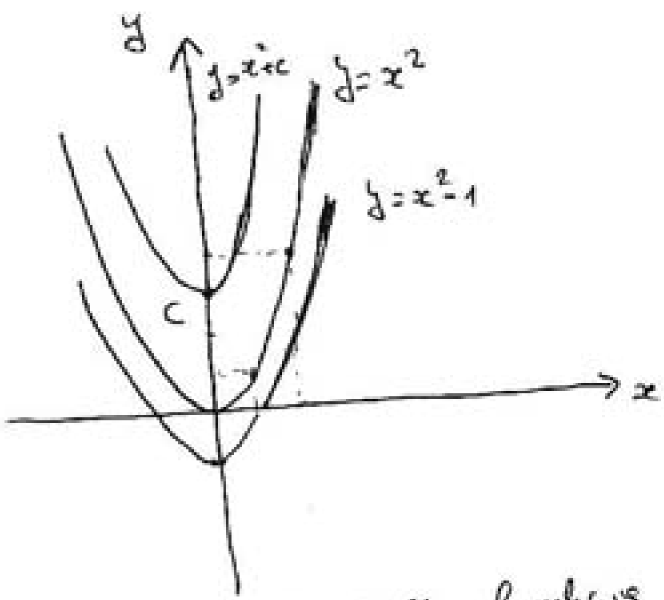
Definicija neodredjenog integrala funkcije

Razmotrimo sljedeći problem:
Treba odrediti funkciju F tako da bude $F'(x) = 2x$

Problem ćemo riješiti **pogadjanjem** koje se temelji na znanju derivacija potencija, odnosno na činjenici da je $(x^2)' = 2x$ i na činjenici da se dodavanjem konstante derivacija ne mijenja:

$$(x^2)' = (x^2+1)' = (x^2-3)' = ... = 2x$$

općenito, $(x^2 + C)' = 2x$ za svaku konstantu C (sl.1.).



Sl.1. Skup primitivnih funkcija funkcije $2x$; krivulje $y = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$

Matematički se ovaj problem i njegovo rješenje zapisuje kao

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

Kažemo da je **skup funkcija** $x^2 + C$ neodredjeni integral funkcije $2x$.

Općenito,činjenicu $F'(x) = f(x)$ zapisujemo kao:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

(čitamo: *integral ef od iks de iks je veliko ef od iks*). Oznaka dx ima i strogo matematičko značenje, ulogu te oznake upoznat ćemo poslije.
Izraz $F(x)+C$ znači skup funkcija $\{F(x)+C\}$, medjutim, zbog jednostavnosti, vitičaste zagrade izostavljamo.
Kažemo da je **skup funkcija** $F(x) + C$ neodredjeni integral funkcije f.
Takodjer, kažemo da je svaka od gornjih funkcija $F(x)+C$ **primitivna funkcija funkcije** f.

Uočimo da deriviranje i integriranje nisu **bukvalno** inverzne operacije, već da se mogu shvatiti kao takve. Naime:
Ako podjemo od funkcije f pa integriramo, dobit čemo skup funkcija $\{F(x) + C\} = \int f(x)dx$, pa ako bilo koju od tih funkcija deriviramo, vratit ćemo se u f (jer je $(F(x) + C)' = f(x)$); kraće:

$$(\int f(x)dx)' = f(x)$$

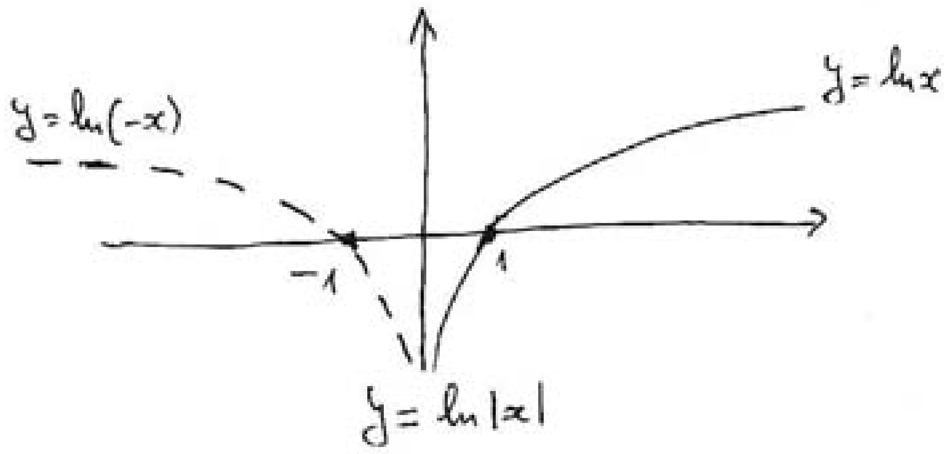
Medjutim, ako podjemo od funkcije F pa je najprije deriviramo, potom rezultat integriramo, dobit ćemo skup funkcija $\{F(x) + C\}$ (medju kojima je i funkcija F, koju dobijemo za $C = 0$):

$$\int F'(x)dx = \{F(x) + C\}$$

Primjer 1. Kako je $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, vidimo da je $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$ i to vrijedi za $x > 0$.
Takodjer, kako je $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$, vidimo da je $\int \frac{1}{x}dx = \ln(-x) + C$ i to vrijedi za $x < 0$.
Ove dvije derivacije mogu se zapisati kao $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ (sl.2). Zato se ova dva integrala mogu napisati kao jedan:

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln |x| + C$$

(smisao je da bilo koju konstantu možemo dodati za $x > 0$ i bilo koju za $x < 0$).



Sl. 2. Graf funkcije $f(x) := \ln|x|$

Tablica značajnih integrala - treba znati napamet

Tablica integrala zasniva se na tablici derivacija i na definiciji neodredjenog integrala:
$\int f(x)dx = F(x) + C$ znači da je $F' = f$

1. (i) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ jer je $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$
- to vrijedi za sve realne eksponente, osim $n = -1$ a ne samo za prirodne.

(ii) $\int x^{-1}dx = \ln|x| + C$, tj. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ jer je $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

2. (i) $\int \cos x dx = sinx + C$ jer je $(\sin x)' = \cos x$
(ii) $\int \sin x dx = -cosx + C$ jer je$(\cos x)' = -\sin x$
(iii) $\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = tgx + C$ jer je $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
(iv) $\int \frac{1}{\sin^2(x)}dx = -ctgx + C$ jer je $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

3. (i) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = Arcsinx + C$ jer je $(Arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(ii) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = Arctgx + C$ jer je $(Arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

4. (i) $\int e^x = e^x + C$ jer je $(e^x)' = e^x$
(ii) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ jer je $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

5. (i) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$ jer je $(\ln(x + \sqrt{x^2+1}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
(ii) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C$ jer je $(\ln(x + \sqrt{x^2-1}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Napomene o oznakama:
1. Umjesto $\int 1 \cdot dx$ obično se piše $\int dx$, dakle $\int dx = x + C$ jer je $(x)' = 1$.

2. Katkad se, radi jednostavnosti, oznaka dx stavlja u brojnik. Na primjer $\int \frac{1}{1+x^2}dx$ piše kao $\int \frac{dx}{1+x^2}$, $\int \frac{1}{x}dx$ kao $\int \frac{dx}{x}$ itd.

Svojstva neodredjenog integrala

Opća je činjenica da su svojstva operacije analogna svojstvima njima inverznih operacija i da se jedna izvode iz drugih. Tako je i s derivacijom i integralom (bar djelomično, jer oni nisu bukvalno inverzni). Neka od svojstava smo prešutno iskoristili kod izrade tablice integrala.

1.(i) **Integral zbroja je zbroj integrala**: $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x) + \int g(x)$,
jer je $(f + g)' = f' + g'$
(ii) **Integral razlike je razlika integrala**:$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x) - \int g(x)$,
jer je $(f - g)' = f' - g'$

2. **Konstanta koja množi može se izvući ispred integrala** $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$,
jer je $(\lambda f)' = \lambda(f)'$.

Postoje i svojstva integrala analogna formulama za derivaciju umnoška funkcija i formuli za derivaciju složene funkcije, ali to ćemo obraditi kao metode računanja integrala.

Primjer 2. - primjena formula 1. i 2.
$\int (3\cos x + \frac{2}{x} - 5x^3 + 4)dx = 3\int \cos x dx + 2\int \frac{dx}{x} - 5\int x^3 + 4\int dx = 3\sin x + 2\ln|x| - 5\frac{x^4}{4} - 4x + C$

Tu smo za sve integrale, na kraju dodali jednu konstantu C.

Nastavak svojstava neodredjenog integrala - metoda parcijalne integracije
Iz formule za derivaciju umnoška funkcija:

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

malim razmještanjem i integriranjem dobijemo

$$\int f(x)g'(x)dx = \int [f(x)g(x)]'dx - \int g(x)f'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

Ako uvrstimo: $dg(x) = g'(x)dx$, odnosno, $df(x) = f'(x)dx$ i ako, poštujući tradiciju, pišemo v umjesto g i u umjesto f i ako ne stavljamo argument x onda se to može, kraće (i malo nekorektno - ali lakše se pamti) zapisati kao:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Ta se formula zove formula za parcijalno integriranje.

Primjer 3. - primjena formule parcijalne integracije.
Treba izračunati $\int x\cos x dx$. Tu možemo staviti:

$u = x,\ du = dx$
$dv = \cos x dx,\ v = \sin x$
pa je, prema formuli parcijalne integracije:
$\int x \cos x dx = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \sin x - (-\cos x) + C = x \sin x + \cos x + C$
Provjera:
$(x \sin x + \cos x + C)' = 1 \cdot \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$.

Nastavak svojstava neodredjenog integrala - zamjena (supstitucija) varijable u neodredjeni integral.

Iz formule za derivaciju složene funkcije

$$[F(g(t)]' = F'[g(t)]g'(t)$$

uvrštavanjem $f := F'$, $g(t) = x$ i integriranjem, dobijemo:
$\int f[g(t)]g'(t)dt = \int [F(g(t)]'dt = F(g(t)) + C = F(x) + C = \int f(x)dx$
tj.

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)]g'(t)dt$$

gdje je $x = g(t)$. To je **supstitucija u neodredjeni integral**. Tu formulu koristimo na dva načina.
Prvi je da polazimo od desne strane, pa ako znademo izračunati lijevu, onda znademo i desnu.
Drugi je da polazimo od lijeve i ako znademo izračunati desnu, onda ćemo znati i lijevu, uz uvjet da g ima inverznu funkciju, tj. da je $t = g^{-1}(x)$. Neki samo ovu primjenu zovu supstitucija, mi ćemo tako zvati i prvu i drugu.

Primjer 4. - primjena formule za supstituciju varijable u neodredjeni integral
(i) Treba izračunati $\int \cos(2x)dx$. Tu je:
$2x = t$;
$2dx = dt$ pa je,
$\int \cos(2x)dx = \int \cos t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int \cos t dt = \frac{\sin t}{2} + C = \frac{\sin(2x)}{2} + C$
Provjera: $(\frac{\sin(2x)}{2})' = \frac{2\cos(2x)}{2} = \cos(2x)$

(ii) $\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2+1}} = [x^2 + 1 = t,\ 2xdx = dt]$
$= \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}} = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{x^2+1} + C$
što se lako provjeri.
Primjer 5. - računanje integrala ako je brojnik derivacija nazivnika)
$\int \frac{g'(x)}{g(x)} = [g(x) = t;\ g'(x)dx = dt]$
$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|f(x)| + C$
To se lako provjeri i izravnim deriviranjem.
Na primjer:
(i) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln(x^2+1) + C$
jer je brojnik derivacija nazivnika (naime $(x^2+1)' = 2x$) i $x^2 + 1 > 0$ za sve x, pa ne treba apsolutna vrijednost).
(ii) $\int ctgx dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} = \ln|\sin x| + C$.

Primjer 6. - kombinacija parcijalne integracije i supstutucije
$\int Arcsinxdx = [u = Arcsinx,\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};\ dv = dx,\ v = x] =$
$Arcsinx \cdot x - \int x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [1 - x^2 = t;\ -2xdx = dt] =$
$xArcsinx - \int \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dt}{-2} =$
$xArcsinx + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t} + C = xArcsinx + \sqrt{1 - x^2} + C.$

U ovim smo primjerima stalno imali prvu primjenu formule za supstituciju, tj. stavljali smo $t = h(x)$ i nigdje nam nije trebala inverzna funkcija . U sljedećem ćemo primjeru imati *pravu* supstituciju tj. zamjenu $x = g(t)$ i tu će nam trebati $t = g^{-1}(x)$.

Primjer 7. Izračunajmo $\sqrt{1 - x^2}dx$.
Koristimo zamjenu: $x = \sin t$, $dx = \cos tdt$ za $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$; $t = Arcsinx$.
Dobijemo:
$\sqrt{1 - x^2}dx = \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos tdt = \int \sqrt{\cos^2 t}\cos tdt = \int \cos^2 tdt$ (jer je u ovim uvjetima $\cos t \geq 0$)
Sad iskoristimo relaciju:

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

pa dobijemo:
$\int \sqrt{1 - x^2}dx = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}dt + C = \frac{Arcsinx}{2} + \frac{2\sin(Arcsinx)\cos(Arcsinx)}{4} +$
$C = \frac{Arcsinx}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C.$
Naime, $\cos(Arcsinx) = \sqrt{1 - \sin^2(Arcsinx)} = \sqrt{1 - x^2}$.
Dakle $\int \sqrt{1 - x^2}dx = \frac{Arcsinx}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$, što je lako provjeriti.

V. Pitanja i zadaci
1. Izračunajte:
(i) $\int xe^{-x}dx$
(ii) $\int xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$
(iii) $\int x^2e^xdx$
(iv) $\int x\sin xdx$
(v) $\int \ln xdx$
(vi) $\int Arctgxdx$
(uputa: parcijalna integracija, jednom ili više puta)
2. Neka je $a > 0$. Izračunajte
(i) $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$
(ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$
(iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$
(iv) $\int \sqrt{a^2 - x^2}$
Posebno izračunajte za $a = \sqrt{2}$
(uputa: zamjena varijable: $ax = t$ i tablica integrala).
3. Izračunajte:
(i) $\int \frac{2x-1}{x^2+1}dx$
(ii) $\int tgxdx$
(ii) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

(uputa: brojnik derivacija nazivnika ili rastavljanje razlomka).