Dvostruki integral

Matematika 2

Erna Begović Kovač

http://matematika.fkit.hr

Uvod

- Općenito, višestruki (n-terostruki) integral je integral funkcije više (n) varijabli.
- Dvostruki integral je integral funkcije dvije varijable.

  Oznaka:

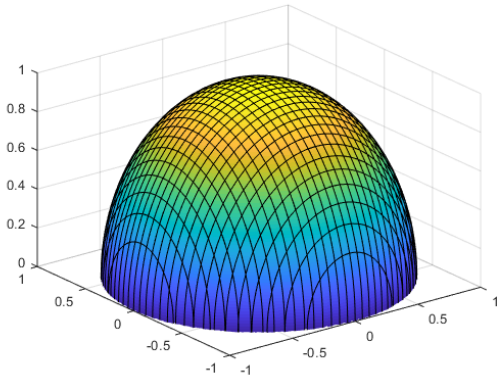
$$\int \int f(x, y) dx\, dy$$

Dvostruki integral pozitivne funkcije

- Dvostruki integral pozitivne funkcije $f(x, y)$ predstavlja **volumen između grafa funkcije f i xy-ravnine.**

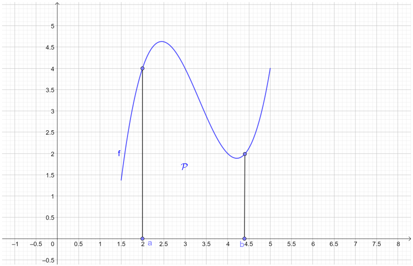
Dvostruki integral pozitivne funkcije

- Dvostruki integral pozitivne funkcije $f(x, y)$ predstavlja **volumen između grafa funkcije f i xy-ravnine.**
- Npr. polukugla polumjera r može se shvatiti kao dio prostora između plohe zadane funkcijom $f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ i xy-ravnine.



Računanje dvostrukog integrala

Prisjetimo se određenog integrala pozitivne funkcije jedne varijable $f(x)$. On predstavlja površinu ispod grafa (krivulje).



Dio te površine računamo kao

$$\triangle P(x) \approx f(x)\triangle x,$$

tj.

$$dP(x) = f(x)dx.$$

Računanje dvostrukog integrala

Kod funkcije dvije varijable $f(x, y)$ dio volumena ispod grafa (plohe) definiramo kao volumen iznad pravokutnika sa stranicama $\triangle x$ i $\triangle y$.

Računanje dvostrukog integrala

Kod funkcije dvije varijable $f(x, y)$ dio volumena ispod grafa (plohe) definiramo kao volumen iznad pravokutnika sa stranicama $\triangle x$ i $\triangle y$.

Površina takvog pravokutnika je $\triangle x \cdot \triangle y$ pa je volumen iznad njega približno jednak volumenu kvadra

$$\triangle V(x, y) \approx f(x, y)\triangle x \, \triangle y,$$

tj.

$$dV(x, y) = f(x, y) dx \, dy.$$

Računanje dvostrukog integrala

Stoga je

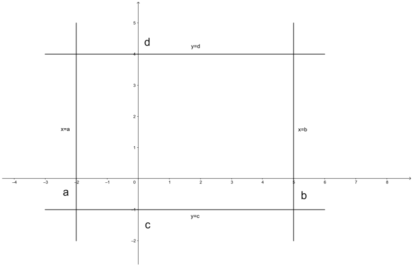
$$V = \int\int_D f(x, y) dx\, dy,$$

gdje je D područje po kojem integriramo.

D možemo shvatiti kao zbroj beskonačno mnogo malih pravokutnika sa stranicama $\triangle x$ i $\triangle y$.

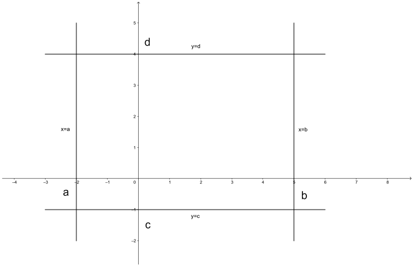
Područje integracije

Najjednostavniji primjer za područje integracije je pravokutnik određen sa $a \leq x \leq b$ i $c \leq y \leq d$.



Područje integracije

Najjednostavniji primjer za područje integracije je pravokutnik određen sa $a \leq x \leq b$ i $c \leq y \leq d$.



Tada dvostruki integral funkcije $f(x, y)$ po D možemo zapisati kao

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)dx \Big) dy$$
$$= \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

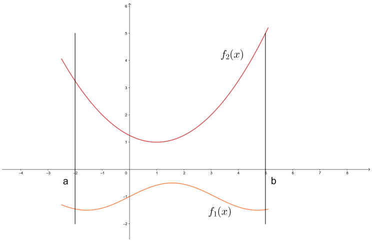
Područje integracije

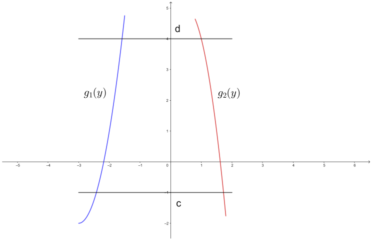
U općenitijem slučaju dvostruki integral možemo zapisati kao

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy$$

ili

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx.$$





Metoda računanja

Za računanje dvostrukog integrala koristimo **metodu uzastopnog integriranja**.

Dvostruki integral zapišemo kao dva uzastopna jednostruka integrala

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy.$$

Metoda računanja

Prvo rješavamo unutarnji integral,

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy.$$

To je integral po varijabli y pa pri rješavanju x smatramo konstantom.

Metoda računanja

Prvo rješavamo unutarnji integral,

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy.$$

To je integral po varijabli y pa pri rješavanju x smatramo konstantom.

Rješenje ovog integrala je funkcija $h(x)$ koja ovisi samo o x,

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy = h(x).$$

Metoda računanja

Uvrštavanjem rješenja za integral po y natrag u polazni integral

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy,$$

dobijemo

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b h(x)dx,$$

što je jednostruki integral po x.

Njegovo rješenje (i ujedno rješenje dvostrukog integrala) je broj.

Primjer 1

Odredite granice integracije u integralu

$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

ako je D područje omeđeno parabolom $y = 2x^2$ i pravcem $y = 8$.
Riješite taj integral za $f(x,y) = 2x + y$.

Primjer 1

Odredite granice integracije u integralu

$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

ako je D područje omeđeno parabolom $y = 2x^2$ i pravcem $y = 8$. Riješite taj integral za $f(x,y) = 2x + y$.

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_{-2}^{2} dx \int_{2x^2}^{8} f(x,y)dy$$

Primjer 1

$$
\begin{aligned}
&\int_{-2}^{2} dx \int_{2x^2}^{8} (2x+y)\,dy \\
&= \int_{-2}^{2} dx \left(2xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{2x^2}^{8} \\
&= \int_{-2}^{2} dx \left(2x\cdot 8 + \frac{8^2}{2} - \left(2x\cdot 2x^2 + \frac{(2x^2)^2}{2}\right)\right) \\
&= \int_{-2}^{2} (-2x^4 - 4x^3 + 16x + 32)\,dx \\
&= \left(-2\frac{x^5}{5} - 4\frac{x^4}{4} + 16\frac{x^2}{2} + 32x\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{512}{5}
\end{aligned}
$$

Metoda računanja

Integral može biti zadan i u obrnutom poretku

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx.$$

Tada prvo rješavamo integral po x, a potom integral po y.

Primjer 2

Riješite integral

$$\int_0^1 dy \int_{-y}^{2y} xy^2 dx$$

i skicirajte područje integracije.

Primjer 2

Riješite integral

$$\int_0^1 dy \int_{-y}^{2y} xy^2 dx$$

i skicirajte područje integracije.

$$= \int_0^1 dy\left(\frac{x^2}{2}y^2\right)\Big|_{-y}^{2y}$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{(2y)^2}{2}y^2 - \frac{(-y)^2}{2}y^2\right)dy$$

$$= \int_0^1 \frac{3}{2}y^4 dy = \frac{3}{2}\frac{y^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{3}{10}$$

Primjer 3 - Poredak integracije

Promijenite poredak integracije u integralima

(i) $\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^{3x} f(x,y)dy,$

(ii) $\displaystyle\int_{-1}^1 dy \int_{y^2}^1 f(x,y)dx,$

(iii) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{x^2-1}^{1-x} f(x,y)dy.$

Riješite integral pod (i) u oba poretka ako je $f(x,y) = 3x + y$.

Primjer 3

(i) $\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^{3x} f(x,y)dy = \int_0^6 dy \int_{\frac{y}{3}}^2 f(x,y)dx,$

Primjer 3

(i) $$\int_0^2 dx \int_0^{3x} f(x,y)dy = \int_0^6 dy \int_{\frac{y}{3}}^2 f(x,y)dx,$$

(ii) $$\int_{-1}^1 dy \int_{y^2}^1 f(x,y)dx = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy,$$

Primjer 3

(i) $$\int_0^2 dx \int_0^{3x} f(x,y)dy = \int_0^6 dy \int_{\frac{y}{3}}^2 f(x,y)dx,$$

(ii) $$\int_{-1}^1 dy \int_{y^2}^1 f(x,y)dx = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy,$$

(iii) $$\int_0^1 dx \int_{x^2-1}^{1-x} f(x,y)dy =$$
$$\int_{-1}^0 dy \int_0^{\sqrt{y+1}} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x,y)dx.$$

Primjer 3

(i)

$$f(x,y) = 3x + y$$

$$\int_0^2 dx \int_0^{3x} (3x + y) dy = \int_0^2 dx (3xy + \frac{y^2}{2})\Big|_0^{3x}$$
$$= \int_0^2 (\frac{27}{2} x^2) dx = \frac{9}{2} x^3 \Big|_0^2 = 36$$

Primjer 3

(i)

$$f(x,y) = 3x + y$$

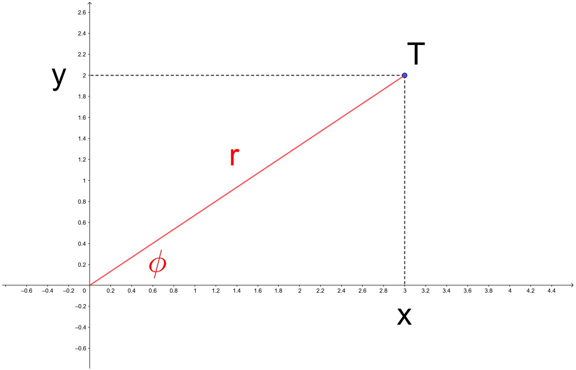
$$\int_0^2 dx \int_0^{3x} (3x+y)dy = \int_0^2 dx(3xy + \frac{y^2}{2})\Big|_0^{3x}$$
$$= \int_0^2 (\frac{27}{2}x^2)dx = \frac{9}{2}x^3\Big|_0^2 = 36$$

$$\int_0^6 dy \int_{\frac{y}{3}}^2 (3x+y)dx = \int_0^6 dy(3\frac{x^2}{2} + xy)\Big|_{\frac{y}{3}}^2$$
$$= \int_0^6 (6 + 2y - (\frac{y^2}{6} + \frac{y^2}{3}))dy = \int_0^6 (6 + 2y - \frac{1}{2}y^2)dy$$
$$= (6y + y^2 - \frac{y^3}{6})\Big|_0^6 = 36$$

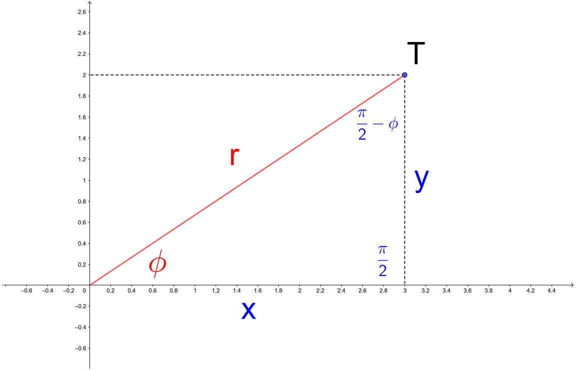
Dvostruki integral u polarnim koordinatama

- Kartezijeve (pravokutne) koordinate $T(x, y)$
- Polarne koordinate $T(r, \phi)$

Radi lakšeg računanja ponekad je područje integracije bolje prikazati u polarnim koordinatama.



Veza pravokutnih i polarnim koordinata



Iz sinusuovog poučka slijedi:

$$\frac{y}{\sin\phi} = \frac{r}{\sin(\frac{\pi}{2})} \quad \Rightarrow \quad y = r\sin\phi,$$

$$\frac{x}{\sin(\frac{\pi}{2}-\phi)} = \frac{r}{\sin(\frac{\pi}{2})} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{\cos\phi} = \frac{r}{\sin(\frac{\pi}{2})} \quad \Rightarrow \quad x = r\cos\phi.$$

Primjer 4

Neki primjeri zapisa u polarnim koordinatama

- Kružni isječak

$$\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2, \qquad 0 \leq r \leq R$$

Primjer 4

Neki primjeri zapisa u polarnim koordinatama

- Kružni isječak

$$\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2, \qquad 0 \leq r \leq R$$

- Dio kružnog isječka

$$\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2, \qquad r_1 \leq r \leq r_2$$

Primjer 4

Neki primjeri zapisa u polarnim koordinatama

- Kružni isječak

$$\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2, \qquad 0 \leq r \leq R$$

- Dio kružnog isječka

$$\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2, \qquad r_1 \leq r \leq r_2$$

- Krug sa središtem u ishodištu radijusa R

$$0 \leq \phi \leq 2\pi, \qquad 0 \leq r \leq R$$

Primjer 4

Neki primjeri zapisa u polarnim koordinatama

- Kružni isječak

$$\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2, \qquad 0 \leq r \leq R$$

- Dio kružnog isječka

$$\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2, \qquad r_1 \leq r \leq r_2$$

- Krug sa središtem u ishodištu radijusa R

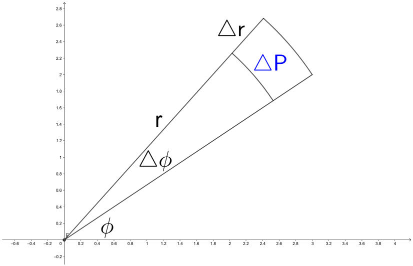
$$0 \leq \phi \leq 2\pi, \qquad 0 \leq r \leq R$$

- Prvi kvadrant

$$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leq r \leq \infty$$

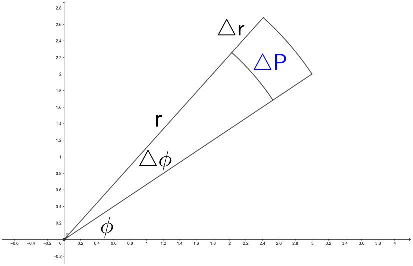
Računanje dvostrukog integrala u polarnim koordinatama

Dio područja po kojem intergiramo određen je dijelom kružnog isječka.



Računanje dvostrukog integrala u polarnim koordinatama

Dio područja po kojem intergiramo određen je dijelom kružnog isječka.



Općenito, površina kružnog isječka je $P = \frac{1}{2}r^2\phi$.

Računanje dvostrukog integrala u polarnim koordinatama

Mi imamo

$$\begin{aligned}\triangle P &= \frac{1}{2}(r+\triangle r)^2\triangle\phi - \frac{1}{2}r^2\triangle\phi \\ &= r\triangle r\triangle\phi + \frac{1}{2}(\triangle r)^2\triangle\phi \\ &\approx r\triangle r\triangle\phi.\end{aligned}$$

Računanje dvostrukog integrala u polarnim koordinatama

Mi imamo

$$\begin{aligned}\triangle P &= \frac{1}{2}(r+\triangle r)^2\triangle\phi - \frac{1}{2}r^2\triangle\phi\\ &= r\triangle r\triangle\phi + \frac{1}{2}(\triangle r)^2\triangle\phi\\ &\approx r\triangle r\triangle\phi.\end{aligned}$$

Onda je dio volumena $\triangle V$ iznad $\triangle P$ dan sa

$$\triangle V \approx f(x,y)\triangle P \approx f(r\cos\phi, r\sin\phi)r\,\triangle r\,\triangle\phi.$$

Računanje dvostrukog integrala u polarnim koordinatama

Mi imamo

$$\begin{aligned}\triangle P &= \frac{1}{2}(r+\triangle r)^2\triangle\phi - \frac{1}{2}r^2\triangle\phi \\ &= r\triangle r\triangle\phi + \frac{1}{2}(\triangle r)^2\triangle\phi \\ &\approx r\triangle r\triangle\phi.\end{aligned}$$

Onda je dio volumena $\triangle V$ iznad $\triangle P$ dan sa

$$\triangle V \approx f(x,y)\triangle P \approx f(r\cos\phi, r\sin\phi)r\,\triangle r\,\triangle\phi.$$

Iz toga dobijemo

$$dV = f(r\sin\phi, r\cos\phi)r\,dr\,d\phi,$$

$$V = \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_{r_1(\phi)}^{r_2(\phi)} f(r\cos\phi, r\sin\phi)r\,dr.$$

Primjer 5

Izračunajte

$$\int\int_D (x^2 + y^2) dxdy$$

ako je D krug sa središtem u ishodištu i radijusom 2.

Primjer 5

Izračunajte

$$\int\int_D (x^2 + y^2)dxdy$$

ako je D krug sa središtem u ishodištu i radijusom 2.

$$x^2 + y^2 = (r\cos\phi)^2 + (r\sin\phi)^2 = r^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = r^2$$

Primjer 5

Izračunajte
$$\int\int_D (x^2+y^2)dxdy$$
ako je D krug sa središtem u ishodištu i radijusom 2.

$$x^2+y^2=(r\cos\phi)^2+(r\sin\phi)^2=r^2(\cos^2\phi+\sin^2\phi)=r^2$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^2 r^2 r dr = \int_0^{2\pi} d\phi \frac{r^4}{4}\Big|_0^2 = \int_0^{2\pi} 4d\phi = 4\phi\Big|_0^{2\pi} = 8\pi$$

Zadatci

1. Izračunajte
$$\int\int_D (x+y)^2 dxdy$$
ako je D područje zadano sa $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 3$.

2. Zapišite
$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$$
u polarnim koordinatama.

3. Koristeći polarne koordinate izračunajte
$$\int\int_D dxdy$$
ako je D područje zadano sa $\frac{5\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{5\pi}{3}$, $1 \leq r \leq 4$.
Geometrijski predočite područje integracije.