Primjena dvostrukog integrala

Matematika 2

Erna Begović Kovač

http://matematika.fkit.hr

Uvod

Neke primjene dvostrukog integrala su:

- Računanje volumena,
- Računanje površine,
- Problem mase nehomogene ploče,
- Problem težišta nehomogene ploče.

Volumen

Ako je $f(x, y)$ pozitivna funkcija, onda

$$V = \int\int_D f(x, y) dx\, dy$$

predstavlja volumen tijela iznad područja D, omeđenog grafom funkcije f.

Volumen

Ako je $f(x, y)$ pozitivna funkcija, onda

$$V = \int\int_D f(x, y) dx\, dy$$

predstavlja volumen tijela iznad područja D, omeđenog grafom funkcije f.

Općenitije, ako je tijelo omeđeno plohama $z_1 = f(x, y)$ i $z_2 = g(x, y)$, pri čemu funkcije f i g imaju istu domenu D na kojoj vrijedi $g(x, y) \leq f(x, y)$, onda je volumen takvog tijela dan dvostrukim integralom

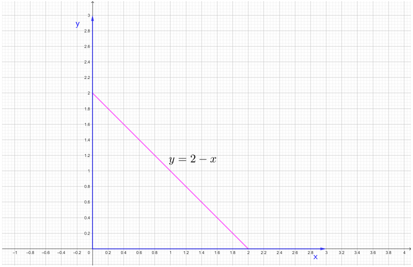
$$V = \int\int_D (f(x, y) - g(x, y)) dx\, dy.$$

Primjer 1

Izračunajte volumen tijela omeđenog ravninama $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y = 2 - x$ i plohom $z = x + y^2$.

Primjer 1

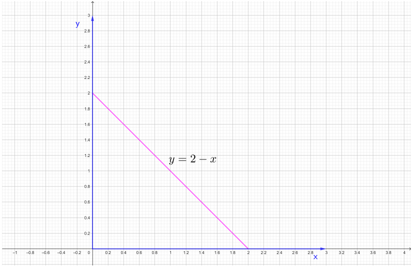
Izračunajte volumen tijela omeđenog ravninama $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y = 2 - x$ i plohom $z = x + y^2$.



$$f(x, y) = x + y^2$$

Primjer 1

Izračunajte volumen tijela omeđenog ravninama $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y = 2 - x$ i plohom $z = x + y^2$.



$$f(x, y) = x + y^2$$

$$V = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x + y^2) dy = \int_0^2 dx (xy + \frac{y^3}{3})\Big|_0^{2-x}$$

$$= \int_0^2 (x(2 - x) + \frac{(2-x)^3}{3}) dx = \int_0^2 (-\frac{x^3}{3} + x^2 - 2x + \frac{8}{3}) dx$$

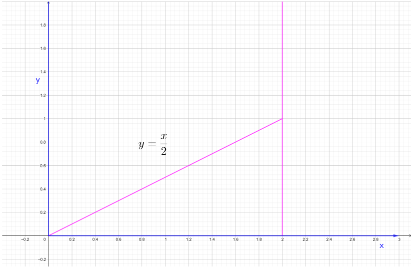
$$= \frac{8}{3}$$

Primjer 2

Izračunajte volumen tijela omeđenog ravninama $x = 2$, $y = 0$, $y = \frac{x}{2}$ i plohama $z = 2x^2$ i $z = -x^2$.

Primjer 2

Izračunajte volumen tijela omeđenog ravninama $x = 2$, $y = 0$, $y = \frac{x}{2}$ i plohama $z = 2x^2$ i $z = -x^2$.

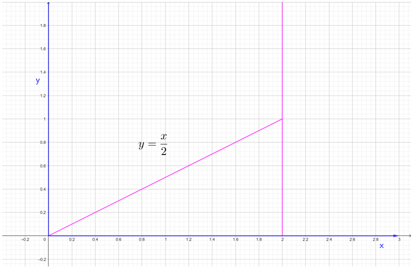


$$f(x, y) = 2x^2$$

$$g(x, y) = -x^2$$

Primjer 2

Izračunajte volumen tijela omeđenog ravninama $x = 2$, $y = 0$, $y = \frac{x}{2}$ i plohama $z = 2x^2$ i $z = -x^2$.



$$f(x, y) = 2x^2$$

$$g(x, y) = -x^2$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 dx \int_0^{\frac{x}{2}} (2x^2 - (-x^2))dy = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{x}{2}} 3x^2 dy \\ &= \int_0^2 dx 3x^2 y \Big|_0^{\frac{x}{2}} = \int_0^2 \frac{3}{2} x^3 dx \\ &= 6 \end{aligned}$$

Površina

U formuli za volumen $V = \int\int_D f(x,y)dx\,dy$, izraz $dx\,dy$ predstavlja element površine.

Ako stavimo $f(x,y) = 1$, dvostruki integral po D daje površinu područja D,

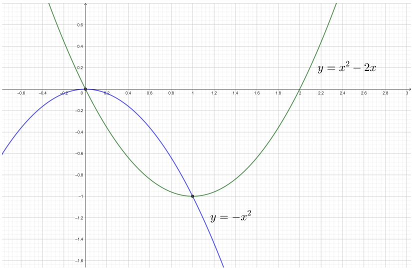
$$P = \int\int_D dx\,dy.$$

Primjer 3

Izračunajte površinu područja omeđenog parabolama $y = x^2 - 2x$ i $y = -x^2$.

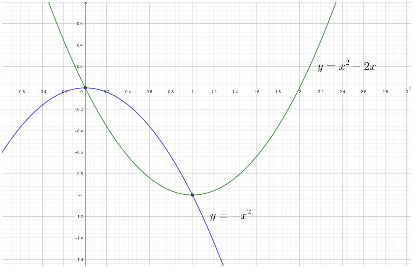
Primjer 3

Izračunajte površinu područja omeđenog parabolama $y = x^2 - 2x$ i $y = -x^2$.



Primjer 3

Izračunajte površinu područja omeđenog parabolama $y = x^2 - 2x$ i $y = -x^2$.



$$\begin{aligned}
P &= \int_0^1 dx \int_{x^2-2x}^{-x^2} dy \\
&= \int_0^1 dx y\Big|_{x^2-2x}^{-x^2} = \int_0^1 (-x^2 - (x^2 - 2x))dx \\
&= \int_0^1 (2x - 2x^2)dx = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Površina u polarnim koordinatama

Da bi dobili formulu za površinu u polarnim koordinatama, u formulu za volumen u polarnim koordinatama

$$V = \int\int_D f(r\cos\phi, r\sin\phi) r\, dr\, d\phi$$

uvrstimo $f(r\cos\phi, r\sin\phi) = 1$ pa je površina područja D dana formulom

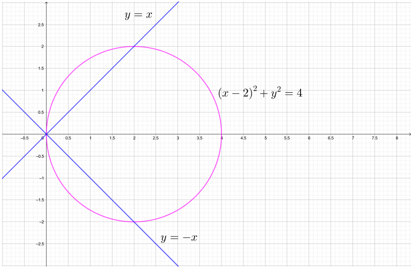
$$P = \int\int_D r\, dr\, d\phi.$$

Primjer 4

Izračunajte površinu područja omeđenog pravcima $y = x$, $y = -x$ i lukom kružnice $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

Primjer 4

Izračunajte površinu područja omeđenog pravcima $y = x$, $y = -x$ i lukom kružnice $(x-2)^2 + y^2 = 4$.



$$(x-2)^2 + y^2 = 4$$

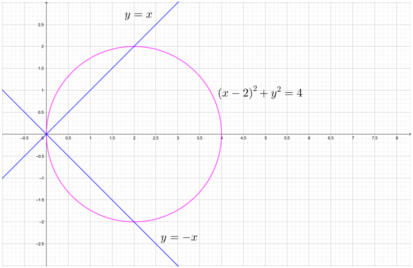
$$x^2 - 4x + y^2 = 0$$

$$r^2 = 4r\cos\phi$$

$$r = 4\cos\phi$$

Primjer 4

Izračunajte površinu područja omeđenog pravcima $y = x$, $y = -x$ i lukom kružnice $(x-2)^2 + y^2 = 4$.



$$(x-2)^2 + y^2 = 4$$

$$x^2 - 4x + y^2 = 0$$

$$r^2 = 4r\cos\phi$$

$$r = 4\cos\phi$$

$$\begin{aligned} P &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int_0^{4\cos\phi} r dr \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\phi \frac{r^2}{2}\Big|_0^{4\cos\phi} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 8\cos^2\phi d\phi \\ &= 8\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2\phi)}{2} d\phi = \cdots = 2\pi + 4 \end{aligned}$$

Masa nehomogene ploče

Promatramo područje D (ploču) u ravnini. Ako je masa ploče jednoliko razmazana, ploča je **homogena**, u protivnom je **nehomogena**.

U slučaju nehomogene ploče, masa ovisi o funkciji gustoće mase $f(x, y)$.

Masa nehomogene ploče

Promatramo područje D (ploču) u ravnini. Ako je masa ploče jednoliko razmazana, ploča je **homogena**, u protivnom je **nehomogena**.

U slučaju nehomogene ploče, masa ovisi o funkciji gustoće mase $f(x, y)$.

Uzmimo mali dio područja D, pravokutnik sa stranicama $\triangle x$ i $\triangle y$.

Masa takvog pravokutnika $\triangle m$ približno je jednaka

$$\triangle m \approx f(x, y) \triangle x \triangle y.$$

Masa nehomogene ploče

Stoga, imamo

$$\Rightarrow \qquad dm = f(x, y)dx\,dy,$$

pa je

$$m = \int\int_D f(x, y)dx\,dy.$$

Masa nehomogene ploče

Stoga, imamo

$$\Rightarrow \qquad dm = f(x,y)dx\,dy,$$

pa je

$$m = \int\int_D f(x,y)dx\,dy.$$

Ova je formula analogna formuli za masu nehomogenog segmenta

$$m = \int_a^b f(x)dx.$$

Primjer 5

Neka je D pravokutnik određen sa $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$. Neka je funkcija gustoće mase

$$(a)\ f(x,y) = 3, \qquad (b)\ f(x,y) = x, \qquad (c)\ f(x,y) = xy.$$

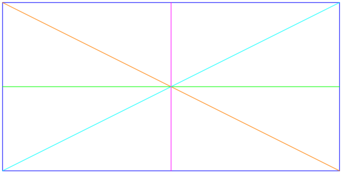
(i) Grafički predočite i interpretirajte raspored mase.

(ii) Izračunajte masu pravokutnika.

(iii) Podijelite pravokutnik na dva dijela jednakih masa.

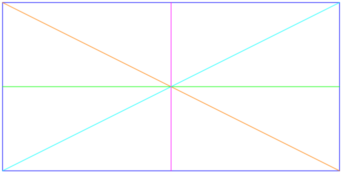
Primjer 5

(a) $m = \int_0^a dx \int_0^b 3dy = 3ab$

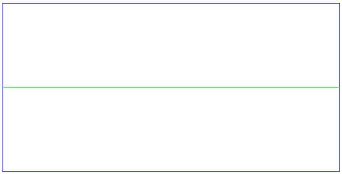


Primjer 5

(a) $m = \int_0^a dx \int_0^b 3dy = 3ab$



(b) $m = \int_0^a dx \int_0^b xdy = \dfrac{a^2 b}{2}$



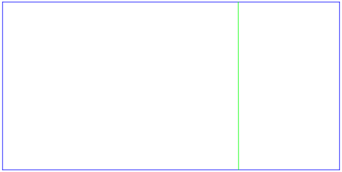
Primjer 5

(c)

$$m = \int_0^a dx \int_0^b xy dy = \int_0^a dx \left(x \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^b = \int_0^a \frac{b^2}{2} x dx = \frac{b^2}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^a = \frac{a^2 b^2}{4}$$

Primjer 5
(c)

$$m = \int_0^a dx \int_0^b xydy = \int_0^a dx(x\frac{y^2}{2})\Big|_0^b = \int_0^a \frac{b^2}{2}xdx = \frac{b^2}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^a = \frac{a^2b^2}{4}$$

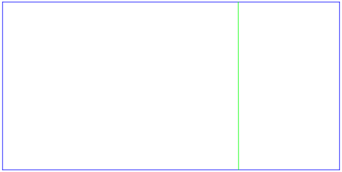


$$\int_0^{c} dx \int_0^b xydy = \frac{1}{2}m$$

Primjer 5

(c)

$$m = \int_0^a dx \int_0^b xy dy = \int_0^a dx (x\frac{y^2}{2})\Big|_0^b = \int_0^a \frac{b^2}{2} x dx = \frac{b^2}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^a = \frac{a^2 b^2}{4}$$



$$\int_0^{c} dx \int_0^b xy dy = \frac{1}{2} m$$

$$\frac{c^2 b^2}{4} = \frac{1}{2}\frac{a^2 b^2}{4}$$

$$c^2 = \frac{a^2}{2} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Težište nehomogene ploče

Analogno formuli za težište nehomogenog segmenta

$$x_T = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx},$$

imamo formule za x i y koordinatu težišta nehomogene ploče

$$x_T = \frac{\int\int_D xf(x,y)dx\,dy}{\int\int_D f(x,y)dx\,dy}, \quad y_T = \frac{\int\int_D yf(x,y)dx\,dy}{\int\int_D f(x,y)dx\,dy}.$$

Primjer 6

Odredite težište ploče pod (b) iz prethodnog primjera.

Primjer 6

Odredite težište ploče pod (b) iz prethodnog primjera.

$$f(x,y) = x$$

$$\int_0^a dx \int_0^b f(x,y)dy = m = \frac{a^2 b}{2}$$

$$\int_0^a dx \int_0^b xf(x,y)dy = \int_0^a dx \int_0^b x^2 dy = \int_0^a x^2 b dx = \frac{a^3 b}{3}$$
$$\int_0^a dx \int_0^b yf(x,y)dy = \int_0^a dx \int_0^b xydy = \int_0^a x\frac{b^2}{2}dx = \frac{a^2 b^2}{4}$$

Primjer 6

Odredite težište ploče pod (b) iz prethodnog primjera.

$$f(x,y) = x$$

$$\int_0^a dx \int_0^b f(x,y)dy = m = \frac{a^2 b}{2}$$

$$\int_0^a dx \int_0^b xf(x,y)dy = \int_0^a dx \int_0^b x^2 dy = \int_0^a x^2 b dx = \frac{a^3 b}{3}$$
$$\int_0^a dx \int_0^b yf(x,y)dy = \int_0^a dx \int_0^b xy dy = \int_0^a x\frac{b^2}{2} dx = \frac{a^2 b^2}{4}$$

$$x_T = \frac{\frac{a^3 b}{3}}{\frac{a^2 b}{2}} = \frac{2}{3}a, \quad y_T = \frac{\frac{a^2 b^2}{4}}{\frac{a^2 b}{2}} = \frac{1}{2}b$$

Primjer 7

Odredite masu čitave ravnine ako je funkcija gustoće mase dana sa

$$f(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Primjer 7

Odredite masu čitave ravnine ako je funkcija gustoće mase dana sa

$$f(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Preći ćemo na polarne koordinate

$$m = \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r\, dr$$

Primjer 7

Odredite masu čitave ravnine ako je funkcija gustoće mase dana sa

$$f(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Preći ćemo na polarne koordinate

$$m = \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\,r\,dr$$

$$= [t = -\frac{r^2}{2},\ dt = -rdr] = -\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{-\infty} e^t dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\phi (e^t)\Big|_0^{-\infty} = -\int_0^{2\pi} (0-1) d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

Zadatci

1. Izračunajte masu pravokutnika $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$ ako mu je funkcije gustoće mase dana sa $f(x, y) = (x + y)^2$.
2. Izračunajte masu i odredite težište pravokutnika $1 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 4$ ako mu je funkcije gustoće mase dana sa $f(x, y) = x + y$.
   Podijelite pravokutnik na dva dijela jednake mase.
3. Izračunajte masu kruga sa središtem u ishodištu i radijusom $r = 2$ ako mu je funkcije gustoće mase dana sa $f(x, y) = x^2$.
4. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $y = x^2 - 1$, $y = 1 - x^2$, $z = 0$ i $z = 2$.