Obične diferencijalne jednadžbe 2. reda

Matematika 2

Erna Begović Kovač

http://matematika.fkit.hr

Uvod

- Drugog reda $\rightarrow$ druga derivacija

Već smo se susreli običnom diferencijalnom jednadžbom drugog reda.

- Vertikalni hitac $y'' = -g$

Primjer 1

Riješite diferencijalnu jednadžbu $y'' = a$, pri čemu je $a \in \mathbb{R}$.

Primjer 1

Riješite diferencijalnu jednadžbu $y'' = a$, pri čemu je $a \in \mathbb{R}$.

Integriranjem dobijemo

$$y' = \int a dx = ax + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

Primjer 1

Riješite diferencijalnu jednadžbu $y'' = a$, pri čemu je $a \in \mathbb{R}$.

Integriranjem dobijemo

$$y' = \int a dx = ax + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

te još jednim integriranjem

$$y = \int (ax + C_1) dx = \frac{ax^2}{2} + C_1 x + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Opće i partikularno rješenje

- Opće rješenje ODJ 2. reda sadrži **dvije konstante**.
- Da bismo dobili partikularno rješenje, tj. jedinstveno rješenje koje ne ovisi o konstantama, potrebno je imati **dva početna uvjeta**.

Opće i partikularno rješenje

- Opće rješenje ODJ 2. reda sadrži **dvije konstante**.
- Da bismo dobili partikularno rješenje, tj. jedinstveno rješenje koje ne ovisi o konstantama, potrebno je imati **dva početna uvjeta**.
- **Cauchyjev problem drugog reda** je sustav ODJ drugog reda i uvjeta oblika

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ y'(x_0) &= v_0. \end{aligned}$$

Vertikalni hitac

Cauchyjev problem

$$y'' = -g, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0.$$

opisuje položaj tijela u verikalnom hitcu u trenutku t.

$y_0 \leftarrow$ početni položaj

$v_0 \leftarrow$ početna brzina

Vertikalni hitac

Cauchyjev problem

$$y'' = -g, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0.$$

opisuje položaj tijela u verikalnom hitcu u trenutku t.

$y_0 \leftarrow$ početni položaj

$v_0 \leftarrow$ početna brzina

$$\Rightarrow \quad y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + y_0$$

Obična diferencijalna jednadžba 2. reda s konstantnim koeficijentima

- Obična diferencijalna jednadžba 2. reda **s konstantnim koeficijentima** je jednadžba oblika

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

gdje su p i q realni brojevi.

Obična diferencijalna jednadžba 2. reda s konstantnim koeficijentima

- Obična diferencijalna jednadžba 2. reda **s konstantnim koeficijentima** je jednadžba oblika

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

gdje su p i q realni brojevi.

- Ako je $f(x) = 0$, jednadžba je **homogena**, a inače je **nehomogena**.

Homogena jednadžba

- Za jednadžbu $y'' + py' + qy = 0$ definiramo njenu **karakterističnu jednadžbu** tako što napravimo supstitucije

$$y'' \ \to \ \lambda^2, \quad y' \ \to \ \lambda, \quad y \ \to \ 1.$$

Dobijemo

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Homogena jednadžba

- Za jednadžbu $y'' + py' + qy = 0$ definiramo njenu **karakterističnu jednadžbu** tako što napravimo supstitucije

$$y'' \ \to \ \lambda^2, \quad y' \ \to \ \lambda, \quad y \ \to \ 1.$$

  Dobijemo

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Kvadratna jednadžba može imati

(i) dva različita realna rješenja λ_1, λ_2,

(ii) jedno dvostruko realno rješenje $\lambda_1 = \lambda_2$,

(iii) dva kompleksno konjugirana rješenja
$\lambda_1 = \alpha + \imath\beta, \ \lambda_2 = \alpha - \imath\beta$.

Homogena jednadžba

(i) Ako su $\lambda_1 \neq \lambda_2$ realna rješenja karakteristične jednadžbe, onda je rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Homogena jednadžba

(i) Ako su $\lambda_1 \neq \lambda_2$ realna rješenja karakteristične jednadžbe, onda je rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

(ii) Ako je $\lambda_1 = \lambda_2$ rješenje karakteristične jednadžbe, onda je rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x).$$

Homogena jednadžba

(i) Ako su $\lambda_1 \neq \lambda_2$ realna rješenja karakteristične jednadžbe, onda je rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

(ii) Ako je $\lambda_1 = \lambda_2$ rješenje karakteristične jednadžbe, onda je rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x).$$

(iii) Ako su $\lambda_1 = \alpha + \imath\beta,\ \lambda_2 = \alpha - \imath\beta$ rješenje karakteristične jednadžbe, onda je rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)).$$

Primjer 2

Riješite jednadžbu $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Primjer 2

Riješite jednadžbu $y'' - 4y' + 4y = 0$.

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \quad \Rightarrow \quad y = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$$

Primjer 2

Riješite jednadžbu $y'' - 4y' + 4y = 0$.

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \quad \Rightarrow \quad y = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$$

Primjer 3

Riješite jednadžbu $y'' - 4y' + 7y = 0$.

Primjer 2

Riješite jednadžbu $y'' - 4y' + 4y = 0$.

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \quad \Rightarrow \quad y = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$$

Primjer 3

Riješite jednadžbu $y'' - 4y' + 7y = 0$.

$$\lambda^2 - 4\lambda + 7 = 0$$

$$\lambda_1 = 2 + \imath\sqrt{3},\ \lambda_2 = 2 - \imath\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad y = e^{2x}(C_1 \cos(x\sqrt{3}) + C_2 \sin(x\sqrt{3}))$$

Cauchyjev problem titranja

Cauchyjev problem

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = A, \quad y'(0) = 0,$$

opisuje problem titranja opruge po pravcu u trenutku t.

$$\begin{aligned} A > 0 &\leftarrow \text{amplituda (opruga titra između } -A \text{ i } A) \\ \frac{\omega}{2\pi} &\leftarrow \text{frekvencija} \\ \frac{2\pi}{\omega} &\leftarrow \text{period} \\ y(0) &\leftarrow \text{početni položaj} \\ y'(0) &\leftarrow \text{početna brzina} \end{aligned}$$

Cauchyjev problem titranja

Karakteristična jednadžba:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

Cauchyjev problem titranja

Karakteristična jednadžba:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

$$\lambda = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm\omega\sqrt{-1} = \pm\omega\imath = 0 \pm \omega\imath$$

$$\Rightarrow \quad y = e^{0t}(C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

Cauchyjev problem titranja

Karakteristična jednadžba:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

$$\lambda = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm\omega\sqrt{-1} = \pm\omega\imath = 0 \pm \omega\imath$$

$$\Rightarrow \quad y = e^{0t}(C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

Početni uvjeti:

$$y(0) = A,\ y'(0) = 0$$

Cauchyjev problem titranja

Karakteristična jednadžba:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

$$\lambda = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm\omega\sqrt{-1} = \pm\omega\imath = 0 \pm \omega\imath$$

$$\Rightarrow \quad y = e^{0t}(C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)) = C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)$$

Početni uvjeti:

$$y(0) = A,\ y'(0) = 0$$

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 = A \\ y'(t) &= -C_1\omega\sin(\omega t) + C_2\omega\cos(\omega t) \\ y'(0) &= C_2\omega = 0 \ \rightarrow \ C_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad y = A\cos(\omega t)$$

Nehomogena jednadžba

- Rješenje nehomogene jednadžbe $y'' + py' + qy = f(x)$ dobije se kao

$$y = y_0 + y_P,$$

pri čemu je y_0 rješenje homogene jednadžbe, a y_P je neko partikularno rješenje polazne jednadžbe.

Nehomogena jednadžba

- Rješenje nehomogene jednadžbe $y'' + py' + qy = f(x)$ dobije se kao
$$y = y_0 + y_P,$$
pri čemu je y_0 rješenje homogene jednadžbe, a y_P je neko partikularno rješenje polazne jednadžbe.
- Partikularno rješenje možemo naći **metodom neodređenih koeficijenata**.
- Pretpostavimo da y_P ima isti oblik kao $f(x)$, ali s neodređenim koeficijentima.

Nehomogena jednadžba

(i) Ako je $f(x) = e^{ax} P_n(x)$, gdje je $P_n(x)$ polinom stupnja n u varijabli x i a je nultočka karakterističnog polinoma kratnosti r, onda uzmemo

$$y_P = x^r e^{ax} Q_n(x),$$

pri čemu je Q_n polinom stupnja n s neodređenim koeficijentima.

Nehomogena jednadžba

(ii) Ako je $f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos(bx) + Q_m(x)\sin(bx))$, gdje su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi stupnja n, odnosno m, u varijabli x i $a \pm b\imath$ je nultočka karakterističnog polinoma kratnosti r, onda uzmemo

$$y_P = x^r e^{ax}(S_N(x)\cos(bx) + T_N(x)\sin(bx)),$$

pri čemu su S_N i T_N polinomi stupnja $N = \max\{n, m\}$ s neodređenim koeficijentima.

Primjer 4

Riješite jednadžbu

$$y'' + 3y' = 3xe^{-3x}.$$

Primjer 4

Riješite jednadžbu

$$y'' + 3y' = 3xe^{-3x}.$$

Karakteristična jednadžba: $\lambda^2 + 3\lambda = 0$

$$\Rightarrow \ \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3 \ \Rightarrow \ y_0 = C_1 + C_2 e^{-3x}$$

Primjer 4

Riješite jednadžbu

$$y'' + 3y' = 3xe^{-3x}.$$

Karakteristična jednadžba: $\lambda^2 + 3\lambda = 0$

$$\Rightarrow \ \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3 \ \Rightarrow \ y_0 = C_1 + C_2 e^{-3x}$$

$$f(x) = 3xe^{-3x} \ \Rightarrow \ y_P = x(Ax + B)e^{-3x}$$

Primjer 4

Riješite jednadžbu

$$y'' + 3y' = 3xe^{-3x}.$$

Karakteristična jednadžba: $\lambda^2 + 3\lambda = 0$

$$\Rightarrow \ \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3 \ \Rightarrow \ y_0 = C_1 + C_2 e^{-3x}$$

$$f(x) = 3x e^{-3x} \ \Rightarrow \ y_P = x(Ax + B)e^{-3x}$$

Da bismo uvrstili y_P u polaznu jednadžbu izračunamo y_P' i y_P''.

$$\begin{aligned}
y_P &= (Ax^2 + Bx)e^{-3x}, \\
y_P' &= (2Ax + B)e^{-3x} - 3(Ax^2 + Bx)e^{-3x} = (2Ax + B - 3Ax^2 - 3Bx)e^{-3x}, \\
y_P'' &= (2A - 6Ax - 3B)e^{-3x} - 3(2Ax + B - 3Ax^2 - 3Bx)e^{-3x} \\
&= (2A - 12Ax - 6B + 9Ax^2 + 9Bx)e^{-3x}
\end{aligned}$$

Primjer 4

Uvrštavanjem dobijemo

$$
\begin{aligned}
(2A - 12Ax - 6B + 9Ax^2 + 9Bx)e^{-3x} + 3(2Ax + B - 3Ax^2 - 3Bx)e^{-3x} &= 3xe^{-3x}, \\
2A - 12Ax - 6B + 9Ax^2 + 9Bx + 6Ax + 3B - 9Ax^2 - 9Bx &= 3x, \\
-6Ax + 2A - 3B &= 3x.
\end{aligned}
$$

Primjer 4

Uvrštavanjem dobijemo

$$(2A - 12Ax - 6B + 9Ax^2 + 9Bx)e^{-3x} + 3(2Ax + B - 3Ax^2 - 3Bx)e^{-3x} = 3xe^{-3x},$$

$$2A - 12Ax - 6B + 9Ax^2 + 9Bx + 6Ax + 3B - 9Ax^2 - 9Bx = 3x,$$

$$-6Ax + 2A - 3B = 3x.$$

Izjednačavanjem dobijemo

$$-6A = 3,$$

$$2A - 3B = 0,$$

pa je $A = -\frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{3}$.

Primjer 4

Uvrštavanjem dobijemo

$$(2A - 12Ax - 6B + 9Ax^2 + 9Bx)e^{-3x} + 3(2Ax + B - 3Ax^2 - 3Bx)e^{-3x} = 3xe^{-3x},$$
$$2A - 12Ax - 6B + 9Ax^2 + 9Bx + 6Ax + 3B - 9Ax^2 - 9Bx = 3x,$$
$$-6Ax + 2A - 3B = 3x.$$

Izjednačavanjem dobijemo

$$-6A = 3,$$
$$2A - 3B = 0,$$

pa je $A = -\frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{3}$.

Stoga je partikularno rješenje

$$y_P = (-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x)e^{-3x},$$

a opće rješenje je

$$y = y_0 + y_P = C_1 + C_2e^{-3x} - \frac{1}{2}x^2e^{-3x} - \frac{1}{3}xe^{-3x}.$$