Neodređeni integral i metode računanja

Matematika 2

Erna Begović Kovač

http://matematika.fkit.hr

Uvod

- Pojam neodređenog integrala je inverzan pojmu derivacije funkcije.
- **Neodređeni integral** funkcije f

$$\int f(x)dx$$

je skup funkcija čija je derivacija jednaka f.

Uvodni primjer

Odredite funkciju F za koju vrijedi $F'(x) = 2x$.

Uvodni primjer

Odredite funkciju F za koju vrijedi $F'(x) = 2x$.

$$(x^2)' = 2x$$

Uvodni primjer

Odredite funkciju F za koju vrijedi $F'(x) = 2x$.

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^2 + C)' = 2x$$

$$\Rightarrow \int 2x dx = x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Neodređeni integral i primitivna funkcija

- Općenito, činjenicu da je

$$F'(x) = f(x)$$

zapisujemo kao

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

- Svaka od funkcija $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, je **primitivna funkcija** (**antiderivacija**) funkcije f.

Neodređeni integral i primitivna funkcija

- Općenito, činjenicu da je

$$F'(x) = f(x)$$

zapisujemo kao

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

- Svaka od funkcija $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, je **primitivna funkcija** (**antiderivacija**) funkcije f.
- Skup funkcija

$$\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$$

je **neodređeni integral** funkcije f.

Neodređeni integral i primitivna funkcija

Uočimo da je

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x),$$

dok je

$$\int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

Tablica integrala

$\int dx = x + C$

Tablica integrala

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Tablica integrala

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Tablica integrala

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Tablica integrala

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Tablica integrala

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

Tablica integrala

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

Tablica integrala

$\int dx = x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln \lvert x \rvert + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	

Tablica integrala

$\int dx = x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg} x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	

Tablica integrala

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arctg} x + C$$

Napomena vezana uz $\int \frac{1}{x} dx$

Za $x > 0$ vrijedi $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ pa je

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C, \quad x > 0.$$

Napomena vezana uz $\int \frac{1}{x} dx$

Za $x > 0$ vrijedi $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ pa je

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C, \quad x > 0.$$

Za $x < 0$ vrijedi $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ pa je

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C, \quad x < 0.$$

Napomena vezana uz $\int \frac{1}{x} dx$

Za $x > 0$ vrijedi $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ pa je

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C, \quad x > 0.$$

Za $x < 0$ vrijedi $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ pa je

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C, \quad x < 0.$$

Stoga pišemo

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C, \quad x \neq 0.$$

Napomene o oznakama

- Umjesto $\int 1 dx$ pišemo samo $\int dx$.
- Radi sažetosti zapisa oznaku dx često pišemo u brojniku, npr. $\int \frac{dx}{x}$ umjesto $\int \frac{1}{x} dx$.

Svojstva neodređenog integrala

- Integral zbroja jednak je zbroju integrala

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Svojstva neodređenog integrala

- Integral zbroja jednak je zbroju integrala

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

- Integral razlike jednak je razlici integrala

$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx.$$

Svojstva neodređenog integrala

- Integral zbroja jednak je zbroju integrala

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

- Integral razlike jednak je razlici integrala

$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx.$$

- Konstanta može izaći ispred integrala

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx.$$

Svojstva neodređenog integrala

- Integral zbroja jednak je zbroju integrala

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

- Integral razlike jednak je razlici integrala

$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx.$$

- Konstanta može izaći ispred integrala

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx.$$

Ova svojstva slijede iz svojstava derivacija

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x) \quad \text{i} \quad (\alpha f(x))' = \alpha f'(x).$$

Primjer 1

$$\int (3\cos x + \frac{2}{x} - 5x^3 + 4)dx$$

Primjer 1

$$\int (3\cos x + \frac{2}{x} - 5x^3 + 4)dx$$
$$= \int 3\cos x dx + \int \frac{2}{x} dx - \int 5x^3 dx + \int 4 dx$$

Primjer 1

$$\begin{aligned}
&\int (3\cos x + \frac{2}{x} - 5x^3 + 4)dx \\
&= \int 3\cos x dx + \int \frac{2}{x} dx - \int 5x^3 dx + \int 4 dx \\
&= 3\int \cos x dx + 2\int \frac{1}{x} dx - 5\int x^3 dx + 4\int dx
\end{aligned}$$

Primjer 1

$$
\begin{aligned}
&\int (3\cos x + \frac{2}{x} - 5x^3 + 4)dx \\
&= \int 3\cos x dx + \int \frac{2}{x}dx - \int 5x^3 dx + \int 4dx \\
&= 3\int \cos x dx + 2\int \frac{1}{x}dx - 5\int x^3 dx + 4\int dx \\
&= (3\sin x + C_1) + (2\ln|x| + C_2) - (5\frac{x^4}{4} + C_3) + (4x + C_4)
\end{aligned}
$$

Primjer 1

$$
\begin{aligned}
&\int (3\cos x + \frac{2}{x} - 5x^3 + 4) dx \\
&= \int 3\cos x dx + \int \frac{2}{x} dx - \int 5x^3 dx + \int 4 dx \\
&= 3 \int \cos x dx + 2 \int \frac{1}{x} dx - 5 \int x^3 dx + 4 \int dx \\
&= (3\sin x + C_1) + (2\ln|x| + C_2) - (5\frac{x^4}{4} + C_3) + (4x + C_4) \\
&= 3\sin x + 2\ln|x| - \frac{5}{4}x^4 + 4x + C
\end{aligned}
$$

Metode integriranja

Često integral $\int f(x)dx$ ne možemo rješiti direktno koristeći tablicu i svojstva integrala. Tada koristimo neke od tehnika integriranja. To su

- **supstitucija** i
- **parcijalna integracija**.

Supstitucija

U integral $\int f(x)dx$ uvrstimo $x = \phi(t)$ pri čemu je funkcija ϕ bijekcija. Dobijemo

$$\int f(x)dx = \left[x = \phi(t), dx = \phi'(t)dt\right] = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Cilj supstitucije je da dođemo do oblika $f(\phi(t))\phi'(t)$ koji znamo integrirati.

Supstitucija

Slijedi
$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = g(t) + C.$$

Supstitucija

Slijedi

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = g(t) + C.$$

Nakon što smo riješili integral, moramo se vratiti s nove varijable t na polaznu varijablu x i zbog toga je nužno da je funkcija ϕ bijekcija.

$$g(t) + C = \left[t = \phi^{-1}(x)\right] = g(\phi^{-1}(x)) + C.$$

Primjer 2 (Supstitucija)

$$\int \cos(2x)dx$$

Primjer 2 (Supstitucija)

$$\int \cos(2x)dx = \left[2x = t,\ 2dx = dt,\ dx = \frac{dt}{2}\right]$$

Primjer 2 (Supstitucija)

$$\int \cos(2x)dx = \left[2x = t,\ 2dx = dt,\ dx = \frac{dt}{2}\right]$$
$$= \int \cos t \frac{dt}{2}$$

Primjer 2 (Supstitucija)

$$\int \cos(2x)dx = \left[2x = t,\ 2dx = dt,\ dx = \frac{dt}{2}\right]$$
$$= \int \cos t \frac{dt}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\int \cos t dt$$

Primjer 2 (Supstitucija)

$$\begin{aligned}\int \cos(2x)dx &= \left[2x = t,\ 2dx = dt,\ dx = \frac{dt}{2}\right] \\ &= \int \cos t \frac{dt}{2} \\ &= \frac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t + C\end{aligned}$$

Primjer 2 (Supstitucija)

$$\begin{aligned}\int \cos(2x)dx &= \left[2x = t,\ 2dx = dt,\ dx = \frac{dt}{2}\right] \\ &= \int \cos t \frac{dt}{2} \\ &= \frac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t + C \\ &= \frac{1}{2}\sin(2x) + C\end{aligned}$$

Primjer 3

Računanje integrala ako je brojnik derivacija nazivnika

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \left[t = f(x), dt = f'(x)dx\right]$$

Primjer 3

Računanje integrala ako je brojnik derivacija nazivnika

$$\begin{aligned}\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} &= \left[t = f(x), dt = f'(x)dx\right] \\ &= \int \frac{dt}{t} \\ &= \ln|t| + C \\ &= \ln|f(x)| + C\end{aligned}$$

Primjer 3

$$\int \frac{2x dx}{x^2 + 1}$$

Primjer 3

$$\int \frac{2xdx}{x^2+1} = \left[t = x^2+1, dt = 2xdx\right]$$

Primjer 3

$$\int \frac{2x dx}{x^2+1} = \left[t = x^2+1, dt = 2x dx\right]$$
$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$$

Primjer 3

$$\int \frac{2xdx}{x^2+1} = \left[t = x^2+1, dt = 2xdx\right]$$
$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$$
$$= \ln(x^2+1) + C$$

Parcijalna integracija

Formula parcijalne integracije

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Parcijalna integracija

Formula parcijalne integracije

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Izvod:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Parcijalna integracija

Formula parcijalne integracije

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Izvod:

$$\begin{aligned} (u(x)v(x))' &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ u(x)v'(x) &= (u(x)v(x))' - u'(x)v(x) \end{aligned}$$

Parcijalna integracija

Formula parcijalne integracije

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Izvod:

$$
\begin{aligned}
(u(x)v(x))' &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\
u(x)v'(x) &= (u(x)v(x))' - u'(x)v(x) \\
\Rightarrow \int u(x)v'(x)dx &= \int (u(x)v(x))'dx - \int u'(x)v(x)dx
\end{aligned}
$$

Parcijalna integracija

Formula parcijalne integracije

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Izvod:

$$\begin{aligned}
(u(x)v(x))' &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\
u(x)v'(x) &= (u(x)v(x))' - u'(x)v(x) \\
\Rightarrow \int u(x)v'(x)dx &= \int (u(x)v(x))'dx - \int u'(x)v(x)dx \\
\int u(x)v'(x)dx &= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx
\end{aligned}$$

Parcijalna integracija

Formula parcijalne integracije

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Izvod:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$
$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x)$$
$$\Rightarrow \int u(x)v'(x)dx = \int (u(x)v(x))'dx - \int u'(x)v(x)dx$$
$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Uvrstimo $v'(x)dx = dv$, $u'(x)dx = du$.

$$\Rightarrow \int u(x)dv = u(x)v(x) - \int v(x)du$$

Primjer 4 (Parcijalna integracija)

$$\int x \cos x dx$$

Primjer 4 (Parcijalna integracija)

$$\int x \cos x dx = [u = x, dv = \cos x dx,\ du = dx, v = \sin x]$$

Primjer 4 (Parcijalna integracija)

$$\int x\cos x dx = [u = x, dv = \cos x dx,\ du = dx, v = \sin x]$$
$$= x\sin x - \int \sin x dx$$

Primjer 4 (Parcijalna integracija)

$$\begin{aligned}\int x\cos x dx &= [u = x, dv = \cos x dx,\ du = dx, v = \sin x] \\ &= x\sin x - \int \sin x dx \\ &= x\sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

Primjer 5

Kombinacija parcijalne integracije i supstitucije

$$\int \arcsin x dx$$

Primjer 5

Kombinacija parcijalne integracije i supstitucije

$$\int \arcsin x dx = \left[u = \arcsin x, dv = dx, \;\; du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, v = x \right]$$

Primjer 5

Kombinacija parcijalne integracije i supstitucije

$$\int \arcsin x dx = \left[u = \arcsin x, dv = dx, \ du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, v = x \right]$$
$$= x \arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Primjer 5

Kombinacija parcijalne integracije i supstitucije

$$\int \arcsin x dx = \left[u = \arcsin x, dv = dx,\ \ du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, v = x \right]$$

$$= x \arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \left[t = 1 - x^2, dt = -2xdx, xdx = -\frac{dt}{2} \right]$$

Primjer 5

Kombinacija parcijalne integracije i supstitucije

$$\begin{aligned}
\int \arcsin x dx &= \left[u = \arcsin x, dv = dx, \;\; du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, v = x \right] \\
&= x \arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \left[t = 1 - x^2, dt = -2x dx, x dx = -\frac{dt}{2} \right] \\
&= x \arcsin x - \int \frac{1}{\sqrt{t}} \left(-\frac{dt}{2} \right)
\end{aligned}$$

Primjer 5

Kombinacija parcijalne integracije i supstitucije

$$\begin{aligned}
\int \arcsin x dx &= \left[u = \arcsin x, dv = dx, \ du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, v = x \right] \\
&= x \arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \left[t = 1 - x^2, dt = -2x dx, x dx = -\frac{dt}{2} \right] \\
&= x \arcsin x - \int \frac{1}{\sqrt{t}} \left(-\frac{dt}{2} \right) \\
&= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt
\end{aligned}$$

Primjer 5

Kombinacija parcijalne integracije i supstitucije

$$\begin{aligned}\int \arcsin x dx &= \left[u = \arcsin x, dv = dx,\ du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, v = x\right]\\ &= x \arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx\\ &= \left[t = 1 - x^2, dt = -2x dx, x dx = -\frac{dt}{2}\right]\\ &= x \arcsin x - \int \frac{1}{\sqrt{t}} \left(-\frac{dt}{2}\right)\\ &= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt\end{aligned}$$

Primjer 5

Kombinacija parcijalne integracije i supstitucije

$$
\begin{aligned}
\int \arcsin x dx &= \left[u = \arcsin x, dv = dx,\ \ du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, v = x \right] \\
&= x \arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \left[t = 1 - x^2, dt = -2x dx, x dx = -\frac{dt}{2} \right] \\
&= x \arcsin x - \int \frac{1}{\sqrt{t}} \left(-\frac{dt}{2} \right) \\
&= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt \\
&= x \arcsin x + \frac{1}{2} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C
\end{aligned}
$$

Primjer 5

Kombinacija parcijalne integracije i supstitucije

$$\begin{aligned}
\int \arcsin x dx &= \left[u = \arcsin x, dv = dx,\ du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, v = x\right] \\
&= x \arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \left[t = 1 - x^2, dt = -2xdx, xdx = -\frac{dt}{2}\right] \\
&= x \arcsin x - \int \frac{1}{\sqrt{t}} \left(-\frac{dt}{2}\right) \\
&= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt \\
&= x \arcsin x + \frac{1}{2} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = x \arcsin x + \sqrt{t} + C
\end{aligned}$$

Primjer 5

Kombinacija parcijalne integracije i supstitucije

$$\int \arcsin x dx = \left[u = \arcsin x, dv = dx,\ du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx, v = x\right]$$

$$= x \arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \left[t = 1 - x^2, dt = -2xdx, xdx = -\frac{dt}{2}\right]$$

$$= x \arcsin x - \int \frac{1}{\sqrt{t}} \left(-\frac{dt}{2}\right)$$

$$= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$= x \arcsin x + \frac{1}{2} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = x \arcsin x + \sqrt{t} + C$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Zadatci

Riješite integrale

1. $\int \frac{dx}{x \ln x}$

2. $\int \mathrm{tg} x dx$

3. $\int x^2 e^x dx$

4. $\int \ln x dx$