Primjena neodređenog integrala u inženjerstvu

Matematika 2

Erna Begović Kovač, 2019.

Literatura: I. Gusić, Lekcije iz Matematike 2

http://matematika.fkit.hr

Uvod

- Ako su dvije veličine x i y povezane relacijom $y = f(x)$, onda se brzina promjene veličine y s obzirom na veličinu x opisuje derivacijom $f'(x)$ funkcije f.

- **Brzina** $v(x)$ od y s obzirom na x je

$$v(x) = y'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

- **Akceleracija** $a(x)$ od y s obzirom na x je

$$a(x) = v'(x) = y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

- Možemo li rekonstruirati gibanje čestice (tj. položaj u svakom trenutku t) ako znamo njenu brzinu (u svakom trenutku t)?

  Da, ako znamo položaj čestice nekom konkretnom trenutku t_0.

1. Izvod jednadžbe gibanja

Označimo

- $y(t)$ - položaj u trenutku t (tražimo)
- $v(t)$ - brzina u trenutku t (poznato)

Vrijedi $v(t) = y'(t) = \frac{dy}{dt}$, tj. funkcija y je jedna primitivna funkcija fukcije v.

Prisjetimo se: F je primitivna funkcija funkcije f ako vrijedi

$$F'(x) = f(x).$$

Da bi dobili y računamo

$$y(t) = \int v(t)dt.$$

Rješenje ovog integrala je skup svih primitivnih funkcija od v koje ovise o konstanti C.

S obzirom da je y jedinstvena funkcija, potrebno je odrediti koliko iznosi C, a to izračunamo iz položaja $y_0 = y(t_0)$ u trenutku t_0.

Diferencijalna jednadžba gibanja

Ako znamo brzinu v, onda položaj (gibanje) y računamo iz jednadžbi

$$y'(t) = v(t), \qquad \leftarrow \textbf{diferencijalna jednadžba gibanja}$$
$$y(t_0) = y_0. \qquad \leftarrow \textbf{početni uvjet}$$

Ovakav problem naziva se **Cauchyjev problem**.

Primjer 1

Riješite Cauchyjev problem

$$y' = 3x^2 + 2, \quad y(0) = 1.$$

2. Opis radioaktivnog raspada

Označimo

- $y(t)$ - količina radioaktivne materije u trenutku t (tražimo)
- $y(0) = y_0$ - količina radioaktivne materije u početnom trenutku (poznato)

Intuitivno: y je padajuća funkcija.

Ograničit ćemo se na raspad u izoliranim uvjetima. S problemom se upoznajemo pokusom.

Glavna je poteškoća što se radioaktivni materijal vrlo sporo raspada pa je teško doći do podataka. Zato treba naći metodu koja će iz lokalnih rezultata dati globalne.

Eksperimentalno određivanje jednadžbe raspada

Količina raspadnute materije: $y(t) - y(t + \triangle t) = -\triangle y$
(Predznak $-$ jer se količina smanjuje.)

Intuitivno je jasno, a potvrdjuje se pokusom, da je količina raspadnute materije između dva relativno bliska mjerenja u vremenima t i $t + \triangle t$ približno proporcionalna proteklom vremenu $\triangle t$ i količini materije $y(t)$ u vremenu t.

Dakle, postoji pozitivna konstanta k (ovisna samo o vrsti radioaktivne materije, ne o vremenu), takva da je

$$\triangle y \approx -ky(t)\triangle t,$$

odnosno

$$\frac{\triangle y}{\triangle t} \approx -ky.$$

Diferencijalna jednadžba radioaktivnog raspada

Iz prethodnog razmatranja dobijemo

$$\frac{dy}{dt} = -ky, \quad y(0) = y_0.$$

Gornju jednadžbu zapišemo kao

$$\frac{dy}{y} = -kdt$$

i integriramo

$$\int \frac{dy}{y} = \int (-k) dt.$$

Dobijemo

$$\ln y = -kt + C.$$

Formula radioaktivnog raspada

Sada je

$$y = e^{-kt+C} = e^{-kt} \cdot e^{C} = Ce^{-kt}.$$

Još trebamo odrediti konstantu C.

Iz početnog uvjeta $y(0) = y_0$ dobijemo

$$C = y_0$$

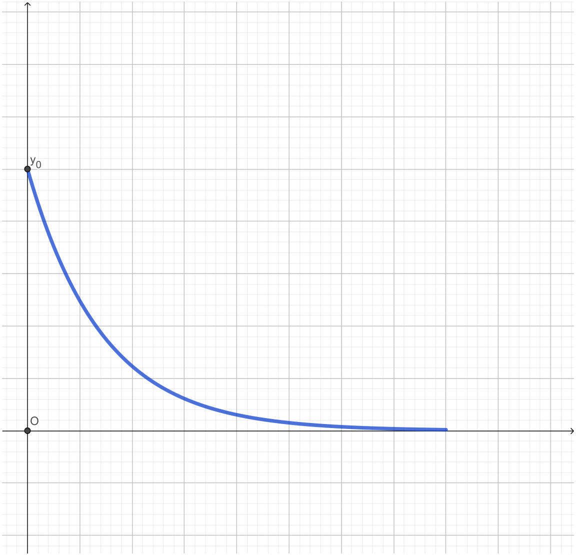
pa je

$$y = y_0 e^{-kt}$$

formula radioaktivnog raspada.

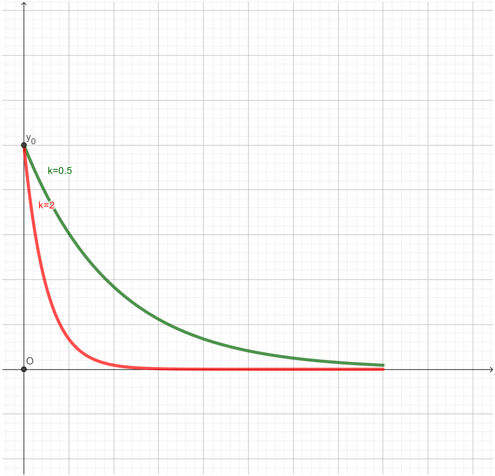
Da bismo do kraja opisali radioaktivni raspad, potrebno je znati konstantu k. Npr. za raioaktivni izotop ugljika C-14 je $k = 1.244 \cdot 10^{-4}$ (približno, ako se t mjeri u godinama.)

Radioaktivni raspad



$$y = y_0 e^{-kt}$$

Radioaktivni raspad



Usporedba grafova za $k = 2$ i $k = 0.5$

Što je k manji, raspadanje je sporije.

Primjer 2

Odredite vrijeme poluživota radioaktivne materije, tj. vrijeme za koje se količina radioaktivne materije prepolovi.

Treba vrijediti $y(t+T) = \frac{1}{2}y(t)$.

Znamo da je $y(t) = y_0 e^{-kt}$ pa uvrštavanjem dobijemo

$$\begin{aligned} y_0 e^{-k(t+T)} &= \frac{1}{2} y_0 e^{-kt} \\ e^{-kt} e^{-kT} &= \frac{1}{2} e^{-kt} \\ e^{-kT} &= \frac{1}{2} \\ -kT &= \ln\frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2 \\ \Rightarrow kT &= \ln 2 \\ T &= \frac{\ln 2}{k}. \end{aligned}$$

Primjer 3

Odredite vrijeme poluživota za C-14.

Znamo da je $k = 1.244 \cdot 10^{-4}$ za C-14, a u prethodnom primjeru smo dobili jednadžbu za vrijeme poluživota

$$T = \frac{\ln 2}{k}.$$

Jednostavnim uvrštavanjem dobijemo

$$T = \frac{\ln 2}{1.244 \cdot 10^{-4}} = \frac{\ln 2}{1.244} \cdot 10^4 \approx 5572 \text{ godina.}$$

Zadatak 1

Odredite formulu radioaktivnog raspada u terminu vremena poluživota.

3. Diferencijalna jednadžba hlađenje/zagrijavanje tijela

Označimo

- S - temperatura sredine u kojoj se tijelo nalazi (poznato)
- $y(0) = y_0$ - temperatura tijela u početnom trenutku (poznato)
- $y(t)$ - temperatura tijela u trenutku t (tražimo)

Intuitivno: Temperatura tijela će se približavati temperaturi sredine. Ako je je $y_0 > S$, onda je y padajuća funkcija, a ako je $y_0 < S$, onda je y rastuća funkcija. Ako je $y_0 = S$, onda je y konstantna.

Također, intuitivno je jasno, a potvrdjuje se pokusom, da je promjena temperature proporcionalna proteklom vremenu $\triangle t$ za male vremenske pomake, kao i razlici između temperature tijela i sredine $y(t) - S$.

Hlađenje/zagrijavanje tijela u sredini stalne temperature

Dakle, postoji pozitivna konstanta k (ovisna samo o materijalu), takva da je

$$\triangle y = -k\triangle t(y(t) - S).$$

Negativni predznak dolazi od toga što se termperatura tijela smanjuje ako je $y(t) - S > 0$.

Dobijemo

$$\frac{\triangle y}{\triangle t} = -k(y(t) - S),$$

pa diferencijalna jednadžba hlađenja/zagrijavanja tijela glasi

$$\frac{dy}{dt} = -k(y - S).$$

Primjer 4

Opišite promjenu temperature tijela u sredini stalne temperature.

Iz diferencijalne jednadžbe hlađenja/zagrijavanja imamo

$$\frac{dy}{dt} = -k(y - S), \quad y(0) = y_0.$$

Uvodimo supstituciju $z = y - S$, $dz = dy$, što daje

$$\frac{dz}{dt} = -kz, \quad z(0) = y_0 - S.$$

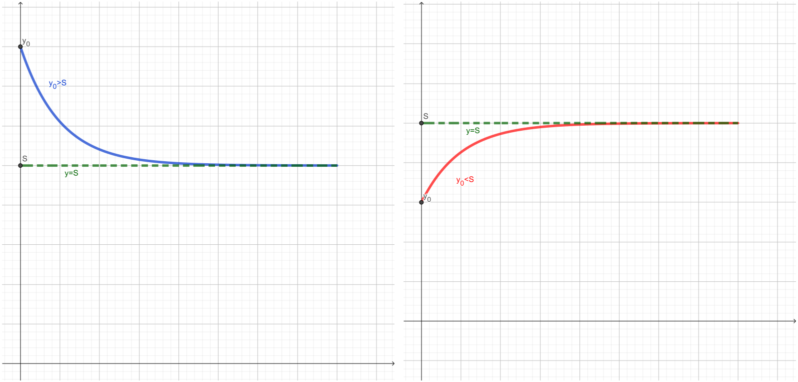
Ova je jednadžba jednaka jednadžbi radioaktivnog raspada pa je njeno rješenje

$$z(t) = (y_0 - S)e^{-kt},$$

tj.

$$y(t) = S + (y_0 - S)e^{-kt}.$$

Diferencijalna jednadžba hlađenje/zagrijavanje tijela



Zadatak 2

Tijelo se nalazi u sredini stalne temperature $S = 18^\circ C$ i u prvom trenutku mjerenja (za $t = 0$) ima temperaturu $42^\circ C$. Nakon sat vremena izmjerena mu je temperatura od $26^\circ C$. Odredite:

(i) konstantu hlađenja k,

(ii) temperaturu dva sata nakon nultog trenutka,

(iii) vrijeme u kojem će tijelo poprimiti temperaturu od $19^\circ C$.

4. Gibanje po pravcu

- $y(t)$ - položaj tijela u trenutku t
  Ako je $y(t) > 0$, tijelo se nalazi na pozitivnom dijelu y osi, ako je $y(t) < 0$, tijelo se nalazi na negativnom dijelu y osi.
- $v(t)$ - brzina tijela u trenutku t
  Ako je $v(t) > 0$, tijelo se giba u pozitivnom smjeru y osi (prema gore), ako je $y(t) < 0$, tijelo se giba u negativnom smjeru y osi (prema dolje).
- $a(t)$ - akceleracija tijela u trenutku t
- $F(t)$ - sila koja djeluje na tijelo u položaju $y(t)$
  Vrijedi $F = ma$, pri čemu je m masa tijela.
  Ako je $a(t) > 0$, onda je $F(t) > 0$ i sila djeluje u pozitivnom smjeru y osi, ako je $a(t) < 0$, onda je $F(t) < 0$ i sila djeluje u negativnom smjeru y osi.

Gibanje po pravcu pri djelovanju konstantne sile

Problem: Opisati gibanje na pravcu tijela na koje djeluje konstantna sila.

Da bi to napravili treba uvesti koordinatni sustav (t, y).

- t (vrijeme) - x-os
- y (položaj) - y-os
- početni položaj $y_0 = y(0)$
- početna brzina $v_0 = v(0)$
- $-g$ stalna akceleracija usmjerena suprotno od y osi (sila teža)

Vrijedi:

- $v(t) = y'(t)$, posebno $v(0) = y'(0)$
- $a(t) = v'(t) = y''(t)$ i $a(t) = -g$ jer je sila, a time i akceleracija, konstantna

Vertikalni hitac

Postavimo Cauchyjev problem:

$$y'' = -g, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0.$$

Integriranjem dobijemo

$$y' = \int -g dt = -gt + C_1,$$

$$y = \int (-gt + C_1) dt = -g\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Konstante C_1 i C_2 odredimo iz početnih uvjeta,

$$y'(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = v_0,$$

$$y(0) = y_0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = y_0.$$

Stoga vrijedi

$$y(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0 t + y_0, \qquad \leftarrow \textbf{položaj}$$

$$v(t) = -gt + v_0. \qquad \leftarrow \textbf{brzina}$$

Zadatak 3

Tijelo je bačeno u vis brzinom $v_0 = 3m/s$ s početnog položaja $y_0 = 12m$. Uz pretpostavku da je $g = 9.81m/s^2$ i da nema otpora, odredite:

(i) jednadžbu gibanja tog tijela,

(ii) brzinu $v(t)$ u trenutku t,

(iii) maksimalnu visinu i vrijeme kada se postiže,

(iv) vrijeme za koje će tijelo opet biti na početnoj visini i brzinu u tom trenutku,

(v) vrijeme pada tijela na površinu zemlje.