Primjena neodređenog integrala u inženjerstvu

Matematika 2

Erna Begović Kovač

http://matematika.fkit.hr

Uvod

- Ako su dvije veličine x i y povezane relacijom $y = f(x)$, onda se **brzina promjene** veličine y s obzirom na veličinu x **opisuje derivacijom** $f'(x)$ funkcije f.

- **Brzina** $v(x)$ od y s obzirom na x je

$$v(x) = y'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

- **Akceleracija** (ubrzanje) $a(x)$ od y s obzirom na x je

$$a(x) = v'(x) = y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Uvod

Možemo li rekonstruirati gibanje čestice (tj. položaj u svakom trenutku t) ako znamo njenu brzinu (u svakom trenutku t)?

Da, ako znamo položaj čestice nekom konkretnom trenutku t_0.

1. Izvod jednadžbe gibanja

Označimo

- $y(t)$ - položaj u trenutku t (tražimo)
- $v(t)$ - brzina u trenutku t (poznato)

1. Izvod jednadžbe gibanja

Označimo

- $y(t)$ - položaj u trenutku t (tražimo)
- $v(t)$ - brzina u trenutku t (poznato)

Vrijedi

$$v(t) = y'(t) = \frac{dy}{dt}.$$

1. Izvod jednadžbe gibanja

Označimo

- $y(t)$ - položaj u trenutku t (tražimo)
- $v(t)$ - brzina u trenutku t (poznato)

Vrijedi

$$v(t) = y'(t) = \frac{dy}{dt}.$$

Prisjetimo se: F je primitivna funkcija funkcije f ako vrijedi

$$F'(x) = f(x).$$

Dakle, funkcija y je jedna primitivna funkcija fukcije v.

1. Izvod jednadžbe gibanja

Da bi dobili y računamo

$$y(t) = \int v(t)dt.$$

Rješenje ovog integrala je skup svih primitivnih funkcija od v koje ovise o konstanti C.

1. Izvod jednadžbe gibanja

Da bi dobili y računamo

$$y(t) = \int v(t)dt.$$

Rješenje ovog integrala je skup svih primitivnih funkcija od v koje ovise o konstanti C.

S obzirom da je y jedinstvena funkcija, potrebno je odrediti koliko iznosi C, a to izračunamo iz položaja u trenutku t_0, tj. iz jednadžbe

$$y_0 = y(t_0).$$

Diferencijalna jednadžba gibanja

Ako znamo brzinu v, onda položaj (gibanje) y računamo iz jednadžbi

$$y'(t) = v(t), \qquad \leftarrow \textbf{diferencijalna jednadžba gibanja}$$
$$y(t_0) = y_0. \qquad \leftarrow \textbf{početni uvjet}$$

Ovakav problem naziva se **Cauchyjev problem**.

Primjer 1

Odredite funkciju $y(x)$ za koju vrijedi

$$y' = 3x^2 + 2, \quad y(0) = 1.$$

Primjer 1

Odredite funkciju $y(x)$ za koju vrijedi

$$y' = 3x^2 + 2, \quad y(0) = 1.$$

$$y = \int (3x^2 + 2) dx = x^3 + 2x + C$$

Primjer 1

Odredite funkciju $y(x)$ za koju vrijedi

$$y' = 3x^2 + 2, \quad y(0) = 1.$$

$$y = \int (3x^2 + 2)dx = x^3 + 2x + C$$

$$y(0) = 1 \;\Rightarrow\; 0^3 + 2 \cdot 0 + C = 1, \quad C = 1$$

Primjer 1

Odredite funkciju $y(x)$ za koju vrijedi

$$y' = 3x^2 + 2, \quad y(0) = 1.$$

$$y = \int (3x^2 + 2) dx = x^3 + 2x + C$$

$$y(0) = 1 \;\Rightarrow\; 0^3 + 2 \cdot 0 + C = 1, \quad C = 1$$

$$y = x^3 + 2x + 1$$

2. Opis radioaktivnog raspada

Označimo

- $y(t)$ - količina radioaktivne materije u trenutku t (tražimo)
- $y(0) = y_0$ - količina radioaktivne materije u početnom trenutku (poznato)

Intuitivno: y je padajuća funkcija.

2. Opis radioaktivnog raspada

Označimo

- $y(t)$ - količina radioaktivne materije u trenutku t (tražimo)
- $y(0) = y_0$ - količina radioaktivne materije u početnom trenutku (poznato)

Intuitivno: y je padajuća funkcija.

Ograničit ćemo se na raspad u izoliranim uvjetima. S problemom se upoznajemo pokusom.

Glavna je poteškoća što se radioaktivni materijal vrlo sporo raspada pa je teško doći do podataka. Zato treba naći metodu koja će iz lokalnih rezultata dati globalne.

Eksperimentalno određivanje jednadžbe raspada

Promatramo dva relativno bliska vremenska trenutka t i $t + \triangle t$.
Količina raspadnute materije:

$$y(t) - y(t + \triangle t) = -\triangle y$$

Predznak minus jer se količina smanjuje.

Eksperimentalno određivanje jednadžbe raspada

Promatramo dva relativno bliska vremenska trenutka t i $t + \triangle t$.
Količina raspadnute materije:

$$y(t) - y(t + \triangle t) = -\triangle y$$

Predznak minus jer se količina smanjuje.

Pokusom se pokazuje da je količina raspadnute materije $\triangle y$ između dva relativno bliska mjerenja u vremenima t i $t + \triangle t$ približno proporcionalna proteklom vremenu $\triangle t$ i količini materije $y(t)$ u vremenu t.

Diferencijalna jednadžba radioaktivnog raspada

Dakle, postoji pozitivna konstanta k (ovisna samo o vrsti radioaktivne materije, ne o vremenu), takva da je

$$\triangle y \approx -ky(t)\triangle t,$$

odnosno

$$\frac{\triangle y}{\triangle t} \approx -ky.$$

Diferencijalna jednadžba radioaktivnog raspada

Dakle, postoji pozitivna konstanta k (ovisna samo o vrsti radioaktivne materije, ne o vremenu), takva da je

$$\triangle y \approx -ky(t)\triangle t,$$

odnosno

$$\frac{\triangle y}{\triangle t} \approx -ky.$$

Iz prethodnog razmatranja dobijemo

$$\frac{dy}{dt} = -ky,$$

tj.

$$y' = -ky, \quad y(0) = y_0.$$

Rješenje dif. jedn. radioaktivnog raspada

Jednadžbu $y' = -ky$ ne možemo riješiti direktnim integriranjem jer desna strana ovisi o y.

Prethodnu jednadžbu zapišemo kao

$$\frac{dy}{y} = -kdt$$

i integriramo lijevu stranu po y, a desnu stranu po t,

$$\int \frac{dy}{y} = \int (-k)dt.$$

Rješenje dif. jedn. radioaktivnog raspada

Jednadžbu $y' = -ky$ ne možemo riješiti direktnim integriranjem jer desna strana ovisi o y.

Prethodnu jednadžbu zapišemo kao

$$\frac{dy}{y} = -kdt$$

i integriramo lijevu stranu po y, a desnu stranu po t,

$$\int \frac{dy}{y} = \int (-k)dt.$$

Dobijemo

$$\ln |y| = -kt + C.$$

Rješenje dif. jedn. radioaktivnog raspada

Jednadžbu $y' = -ky$ ne možemo riješiti direktnim integriranjem jer desna strana ovisi o y.

Prethodnu jednadžbu zapišemo kao

$$\frac{dy}{y} = -kdt$$

i integriramo lijevu stranu po y, a desnu stranu po t,

$$\int \frac{dy}{y} = \int (-k)dt.$$

Dobijemo

$$\ln |y| = -kt + C.$$

Sada je

$$|y| = e^{-kt+C} = e^{-kt} \cdot e^{C} = Ce^{-kt},$$
$$y = \pm Ce^{-kt} = Ce^{-kt}.$$

Još trebamo odrediti konstantu C.

Formula radioaktivnog raspada

Za sad imamo

$$y = Ce^{-kt}.$$

Iz početnog uvjeta $y(0) = y_0$ dobijemo

$$C = y_0$$

pa je

$$y = y_0 e^{-kt}$$

formula radioaktivnog raspada.

Formula radioaktivnog raspada

Za sad imamo

$$y = Ce^{-kt}.$$

Iz početnog uvjeta $y(0) = y_0$ dobijemo

$$C = y_0$$

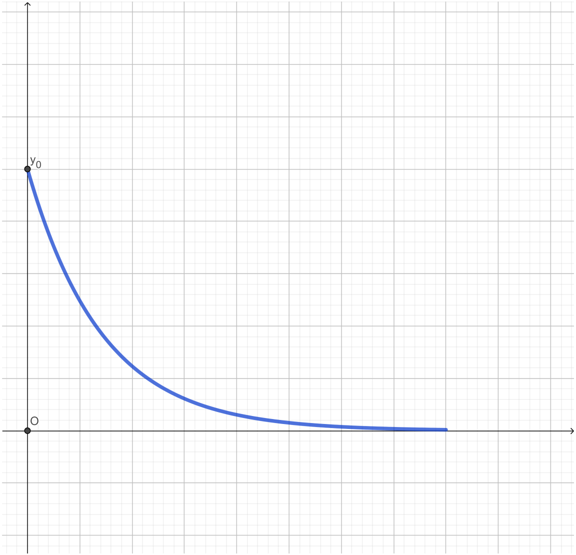
pa je

$$y = y_0 e^{-kt}$$

formula radioaktivnog raspada.

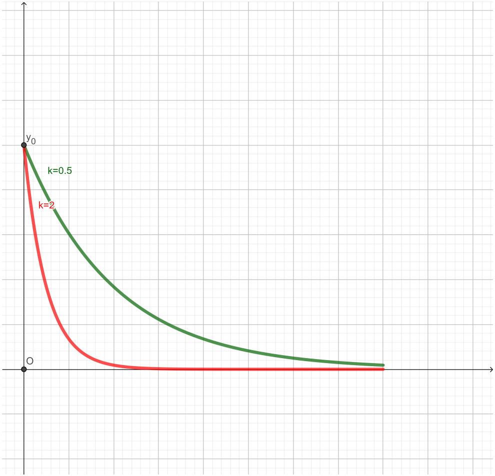
Da bismo do kraja opisali radioaktivni raspad, potrebno je znati konstantu k. Npr. za radioaktivni izotop ugljika C-14 je $k = 1.244 \cdot 10^{-4}$ (približno, ako se t mjeri u godinama.)

Radioaktivni raspad



$$y = y_0 e^{-kt}$$

Radioaktivni raspad



Usporedba grafova za $k = 2$ i $k = 0.5$

Što je k manji, raspadanje je sporije.

Primjer 2

Odredite vrijeme poluživota radioaktivne materije, tj. vrijeme za koje se količina radioaktivne materije prepolovi.

Primjer 2

Odredite vrijeme poluživota radioaktivne materije, tj. vrijeme za koje se količina radioaktivne materije prepolovi.

Treba vrijediti $y(t+T)=\frac{1}{2}y(t)$.

Primjer 2

Odredite vrijeme poluživota radioaktivne materije, tj. vrijeme za koje se količina radioaktivne materije prepolovi.

Treba vrijediti $y(t+T) = \frac{1}{2}y(t)$.

Znamo da je $y(t) = y_0 e^{-kt}$ pa uvrštavanjem dobijemo

$$y_0 e^{-k(t+T)} = \frac{1}{2} y_0 e^{-kt}$$

Primjer 2

Odredite vrijeme poluživota radioaktivne materije, tj. vrijeme za koje se količina radioaktivne materije prepolovi.

Treba vrijediti $y(t+T) = \frac{1}{2}y(t)$.

Znamo da je $y(t) = y_0 e^{-kt}$ pa uvrštavanjem dobijemo

$$\begin{aligned} y_0 e^{-k(t+T)} &= \frac{1}{2} y_0 e^{-kt} \\ e^{-kt} e^{-kT} &= \frac{1}{2} e^{-kt} \\ e^{-kT} &= \frac{1}{2} \\ -kT &= \ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2 \end{aligned}$$

Primjer 2

Odredite vrijeme poluživota radioaktivne materije, tj. vrijeme za koje se količina radioaktivne materije prepolovi.

Treba vrijediti $y(t+T) = \frac{1}{2}y(t)$.

Znamo da je $y(t) = y_0 e^{-kt}$ pa uvrštavanjem dobijemo

$$\begin{aligned} y_0 e^{-k(t+T)} &= \frac{1}{2} y_0 e^{-kt} \\ e^{-kt} e^{-kT} &= \frac{1}{2} e^{-kt} \\ e^{-kT} &= \frac{1}{2} \\ -kT &= \ln\frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2 \\ \Rightarrow kT &= \ln 2 \\ T &= \frac{\ln 2}{k}. \end{aligned}$$

Primjer 3

Odredite vrijeme poluživota za radioaktivni izotop ugljika C-14.

Primjer 3

Odredite vrijeme poluživota za radioaktivni izotop ugljika C-14.

Znamo da je $k = 1.244 \cdot 10^{-4}$ za C-14, a u prethodnom primjeru smo dobili jednadžbu za vrijeme poluživota

$$T = \frac{\ln 2}{k}.$$

Primjer 3

Odredite vrijeme poluživota za radioaktivni izotop ugljika C-14.

Znamo da je $k = 1.244 \cdot 10^{-4}$ za C-14, a u prethodnom primjeru smo dobili jednadžbu za vrijeme poluživota

$$T = \frac{\ln 2}{k}.$$

Jednostavnim uvrštavanjem dobijemo

$$T = \frac{\ln 2}{1.244 \cdot 10^{-4}} = \frac{\ln 2}{1.244} \cdot 10^{4} \approx 5572 \text{ godine.}$$

Primjer 3

Odredite vrijeme poluživota za radioaktivni izotop ugljika C-14.

Znamo da je $k = 1.244 \cdot 10^{-4}$ za C-14, a u prethodnom primjeru smo dobili jednadžbu za vrijeme poluživota

$$T = \frac{\ln 2}{k}.$$

Jednostavnim uvrštavanjem dobijemo

$$T = \frac{\ln 2}{1.244 \cdot 10^{-4}} = \frac{\ln 2}{1.244} \cdot 10^4 \approx 5572 \text{ godine.}$$

Neki drugi primjeri: Jod-131 oko 8 dana, Cezij-137 oko 30 godina.

Primjer 4

Odredite formulu radioaktivnog raspada u terminu vremena poluživota.

Primjer 4

Odredite formulu radioaktivnog raspada u terminu vremena poluživota.

Formula radioaktivnog raspada: $y = y_0 e^{-kt}$

Vrijeme poluživota: $T = \frac{\ln 2}{k}$

Primjer 4

Odredite formulu radioaktivnog raspada u terminu vremena poluživota.

Formula radioaktivnog raspada: $y = y_0 e^{-kt}$

Vrijeme poluživota: $T = \frac{\ln 2}{k}$

$$k = \frac{\ln 2}{T} \;\Rightarrow\; y = y_0 e^{-\ln 2 \frac{t}{T}}$$

3. Hlađenje/zagrijavanje tijela u sredini stalne temperature

Oznake:

- S - temperatura sredine u kojoj se tijelo nalazi (poznato)
- $y(0) = y_0$ - temperatura tijela u početnom trenutku (poznato)
- $y(t)$ - temperatura tijela u trenutku t (tražimo)

3. Hlađenje/zagrijavanje tijela u sredini stalne temperature

Oznake:

- S - temperatura sredine u kojoj se tijelo nalazi (poznato)
- $y(0) = y_0$ - temperatura tijela u početnom trenutku (poznato)
- $y(t)$ - temperatura tijela u trenutku t (tražimo)

Intuitivno: Temperatura tijela će se približavati temperaturi sredine.

Ako je $y_0 > S$, onda je y padajuća funkcija.

Ako je $y_0 < S$, onda je y rastuća funkcija.

Ako je $y_0 = S$, onda je y konstantna.

Eksperimentalno određivanje jednadžbe hlađenja/zagrijavanja

Pokusom se pokazuje da je za male vremenske pomake promjena temperature $\triangle y$ proporcionalna proteklom vremenu $\triangle t$ i razlici između temperature tijela i sredine $y(t) - S$.

Eksperimentalno određivanje jednadžbe hlađenja/zagrijavanja

Pokusom se pokazuje da je za male vremenske pomake promjena temperature $\triangle y$ proporcionalna proteklom vremenu $\triangle t$ i razlici između temperature tijela i sredine $y(t) - S$.

Dakle, postoji pozitivna konstanta k (ovisna samo o materijalu), takva da je

$$\triangle y \approx -k \triangle t (y(t) - S).$$

Eksperimentalno određivanje jednadžbe hlađenja/zagrijavanja

Pokusom se pokazuje da je za male vremenske pomake promjena temperature $\triangle y$ proporcionalna proteklom vremenu $\triangle t$ i razlici između temperature tijela i sredine $y(t) - S$.

Dakle, postoji pozitivna konstanta k (ovisna samo o materijalu), takva da je

$$\triangle y \approx -k \triangle t (y(t) - S).$$

Negativni predznak dolazi od toga što se termperatura tijela smanjuje ako je $y(t) - S > 0$, a povećava ako je $y(t) - S < 0$.

Diferencijalna jednadžba hlađenja/zagrijavanja

Dobijemo

$$\frac{\triangle y}{\triangle t} \approx -k(y(t) - S),$$

pa diferencijalna jednadžba hlađenja/zagrijavanja tijela glasi

$$\frac{dy}{dt} = -k(y - S),$$

tj.

$$y' = -k(y - S).$$

Primjer 5

Opišite promjenu temperature tijela u sredini stalne temperature, tj. riješite jednadžbu hlađenja/zagrijavanja.

Primjer 5

Opišite promjenu temperature tijela u sredini stalne temperature, tj. riješite jednadžbu hlađenja/zagrijavanja.

Iz diferencijalne jednadžbe hlađenja/zagrijavanja imamo

$$\frac{dy}{dt} = -k(y - S), \quad y(0) = y_0.$$

Primjer 5

Opišite promjenu temperature tijela u sredini stalne temperature, tj. riješite jednadžbu hlađenja/zagrijavanja.

Iz diferencijalne jednadžbe hlađenja/zagrijavanja imamo

$$\frac{dy}{dt} = -k(y - S), \quad y(0) = y_0.$$

Uvodimo supstituciju $z = y - S$, $dz = dy$, što daje

$$\frac{dz}{dt} = -kz, \quad z(0) = z_0 = y_0 - S.$$

Primjer 5

Ova je jednadžba jednaka jednadžbi radioaktivnog raspada pa je njeno rješenje

$$z(t) = z_0 e^{-kt}.$$

Primjer 5

Ova je jednadžba jednaka jednadžbi radioaktivnog raspada pa je njeno rješenje

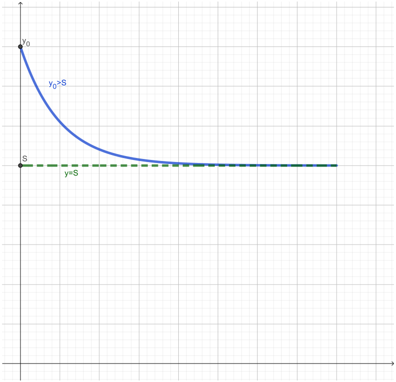
$$z(t) = z_0 e^{-kt}.$$

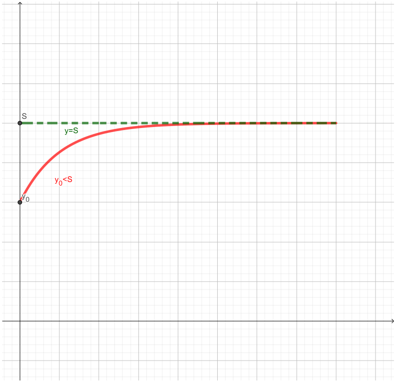
Nakon prelaska s varijable z na varijablu y dobijemo

$$y(t) = S + (y_0 - S)e^{-kt}$$

i to je formula hlađenje/zagrijavanje tijela u sredini stalne temperature.

Diferencijalna jednadžba hlađenje/zagrijavanje tijela





$$y(t) = S + (y_0 - S)e^{-kt}$$

Primjer 6

Tijelo se nalazi u sredini stalne temperature $S = 18^\circ C$ i u prvom trenutku mjerenja (za $t = 0$) ima temperaturu $42^\circ C$. Nakon sat vremena izmjerena mu je temperatura od $26^\circ C$. Odredite:

(i) konstantu hlađenja k,

(ii) temperaturu dva sata nakon nultog trenutka,

(iii) vrijeme u kojem će tijelo poprimiti temperaturu od $19^\circ C$.

Primjer 6

Tijelo se nalazi u sredini stalne temperature $S = 18^\circ C$ i u prvom trenutku mjerenja (za $t = 0$) ima temperaturu $42^\circ C$. Nakon sat vremena izmjerena mu je temperatura od $26^\circ C$. Odredite:

(i) konstantu hlađenja k,

(ii) temperaturu dva sata nakon nultog trenutka,

(iii) vrijeme u kojem će tijelo poprimiti temperaturu od $19^\circ C$.

$$S = 18, \; y(0) = y_0 = 42, \; y(1) = 26$$

$$y = S + (y_0 - S)e^{-kt}$$

Primjer 6

Tijelo se nalazi u sredini stalne temperature $S = 18^\circ C$ i u prvom trenutku mjerenja (za $t = 0$) ima temperaturu $42^\circ C$. Nakon sat vremena izmjerena mu je temperatura od $26^\circ C$. Odredite:

(i) konstantu hlađenja k,

(ii) temperaturu dva sata nakon nultog trenutka,

(iii) vrijeme u kojem će tijelo poprimiti temperaturu od $19^\circ C$.

$$S = 18,\ y(0) = y_0 = 42,\ y(1) = 26$$

$$y = S + (y_0 - S)e^{-kt}$$

$$y = 18 + 24e^{-kt}$$

Primjer 6

$$y = 18 + 24e^{-kt}$$

(i) $k = ?$

Primjer 6

$$y = 18 + 24e^{-kt}$$

(i) $k = ?$

$$y(1) = 26 \;\Rightarrow 26 = 18 + 24e^{-k}$$

Primjer 6

$$y = 18 + 24e^{-kt}$$

(i) $k = ?$

$$y(1) = 26 \;\Rightarrow 26 = 18 + 24e^{-k}$$

$$\begin{aligned} e^{-k} &= \frac{1}{3} \\ -k &= \ln\frac{1}{3} = \ln 1 - \ln 3 = -\ln 3 \\ k &= \ln 3 \end{aligned}$$

Primjer 6

$$y = 18 + 24e^{-kt}$$

(i) $k = ?$

$$y(1) = 26 \;\Rightarrow 26 = 18 + 24e^{-k}$$

$$\begin{aligned} e^{-k} &= \frac{1}{3} \\ -k &= \ln\frac{1}{3} = \ln 1 - \ln 3 = -\ln 3 \\ k &= \ln 3 \end{aligned}$$

$$y = 18 + 24e^{-t\ln 3}$$

Primjer 6

$$y = 18 + 24e^{-kt}$$

(i) $k = ?$

$$y(1) = 26 \;\Rightarrow 26 = 18 + 24e^{-k}$$

$$\begin{aligned} e^{-k} &= \frac{1}{3} \\ -k &= \ln\frac{1}{3} = \ln 1 - \ln 3 = -\ln 3 \\ k &= \ln 3 \end{aligned}$$

$$y = 18 + 24e^{-t\ln 3}$$

(ii) $y(2) = ?$

Primjer 6

$$y = 18 + 24e^{-kt}$$

(i) $k = ?$

$$y(1) = 26 \ \Rightarrow 26 = 18 + 24e^{-k}$$

$$\begin{aligned} e^{-k} &= \frac{1}{3} \\ -k &= \ln\frac{1}{3} = \ln 1 - \ln 3 = -\ln 3 \\ k &= \ln 3 \end{aligned}$$

$$y = 18 + 24e^{-t\ln 3}$$

(ii) $y(2) = ?$

$$y(2) = 18 + 24e^{-2\ln 3} = \ldots = 18 + \frac{8}{3} \approx 20.7$$

Primjer 6

$$y = 18 + 24e^{-t \ln 3}$$

(iii) $y(t) = 19, \; t = ?$

Primjer 6

$$y = 18 + 24e^{-t\ln 3}$$

(iii) $y(t) = 19,\ t = ?$

$$19 = 18 + 24e^{-t\ln 3}$$

Primjer 6

$$y = 18 + 24e^{-t\ln 3}$$

(iii) $y(t) = 19, \;\; t = ?$

$$19 = 18 + 24e^{-t\ln 3}$$

$$\frac{1}{24} = e^{-t\ln 3} = (e^{\ln 3})^{-t} = 3^{-t} = \frac{1}{3^t}$$

Primjer 6

$$y = 18 + 24e^{-t \ln 3}$$

(iii) $y(t) = 19, \; t = ?$

$$19 = 18 + 24e^{-t \ln 3}$$

$$\frac{1}{24} = e^{-t \ln 3} = (e^{\ln 3})^{-t} = 3^{-t} = \frac{1}{3^t}$$

$$3^t = 24$$

$$t = \log_3 24 \approx 2.9$$

4. Gibanje po pravcu

Oznake:

- $y(t)$ - položaj tijela u trenutku t

  Ako je $y(t) > 0$, tijelo se nalazi na pozitivnom dijelu y osi, ako je $y(t) < 0$, tijelo se nalazi na negativnom dijelu y osi.

4. Gibanje po pravcu

Oznake:

- $y(t)$ - položaj tijela u trenutku t

  Ako je $y(t) > 0$, tijelo se nalazi na pozitivnom dijelu y osi, ako je $y(t) < 0$, tijelo se nalazi na negativnom dijelu y osi.

- $v(t)$ - brzina tijela u trenutku t

  Ako je $v(t) > 0$, tijelo se giba u pozitivnom smjeru y osi (prema gore), ako je $v(t) < 0$, tijelo se giba u negativnom smjeru y osi (prema dolje).

4. Gibanje po pravcu

Oznake:

- $y(t)$ - položaj tijela u trenutku t

  Ako je $y(t) > 0$, tijelo se nalazi na pozitivnom dijelu y osi, ako je $y(t) < 0$, tijelo se nalazi na negativnom dijelu y osi.

- $v(t)$ - brzina tijela u trenutku t

  Ako je $v(t) > 0$, tijelo se giba u pozitivnom smjeru y osi (prema gore), ako je $v(t) < 0$, tijelo se giba u negativnom smjeru y osi (prema dolje).

- $a(t)$ - akceleracija tijela u trenutku t

- $F(t)$ - sila koja djeluje na tijelo u položaju $y(t)$

  Vrijedi $F = ma$, pri čemu je m masa tijela. Ako je $a(t) > 0$,

  onda je $F(t) > 0$ i sila djeluje u pozitivnom smjeru y osi, ako je $a(t) < 0$, onda je $F(t) < 0$ i sila djeluje u negativnom smjeru y osi.

Gibanje po pravcu pri djelovanju konstantne sile

Problem: Opisati gibanje po pravcu tijela na koje djeluje konstantna sila.

Gibanje po pravcu pri djelovanju konstantne sile

Problem: Opisati gibanje po pravcu tijela na koje djeluje konstantna sila.

Da bi to napravili treba uvesti koordinatni sustav (t, y).

- t (vrijeme) - x-os
- y (položaj) - y-os
- početni položaj $y_0 = y(0)$
- početna brzina $v_0 = v(0)$
- $-g$ stalna akceleracija usmjerena suprotno od y osi (sila teža)

Vertikalni hitac

- Brzina v jednaka je derivaciji položaja y,

$$v(t) = y'(t), \quad v(0) = y'(0).$$

- Akceleracija a jednaka je derivaciji brzine v,

$$a(t) = v'(t) = y''(t).$$

- Budući da je sila koja djeluje na tijelo konstantna, onda je i akceleracija konstantna. Vrijedi

$$a(t) = -g.$$

Diferencijalna jednadžba vertikalnog hitca

Iz prethodnog razmatranja dobije se diferencijalna jednadžba

$$y'' = -g.$$

Kod ovakve diferencijalne jednadžbe (drugog reda) trebamo dva početna uvjeta

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0.$$

Diferencijalna jednadžba vertikalnog hitca

Iz prethodnog razmatranja dobije se diferencijalna jednadžba

$$y'' = -g.$$

Kod ovakve diferencijalne jednadžbe (drugog reda) trebamo dva početna uvjeta

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0.$$

Integriranjem dobijemo

$$\begin{aligned} y' &= \int -g dt = -gt + C_1, \\ y &= \int (-gt + C_1) dt = -g\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2. \end{aligned}$$

Diferencijalna jednadžba vertikalnog hitca

Konstante C_1 i C_2 odredimo iz početnih uvjeta,

$$\begin{aligned} y'(0) = v_0 \quad &\Rightarrow \quad C_1 = v_0, \\ y(0) = y_0 \quad &\Rightarrow \quad C_2 = y_0. \end{aligned}$$

Diferencijalna jednadžba vertikalnog hitca

Konstante C_1 i C_2 odredimo iz početnih uvjeta,

$$\begin{aligned} y'(0) = v_0 \quad &\Rightarrow \quad C_1 = v_0, \\ y(0) = y_0 \quad &\Rightarrow \quad C_2 = y_0. \end{aligned}$$

Stoga vrijedi

$$\begin{aligned} y(t) &= -g\frac{t^2}{2} + v_0 t + y_0, && \leftarrow \textbf{položaj} \\ v(t) &= -gt + v_0. && \leftarrow \textbf{brzina} \end{aligned}$$

Primjer 7

Tijelo je bačeno u vis brzinom $v_0 = 3m/s$ s početnog položaja $y_0 = 12m$. Uz pretpostavku da je $g = 9.81m/s^2$ i da nema otpora, odredite:

(i) jednadžbu gibanja tog tijela,

(ii) brzinu v u trenutku t,

(iii) vrijeme za koje će tijelo opet biti na početnoj visini,

(iv) vrijeme pada tijela na površinu zemlje.

Primjer 7

Tijelo je bačeno u vis brzinom $v_0 = 3m/s$ s početnog položaja $y_0 = 12m$. Uz pretpostavku da je $g = 9.81m/s^2$ i da nema otpora, odredite:

(i) jednadžbu gibanja tog tijela,

(ii) brzinu v u trenutku t,

(iii) vrijeme za koje će tijelo opet biti na početnoj visini,

(iv) vrijeme pada tijela na površinu zemlje.

(i) Jednadžba gibanja: $y = -g\frac{t^2}{2} + v_0 t + y_0$

Primjer 7

Tijelo je bačeno u vis brzinom $v_0 = 3m/s$ s početnog položaja $y_0 = 12m$. Uz pretpostavku da je $g = 9.81m/s^2$ i da nema otpora, odredite:

(i) jednadžbu gibanja tog tijela,

(ii) brzinu v u trenutku t,

(iii) vrijeme za koje će tijelo opet biti na početnoj visini,

(iv) vrijeme pada tijela na površinu zemlje.

(i) Jednadžba gibanja: $y = -g\frac{t^2}{2} + v_0 t + y_0$

$$y = -9.81\frac{t^2}{2} + 3t + 12$$

Primjer 7

Tijelo je bačeno u vis brzinom $v_0 = 3m/s$ s početnog položaja $y_0 = 12m$. Uz pretpostavku da je $g = 9.81m/s^2$ i da nema otpora, odredite:

(i) jednadžbu gibanja tog tijela,

(ii) brzinu v u trenutku t,

(iii) vrijeme za koje će tijelo opet biti na početnoj visini,

(iv) vrijeme pada tijela na površinu zemlje.

(i) Jednadžba gibanja: $y = -g\frac{t^2}{2} + v_0 t + y_0$

$$y = -9.81\frac{t^2}{2} + 3t + 12$$

(ii) Brzina: $v = -gt + v_0$

Primjer 7

Tijelo je bačeno u vis brzinom $v_0 = 3m/s$ s početnog položaja $y_0 = 12m$. Uz pretpostavku da je $g = 9.81m/s^2$ i da nema otpora, odredite:

(i) jednadžbu gibanja tog tijela,

(ii) brzinu v u trenutku t,

(iii) vrijeme za koje će tijelo opet biti na početnoj visini,

(iv) vrijeme pada tijela na površinu zemlje.

(i) Jednadžba gibanja: $y = -g\frac{t^2}{2} + v_0 t + y_0$

$$y = -9.81\frac{t^2}{2} + 3t + 12$$

(ii) Brzina: $v = -gt + v_0$

$$v = -9.81t + 3$$

Primjer 7

(iii) $y(t) = 12, t = ?$

Primjer 7

(iii) $y(t) = 12, t = ?$

$$12 = -9.81\frac{t^2}{2} + 3t + 12$$

Primjer 7

(iii) $y(t) = 12, t =?$

$$12 = -9.81\frac{t^2}{2} + 3t + 12$$

$$t = 0, \quad t \approx 0.61$$

Primjer 7

(iii) $y(t) = 12, t = ?$

$$12 = -9.81\frac{t^2}{2} + 3t + 12$$

$$t = 0, \quad t \approx 0.61$$

(iv) $y(t) = 0,\ t = ?$

Primjer 7

(iii) $y(t) = 12, t =?$

$$12 = -9.81\frac{t^2}{2} + 3t + 12$$

$$t = 0, \quad t \approx 0.61$$

(iv) $y(t) = 0, \; t =?$

$$0 = -9.81\frac{t^2}{2} + 3t + 12$$

Primjer 7

(iii) $y(t) = 12, t = ?$

$$12 = -9.81\frac{t^2}{2} + 3t + 12$$

$$t = 0, \quad t \approx 0.61$$

(iv) $y(t) = 0, \ t = ?$

$$0 = -9.81\frac{t^2}{2} + 3t + 12$$

$$t \approx -1.28, \quad t \approx 1.89$$