Problem površine - određeni integral

Matematika 2

Erna Begović Kovač, 2019.

Literatura: I. Gusić, Lekcije iz Matematike 2
http://matematika.fkit.hr

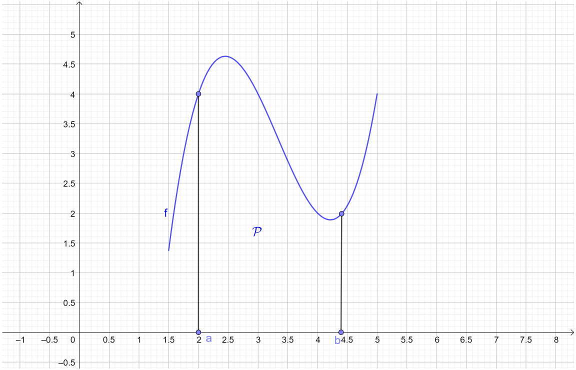
Uvod

- Formule za površinu geometrijskih likova omeđenih dužinama (ravnim linijama) pronađene su u dalekoj prošlosti (u starogrčkoj, indijskoj i arapskoj matematici).
- Puno je teže računati površinu likova omeđenih zakrivljenim linijama. Za to ćemo koristiti integrale.

Površina ispod grafa funkcije

Neka je f **pozitivna funkcija** na segmentu $[a, b]$, tj. $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in [a, b]$.

Problem: Treba odrediti površinu omeđenu grafom funkcije f, osi x i vertikalnim pravcima $x = a$ i $x = b$.



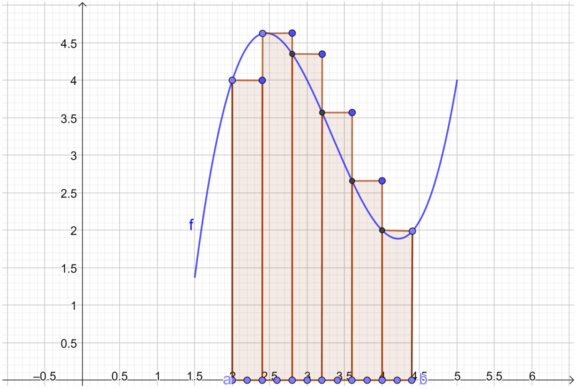
Riemannova suma

Ovakvu površinu možemo približno računati na sljedeći način:

- Segment $[a, b]$ podijelimo na n dijelova širine $\triangle x_i$.
- Na svakom podsegmentu $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, odaberemo točku x_i^* (npr. uzmemo točku koja je na sredini podsegmenta).
- Vrijednost $f(x_i^*)\triangle x_i$ aproksimira površinu nad $[x_{i-1}, x_i]$.
- Suma $S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\triangle x_i$ aproksimira površinu nad $[a, b]$.

  Zbroj S nazivamo **Riemannova suma**.

Riemannova suma



Što su pravokutnici uži, Riamannova suma bolje aproksimira površinu pod grafom funkcije.

Određeni integral je granični slučaj ovakvih suma, kada širina intervala teži u 0.

Određeni integral pozitivne funkcije

Tražena površina dana je izrazom

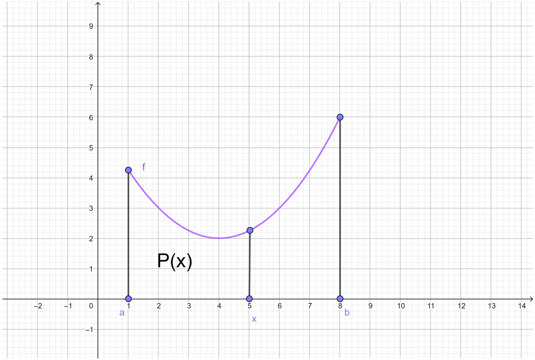
$$\mathcal{P} = \int_a^b f(x)dx.$$

Taj se izraz naziva **određeni integral** funkcije f na segmentu $[a, b]$. Brojevi a i b su **granice integrala**, a je **donja** granica, b je **gornja** granica.

Funkcija površine

Funkcija površine $P(x)$ za $a \leq x \leq b$ definiran se kao

$$P(x) = \text{površina ispod grafa od } a \text{ do } x.$$



Vrijedi

- $P(a) = 0$,
- $P(b) = \mathcal{P} = \int_a^b f(x)dx$.

Primjer 1

Odredite funkciju $P(x)$ ako je $f(x) = x$, $a = 1$.

Diferencijal površine

Za prirast površine $\triangle P(x) = P(x + \triangle x) - P(x)$ vrijedi

$$\triangle P(x) \approx f(x)\triangle x.$$

Iz toga slijedi formula za diferencijal površine

$$dP(x) = f(x)dx.$$

Ovu vezu možemo zapisati kao

$$\frac{dP(x)}{dx} = f(x), \quad \text{tj. } P'(x) = f(x).$$

Newton-Leibnitzova formula

Neka je F neka primitivna funkcija funkcije f. Tada je $P(x) = F(x) + C$. Vrijedi

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= P(b) = P(b) - 0 \\ &= P(b) - P(a) \\ &= (F(b) - C) - (F(a) - C) \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Stoga je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

gdje je F <u>bilo koja</u> primitivna funkcija od f. (Razlika $F(b) - F(a)$ ne ovisi o tome koji smo F izabrali.)

Izraz $F(b) - F(a)$ često pišemo kao $F(x)\Big|_a^b$ pa je

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Primjer 2

Odredite površinu ispod sinusoide ($f(x) = \sin x$) za $0 \leq x \leq \pi$.

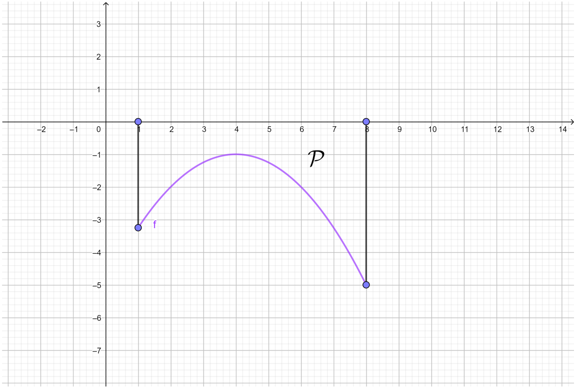
Primjer 3

Izrazite funkciju površine P u ovisnosti o bilo kojoj primitivnoj funkciji F od f.

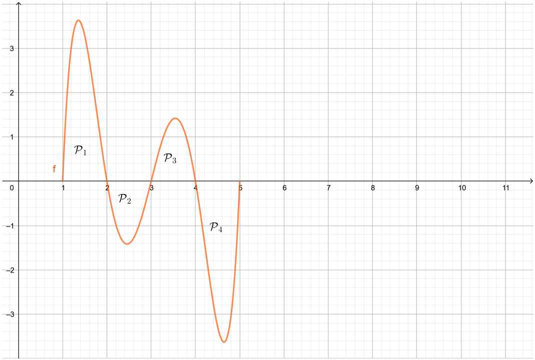
Određeni integral negativne funkcije

Neka je f **negativna funkcija** na segmentu $[a, b]$, tj. $f(x) \leq 0$ za svaki $x \in [a, b]$. Onda definiramo

$$\int_a^b f(x)dx = -\mathcal{P}.$$



Određeni integral opće funkcije



$$\int_a^b f(x)dx = \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_4$$

Općenito,

$$\int_a^b f(x)dx = (\text{zbroj površina iznad osi } x) - (\text{zbroj površina ispod osi } x)$$

Svojstva određenog integrala

- $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ za $a \leq c \leq b$

Svojstva određenog integrala

- $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- Newton-Leibnitzova formula

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

vrijedi za svaki određeni integral, bez obzira na funkciju f i granice integracije, i za svaku primitivnu funkciju F od f.

Primjer 4

Geometrijski interpretirajte i izračunajte

(i) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$,

(ii) $\displaystyle\int_{-3}^{2} (x^2 - 2) dx$.

Zadatci

1. Geometrijski interpretirajte i izračunajte
$$\int_0^{\pi} \cos x dx.$$
2. Objasnite zašto za bilo koju neparnu funkciju f i za bilo koji $a \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$
3. Objasnite zašto za bilo koju parnu funkciju f i za bilo koji $a \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^{a} f(x)dx.$$

Zadatci

4. Geometrijski interpretirajte, procijenite i izračunajte
   (i) $\int_0^1 (x^2 + 6x + 8)dx$,
   (ii) $\int_{-1}^2 (x-1)^3 dx$,
   (iii) $\int_{-1}^2 (x-1)(x+1)(x-2)dx$,
   (iv) $\int_0^4 |x-3|dx$.
5. Izračunajte površinu lika omeđenog parabolom $y = 2x - x^2$ i pravcima $x = 0$, $x = 2$ i $y = 0$.