Problem površine
- određeni integral

Matematika 2

Erna Begović Kovač

http://matematika.fkit.hr

Uvod

- Formule za površinu geometrijskih likova omeđenih dužinama (ravnim linijama) potječu još iz starogrčke, indijske i arapske matematike.
- Puno je teže računati površinu likova omeđenih zakrivljenim linijama. Za to ćemo koristiti integrale.

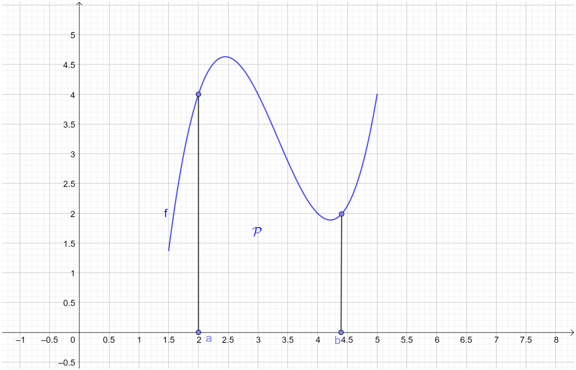
Površina ispod grafa funkcije

Neka je f **pozitivna funkcija** na intervalu $[a, b]$, tj. $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in [a, b]$.

Površina ispod grafa funkcije

Neka je f **pozitivna funkcija** na intervalu $[a, b]$, tj. $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in [a, b]$.

Problem: Treba odrediti površinu omeđenu grafom funkcije f, osi x i vertikalnim pravcima $x = a$ i $x = b$.



Riemannova suma

Ovakvu površinu možemo približno računati na sljedeći način:

- Interval $[a, b]$ podijelimo na n dijelova širine $\triangle x_i$.

Riemannova suma

Ovakvu površinu možemo približno računati na sljedeći način:

- Interval $[a, b]$ podijelimo na n dijelova širine $\triangle x_i$.
- Na svakom podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, odaberemo točku x_i^* (npr. uzmemo točku koja je na sredini podintervala ili točku koja je na početku podintervala).

Riemannova suma

- Vrijednost $f(x_i^*)\triangle x_i$ je površina pravokutnika koja aproksimira površinu nad $[x_{i-1}, x_i]$.

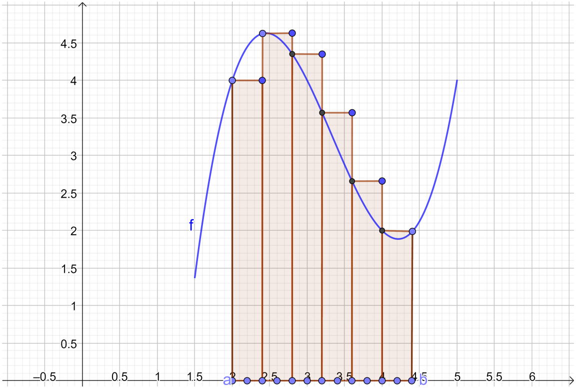
Riemannova suma

- Vrijednost $f(x_i^*)\triangle x_i$ je površina pravokutnika koja aproksimira površinu nad $[x_{i-1}, x_i]$.
- Zbroj površina pravokutnika iznad svih podintervala

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\triangle x_i$$

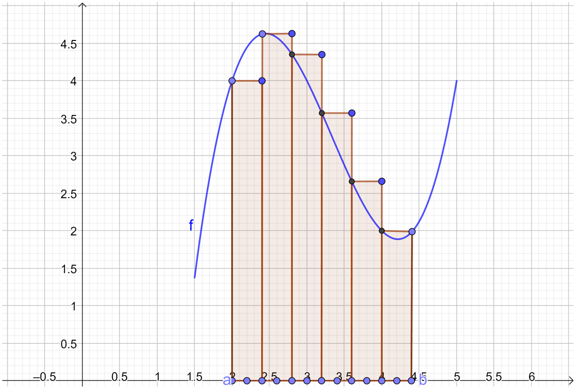
nazivamo **Riemannova suma**. Ona aproksimira površinu ispod grafa funkcije f na intervalu $[a, b]$.

Riemannova suma



Što su pravokutnici uži, manje je odstupanje između površina pravokutnika i površine ispod grafa. Stoga, što su podintervali uži, Riamannova suma bolje aproksimira površinu pod grafom funkcije.

Riemannova suma



Što su pravokutnici uži, manje je odstupanje između površina pravokutnika i površine ispod grafa. Stoga, što su podintervali uži, Riamannova suma bolje aproksimira površinu pod grafom funkcije.

Određeni integral je granični slučaj Riemannovih suma koji se dobije kada širina intervala teži u 0.

Određeni integral pozitivne funkcije

Tražena površina dana je izrazom

$$\mathcal{P} = \int_a^b f(x)dx.$$

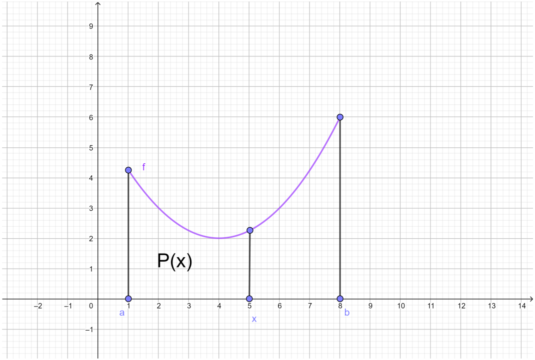
Taj se izraz naziva **određeni integral** funkcije f na intervalu $[a, b]$.

Brojevi a i b su **granice integrala**, a je **donja** granica, b je **gornja** granica.

Funkcija površine

Funkcija površine $P(x)$ za $a \leq x \leq b$ definiran se kao

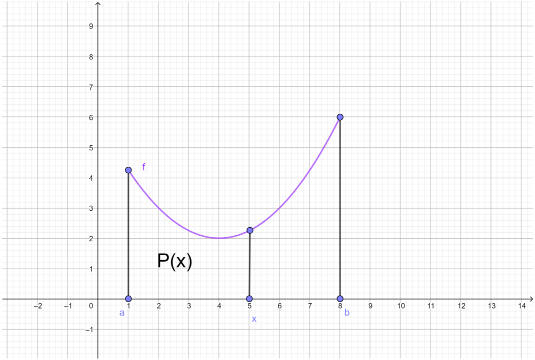
$$P(x) = \text{površina ispod grafa na intervalu } [a, x].$$



Funkcija površine

Funkcija površine $P(x)$ za $a \leq x \leq b$ definiran se kao

$$P(x) = \text{površina ispod grafa na intervalu } [a, x].$$



Vrijedi

- $P(a) = 0$,
- $P(b) = \mathcal{P} = \int_a^b f(x)dx$.

Primjer 1

Odredite funkciju $P(x)$ ako je $f(x) = x$, $a = 1$.

Primjer 1

Odredite funkciju $P(x)$ ako je $f(x) = x$, $a = 1$.

$P(x)$ je površina trapeza.

$$P(x) = \frac{x+1}{2}(x-1) = \frac{x^2-1}{2}$$

Diferencijal površine

Za mali prirast površine $\triangle P(x) = P(x + \triangle x) - P(x)$ vrijedi

$$\triangle P(x) \approx f(x)\triangle x,$$
$$\frac{\triangle P(x)}{\triangle x} \approx f(x).$$

Diferencijal površine

Za mali prirast površine $\triangle P(x) = P(x + \triangle x) - P(x)$ vrijedi

$$\triangle P(x) \approx f(x)\triangle x,$$
$$\frac{\triangle P(x)}{\triangle x} \approx f(x).$$

Iz toga slijedi formula za diferencijal površine

$$\frac{dP(x)}{dx} = f(x),$$

odnosno,

$$P'(x) = f(x).$$

$\Rightarrow$ Funkcija površine P je primitivna funkcija funkcije f.

Računanje površine

Neka je F neka (bilo koja) primitivna funkcija funkcije f. Tada je $P(x) = F(x) + C$. Vrijedi

$$\mathcal{P} = P(b)$$

Računanje površine

Neka je F neka (bilo koja) primitivna funkcija funkcije f. Tada je $P(x) = F(x) + C$. Vrijedi

$$\mathcal{P} = P(b) = P(b) - 0$$

Računanje površine

Neka je F neka (bilo koja) primitivna funkcija funkcije f. Tada je $P(x) = F(x) + C$. Vrijedi

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= P(b) = P(b) - 0 \\ &= P(b) - P(a) \end{aligned}$$

Računanje površine

Neka je F neka (bilo koja) primitivna funkcija funkcije f. Tada je $P(x) = F(x) + C$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= P(b) = P(b) - 0 \\
&= P(b) - P(a) \\
&= (F(b) + C) - (F(a) + C)
\end{aligned}$$

Računanje površine

Neka je F neka (bilo koja) primitivna funkcija funkcije f. Tada je $P(x) = F(x) + C$. Vrijedi

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= P(b) = P(b) - 0\\ &= P(b) - P(a)\\ &= (F(b) + C) - (F(a) + C)\\ &= F(b) - F(a).\end{aligned}$$

Newton-Leibnitzova formula

Stoga je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

gdje je F bilo koja primitivna funkcija od f.
(Razlika $F(b) - F(a)$ ne ovisi o tome koji smo F izabrali.)

Ova se formula naziva **Newton-Leibnitzova formula**.

Newton-Leibnitzova formula

Stoga je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

gdje je F bilo koja primitivna funkcija od f.
(Razlika $F(b) - F(a)$ ne ovisi o tome koji smo F izabrali.)

Ova se formula naziva **Newton-Leibnitzova formula**.

Izraz $F(b) - F(a)$ često pišemo kao $F(x)\Big|_a^b$ pa je

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Primjer 2

Odredite površinu ispod sinusoide $f(x) = \sin x$ za $0 \leq x \leq \pi$.

Primjer 2

Odredite površinu ispod sinusoide $f(x) = \sin x$ za $0 \leq x \leq \pi$.

$$\mathcal{P} = \int_0^{\pi} \sin x dx$$

Primjer 2

Odredite površinu ispod sinusoide $f(x) = \sin x$ za $0 \leq x \leq \pi$.

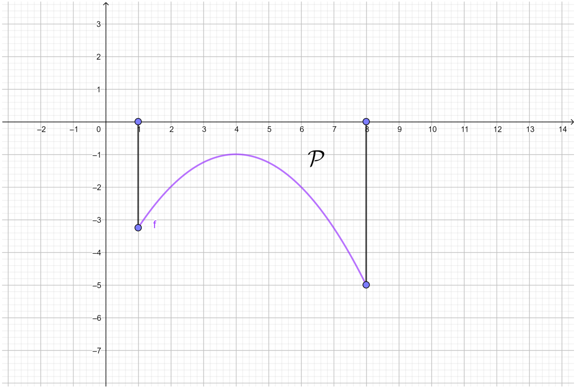
$$\mathcal{P} = \int_0^{\pi} \sin x dx$$

$$= -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2$$

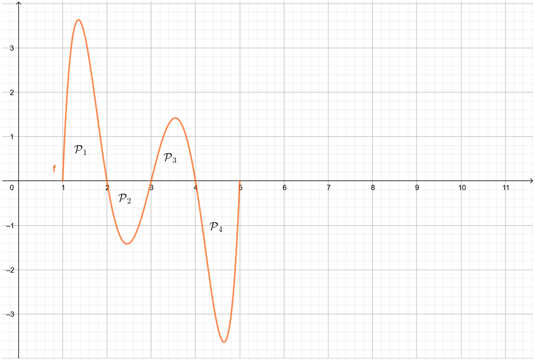
Određeni integral negativne funkcije

Neka je f **negativna funkcija** na intervalu $[a, b]$, tj. $f(x) \leq 0$ za svaki $x \in [a, b]$. Onda definiramo

$$\int_a^b f(x)dx = -\mathcal{P}.$$

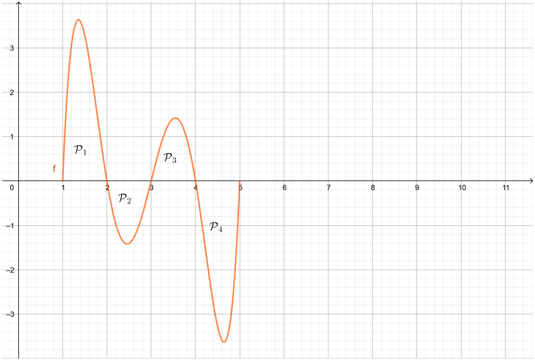


Određeni integral opće funkcije



$$\int_a^b f(x)dx = \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_4$$

Određeni integral opće funkcije



$$\int_a^b f(x)dx = \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_4$$

Općenito,

$$\int_a^b f(x)dx = (\text{zbroj površina iznad osi } x) - (\text{zbroj površina ispod osi } x)$$

Svojstva određenog integrala

- $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$

Svojstva određenog integrala

- $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$, za $a \leq c \leq b$

Svojstva određenog integrala

- $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$

Svojstva određenog integrala

- $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- Newton-Leibnitzova formula

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

vrijedi za svaki određeni integral, bez obzira na funkciju f i granice integracije, i za svaku primitivnu funkciju F od f.

Primjer 3

Geometrijski interpretirajte i izračunajte

(i) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$,

(ii) $\displaystyle\int_{-3}^{2} (x^2 - 2) dx$.

Primjer 3

Geometrijski interpretirajte i izračunajte

(i) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$,

(ii) $\displaystyle\int_{-3}^{2} (x^2 - 2) dx$.

(i)

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = -(\cos(2\pi) - \cos\pi) = -(1-(-1)) = -2$$

Primjer 3

Geometrijski interpretirajte i izračunajte

(i) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$,

(ii) $\displaystyle\int_{-3}^{2} (x^2 - 2) dx$.

(i)

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = -(\cos(2\pi) - \cos\pi) = -(1-(-1)) = -2$$

(ii)

$$\int_{-3}^{2} (x^2 - 2) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x\right)\Big|_{-3}^{2} = \frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2 - \left(\frac{(-3)^3}{3} - 2 \cdot (-3)\right)$$
$$= \frac{8}{3} - 4 - \left(-\frac{27}{3} + 6\right) = \frac{35}{3} - 10 = \frac{5}{3}$$

Zadatci

1. Geometrijski interpretirajte i izračunajte

$$\int_0^\pi \cos x dx.$$

Zadatci

1. Geometrijski interpretirajte i izračunajte
$$\int_0^{\pi} \cos x dx.$$

2. Objasnite zašto za bilo koju neparnu funkciju f i za bilo koji $a \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$\int_{-a}^{a} f(x) dx = 0.$$

Zadatci

1. Geometrijski interpretirajte i izračunajte
$$\int_0^{\pi} \cos x dx.$$

2. Objasnite zašto za bilo koju neparnu funkciju f i za bilo koji $a \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

3. Objasnite zašto za bilo koju parnu funkciju f i za bilo koji $a \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^{a} f(x)dx.$$

Zadatci

4. Geometrijski interpretirajte, procijenite i izračunajte

   (i) $\displaystyle\int_0^1 (x^2 + 6x + 8)dx$,

   (ii) $\displaystyle\int_{-1}^2 (x-1)^3 dx$,

   (iii) $\displaystyle\int_{-1}^2 (x-1)(x+1)(x-2)dx$,

   (iv) $\displaystyle\int_0^4 |x-3| dx$.

Zadatci

4. Geometrijski interpretirajte, procijenite i izračunajte
   (i) $\displaystyle\int_0^1 (x^2 + 6x + 8)dx$,
   (ii) $\displaystyle\int_{-1}^2 (x-1)^3 dx$,
   (iii) $\displaystyle\int_{-1}^2 (x-1)(x+1)(x-2)dx$,
   (iv) $\displaystyle\int_0^4 |x-3|dx$.
5. Izračunajte površinu lika omeđenog parabolom $y = 2x - x^2$ i pravcem $y = 0$.