Metode računanja određenog integrala. Nepravi integral

Matematika 2

Erna Begović Kovač

http://matematika.fkit.hr

Uvod

- Metode računanja određenog integrala — Vidjet ćemo kako se metode računanja neodređenog integrala mogu primijeniti na određeni integral.
- Nepravi integral — proširenje pojma određenog integrala.

Parcijalna integracija

Parcijalnu integraciju u određenom integralu možemo provesti na dva načina.

1) Možemo korisiti formulu parcijalne integracije za neodređeni integral

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Parcijalna integracija

Parcijalnu integraciju u određenom integralu možemo provesti na dva načina.

1) Možemo korisiti formulu parcijalne integracije za neodređeni integral

$$\int u dv = uv - \int v du$$

2) ili formulu za izravnu parcijalnu integraciju dređenog integrala

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Napomena: Granice a i b u gornjoj formuli odnose se na varijablu x.

Primjer 1

Izračunajte $\int_0^3 xe^{-x} dx$.

Primjer 1

Izračunajte $\int_0^3 xe^{-x}dx$.

1. način:

Za neodređeni integral imamo

$$\int xe^{-x}dx = \left[u = x, dv = e^{-x}dx; du = dx, v = -e^{-x}\right]$$
$$= -xe^{-x} - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

Primjer 1

Izračunajte $\int_0^3 xe^{-x}dx$.

1. način:

Za neodređeni integral imamo

$$\int xe^{-x}dx = \left[u = x, dv = e^{-x}dx; du = dx, v = -e^{-x}\right]$$
$$= -xe^{-x} - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

Stoga je $-xe^{-x} - e^{-x}$ primitivna funkcija funkcije xe^{-x}. Po Newton-Leibnitzovoj formuli $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$ dobijemo

$$\int_0^3 xe^{-x}dx = (-xe^{-x} - e^{-x})\Big|_0^3 = -4e^{-3} + 1.$$

Primjer 1

Izračunajte $\int_0^3 xe^{-x}dx$.

2. način:

Koristimo formulu $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$.

Primjer 1

Izračunajte $\int_0^3 xe^{-x} dx$.

2. način:

Koristimo formulu $\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$.

$$\int_0^3 xe^{-x} dx = \left[u = x, dv = e^{-x} dx; du = dx, v = -e^{-x}\right]$$
$$= -xe^{-x}\Big|_0^3 - \int_0^3 -e^{-x} dx = -3e^{-3} - e^{-x}\Big|_0^3$$
$$= -3e^{-3} - (e^{-3} - 1) = -4e^{-3} + 1.$$

Supstitucija

Kao i parcijalnu integraciju, tako i supstituciju u određenom integralu možemo provesti na dva načina.

1) Možemo riješiti neodređeni integral, a potom uvrstiti granice po Newton-Leibnitzovoj formuli

Supstitucija

Kao i parcijalnu integraciju, tako i supstituciju u određenom integralu možemo provesti na dva načina.

1) Možemo riješiti neodređeni integral, a potom uvrstiti granice po Newton-Leibnitzovoj formuli

2) ili možemo raditi “pravu” supstituciju pri kojoj zamijenimo i granice.

U drugom slučaju imamo

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx = \left[t = \phi(x), dt = \phi'(x)dx\right] = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt.$$

Napomena: Kod supstitucije je potrebno paziti da funkcija ϕ ima inverz.

Primjer 2

Izračunajte $\int_{-1}^{2} 2x\sqrt{x^2-1}dx$.

Primjer 2

Izračunajte $\int_{-1}^{2} 2x\sqrt{x^2-1}dx$.

1. način:

Za neodređeni integral imamo

$$\int 2x\sqrt{x^2-1}dx = \left[t = x^2-1, dt = 2xdx\right]$$
$$= \int \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2-1)^3} + C.$$

Primjer 2

Izračunajte $\displaystyle\int_{-1}^{2} 2x\sqrt{x^2-1}dx.$

1. način:

Za neodređeni integral imamo

$$\begin{aligned}\int 2x\sqrt{x^2-1}dx &= \left[t = x^2-1, dt = 2xdx\right] \\ &= \int \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}\sqrt{t^3}+C = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2-1)^3}+C.\end{aligned}$$

Onda po formuli $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$ vrijedi

$$\int_{-1}^{2} 2x\sqrt{x^2-1}dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2-1)^3}\Big|_{-1}^{2} = 2\sqrt{3}.$$

Primjer 2

Izračunajte $\int_{-1}^{2} 2x\sqrt{x^2-1}dx$.

2. način:

Odmah ćemo supstituirati i granice pa imamo

Primjer 2

Izračunajte $\int_{-1}^{2} 2x\sqrt{x^2-1}dx$.

2. način:

Odmah ćemo supstituirati i granice pa imamo

$$\int_{-1}^{2} 2x\sqrt{x^2-1}dx = \left[t = x^2-1, dt = 2xdx\right]$$

$$\left[-1 \to (-1)^2 - 1 = 0,\right.$$

$$\left. 2 \to 2^2 - 1 = 3\right]$$

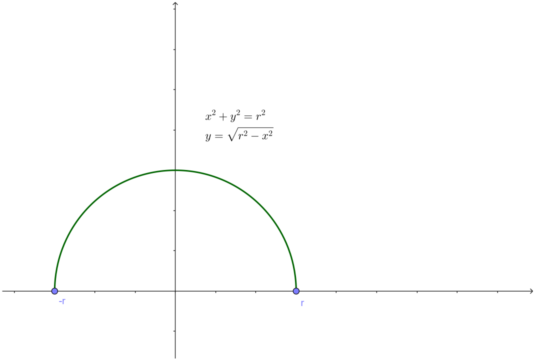
$$= \int_0^3 \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}\sqrt{t^3}\Big|_0^3 = 2\sqrt{3}.$$

Primjer 3

Koristeći integralni račun izračunajte površinu polukruga radijusa r.

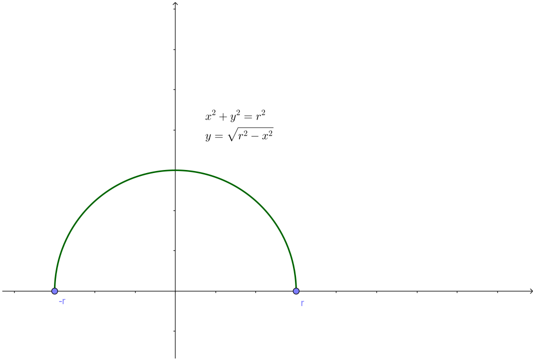
Primjer 3

Koristeći integralni račun izračunajte površinu polukruga radijusa r.



Primjer 3

Koristeći integralni račun izračunajte površinu polukruga radijusa r.



$$P = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx = [x = r \sin t, dx = r \cos t dt] = \ldots = \frac{1}{2} r^2 \pi.$$

Nepravi integral

- Nepravi integral je poopćenje određenog integrala

$$\int_a^b f(x)dx$$

kada područje integracije ima barem jednu beskonačnu granicu ($a = -\infty$ ili/i $b = \infty$)

ili kada funkcija unutar područja integracije nije omeđena (npr. ima vertikalnu asimptotu).

Nepravi integral

- Nepravi integral je poopćenje određenog integrala

$$\int_a^b f(x)dx$$

  kada područje integracije ima barem jednu beskonačnu granicu ($a = -\infty$ ili/i $b = \infty$)

  ili kada funkcija unutar područja integracije nije omeđena (npr. ima vertikalnu asimptotu).

- Neprave integrale rješavamo pomoću limesa.

Nepravi integral

- Nepravi integral je poopćenje određenog integrala

$$\int_a^b f(x)dx$$

kada područje integracije ima barem jednu beskonačnu granicu ($a = -\infty$ ili/i $b = \infty$)

ili kada funkcija unutar područja integracije nije omeđena (npr. ima vertikalnu asimptotu).

- Neprave integrale rješavamo pomoću limesa.

- Ako je nepravi integral konačan, kažemo da **konvergira**, a u protivnom **divergira**.

Beskonačne granice

- $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$

Beskonačne granice

- $\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$
- $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$

Beskonačne granice

- $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$
- $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx, \qquad c \in \mathbb{R}$

Beskonačne granice

- $\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$
- $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx, \qquad c \in \mathbb{R}$

Napomena: U zadnjem slučaju za c možemo uzeti bilo koji realni broj. Dobro je uzeti neki c s kojim se lako računa, npr. $c = 0$.

Primjer 4

Izračunajte $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4}$.

Primjer 4

Izračunajte $\int_1^\infty \frac{dx}{x^4}$.

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^4} = \lim_{b\to\infty} (-\frac{1}{3x^3})\Big|_1^b \\
&= -\frac{1}{3} \lim_{b\to\infty} (\frac{1}{b^3} - 1) = -\frac{1}{3} \cdot (-1) = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Primjer 5

Izračunajte $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Primjer 5

Izračunajte $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \\
&= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} \\
&= \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_{a}^{0} + \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_{0}^{b} \\
&= \lim_{a\to-\infty} (0 - \operatorname{arctg} a) + \lim_{b\to\infty} (\operatorname{arctg} b - 0) \\
&= (0 - (-\frac{\pi}{2})) + (\frac{\pi}{2} - 0) = \pi
\end{aligned}
$$

Beskonačna podintegralna funkcija

- f nije definirana u jednom rubu intervala:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a+} \int_c^b f(x)dx$$
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b-} \int_a^c f(x)dx$$

Beskonačna podintegralna funkcija

- f nije definirana u jednom rubu intervala:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a+} \int_c^b f(x)dx$$
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b-} \int_a^c f(x)dx$$

- f nije definirana u nekoj točki $c \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c_1 \to c-} \int_a^{c_1} f(x)dx + \lim_{c_2 \to c+} \int_{c_2}^b f(x)dx$$

Primjer 6

Izračunajte $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Primjer 6

Izračunajte $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{a\to 0} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_a^1 \\
&= 2\lim_{a\to 0}(1-\sqrt{a}) = 2(1-0) = 2
\end{aligned}
$$

Primjer 7

Izračunajte $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x}$.

Primjer 7

Izračunajte $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x}$.

$$\begin{aligned}
&= \lim_{c_1 \to 0} \int_{-1}^{c_1} \frac{dx}{x} + \lim_{c_2 \to 0} \int_{c_2}^{2} \frac{dx}{x} \\
&= \lim_{c_1 \to 0} \ln|x| \Big|_{-1}^{c_1} + \lim_{c_2 \to 0} \ln|x| \Big|_{c_2}^{2} \\
&= \lim_{c_1 \to 0} (\ln|c_1| - \ln 1) + \lim_{c_2 \to 0} (\ln 2 - \ln|c_2|) \\
&= (-\infty - 0) + (\ln 2 - (-\infty)) = \infty - \infty + \ln 2
\end{aligned}$$

Primjer 7

Izračunajte $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x}$.

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{c_1 \to 0} \int_{-1}^{c_1} \frac{dx}{x} + \lim_{c_2 \to 0} \int_{c_2}^{2} \frac{dx}{x} \\
&= \lim_{c_1 \to 0} \ln|x| \Big|_{-1}^{c_1} + \lim_{c_2 \to 0} \ln|x| \Big|_{c_2}^{2} \\
&= \lim_{c_1 \to 0} (\ln|c_1| - \ln 1) + \lim_{c_2 \to 0} (\ln 2 - \ln|c_2|) \\
&= (-\infty - 0) + (\ln 2 - (-\infty)) = \infty - \infty + \ln 2
\end{aligned}
$$

Integral divergira.

Zadatci

1. Izračunajte
   (i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$,
   (ii) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{(\ln x)^3}{x} dx$.

Zadatci

2. Geometrijski interpretirajte i izračunajte

$$\int_{-\infty}^{0} e^{3x}\,dx$$

Zadatci

2. Geometrijski interpretirajte i izračunajte

$$\int_{-\infty}^{0} e^{3x} dx$$

3. Izračunajte površinu ispog grafa funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2}$ za $x \geq 1$.