Neke primjene određenog integrala u inženjerstvu

Matematika 2

Erna Begović Kovač

http://matematika.fkit.hr

Uvod

Određeni integral možemo koristiti za rješavanje sljedećih problema:

- problem težišta nehomogene žice,
- problem momenta inercije,
- određivanje rada kojeg vrši sila koja djeluje duž pravca.

Masa nehomogenog segmenta

Promatramo masu nehomogenog segmenta $[a, b]$ u ovisnosti o gustoći segmenta koja je dana funkcijom $f(x)$.

Promjena mase $\triangle m$ iznosi približno $f(x)\triangle x$, tj.

$$\triangle m \approx f(x)\triangle x.$$

Masa nehomogenog segmenta

Promatramo masu nehomogenog segmenta $[a, b]$ u ovisnosti o gustoći segmenta koja je dana funkcijom $f(x)$.

Promjena mase $\triangle m$ iznosi približno $f(x)\triangle x$, tj.

$$\triangle m \approx f(x)\triangle x.$$

Iz toga dobijemo

$$dm = f(x)dx \quad \Rightarrow \; m' = f(x),$$

pa je

$$m = \int_a^b f(x)dx.$$

Primjer 1

Funkcija gustoće segmenta $[0, 5]$ je $f(x) = x$.

(i) Grafički predočite i interpretirajte raspored mase.

(ii) Odredite ukupnu masu segmenta $[0, 5]$.

(iii) Odredite točku $c \in [0, 5]$ do koje je raspoređena polovica mase.

Primjer 1

(ii)

$$m = \int_0^5 f(x)dx = \int_0^5 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^5 = \frac{25}{2} - 0 = \frac{25}{2}$$

Primjer 1

(ii)

$$m = \int_0^5 f(x)dx = \int_0^5 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^5 = \frac{25}{2} - 0 = \frac{25}{2}$$

(iii)

$$\int_0^c f(x)dx = \frac{1}{2}m$$

Primjer 1

(ii)

$$m = \int_0^5 f(x)dx = \int_0^5 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^5 = \frac{25}{2} - 0 = \frac{25}{2}$$

(iii)

$$\int_0^c f(x)dx = \frac{1}{2}m$$

$$\int_0^c xdx = \frac{1}{2}\frac{25}{2} = \frac{25}{4}$$

$$\frac{x^2}{2}\Big|_0^c = \frac{c^2}{2} = \frac{25}{4}$$

$$c^2 = \frac{25}{2}, \quad c = \pm\frac{5}{\sqrt{2}} = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow c = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Težište sustava masa

U diskretnom slučaju (kada masa postoji samo u nekim točkama, a između je jednaka nula), ako su mase $m_1, m_2, \ldots, m_n$ smještene na pravcu u točke s koordinatama $x_1, x_2, \ldots, x_n$, onda je težište ovakvog sustava masa dano sa

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Težište segmenta

U kontinuiranom slučaju (kada je masa “razmazana” po čitavom segmentu) u formuli za težište prelazimo sa sume na integral. Masu u pojedinoj točki zamijenimo sa $f(x)$ i dobijemo

$$x_T = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}.$$

Težište segmenta

U kontinuiranom slučaju (kada je masa "razmazana" po čitavom segmentu) u formuli za težište prelazimo sa sume na integral. Masu u pojedinoj točki zamijenimo sa $f(x)$ i dobijemo

$$x_T = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}.$$

Napomena: Težište homogenog segmenta (homogene žice) je njegova sredina. To ne vrijedi ako segment nije homogen.

Primjer 1 (nastavak)

Odredite težište segmenta $[a, b] = [0, 5]$ s funkcijom gustoće mase $f(x) = x$.

Primjer 1 (nastavak)

Odredite težište segmenta $[a, b] = [0, 5]$ s funkcijom gustoće mase $f(x) = x$.

$$x_T = \frac{\int_0^5 xf(x)dx}{\int_0^5 f(x)dx} = \frac{\int_0^5 x^2 dx}{\int_0^5 xdx}$$
$$= \frac{\frac{x^3}{3}\Big|_0^5}{\frac{x^2}{2}\Big|_0^5} = \frac{\frac{125}{3}}{\frac{25}{2}} = \frac{10}{3}$$

Masa i težište beskonačnog intervala

U slučaju beskonačnog intervala, također vrijede prethodne formule za masu i težište,

$$m = \int_a^b f(x)dx, \qquad x_T = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}.$$

Primjer 2

Neka je masa razmazana na intervalu $[0, \infty\rangle$ prema pravilu za funkciju gustoće $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, za $x \geq 0$, pri čemu je $\lambda > 0$ realna konstanta. Odredite masu intervala.

Primjer 2

Neka je masa razmazana na intervalu $[0, \infty\rangle$ prema pravilu za funkciju gustoće $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, za $x \geq 0$, pri čemu je $\lambda > 0$ realna konstanta. Odredite masu intervala.

$$
\begin{aligned}
m = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&\quad [t = -\lambda x, dt = -\lambda dx, -dt = \lambda dx] \\
&= -\lim_{b\to\infty} \int_0^{-\lambda b} e^t dt = -\lim_{b\to\infty} e^t \Big|_0^{-\lambda b} \\
&= -\lim_{b\to\infty} (e^{-\lambda b} - 1) = -(0-1) = 1
\end{aligned}
$$

Moment inercije

Moment inercije (mjera tromosti pri rotaciji) I mase m oko točke udaljene r iznosi

$$I = mr^2.$$

U slučaju sustava masa, momenti inercije oko težišta sustava masa dan je formulom

$$I_T = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_T)^2 m_i.$$

Ova formula dobije se zbrajanjem formula za svaku pojedinu masu.

Moment inercije

Moment inercije (mjera tromosti pri rotaciji) I mase m oko točke udaljene r iznosi

$$I = mr^2.$$

U slučaju sustava masa, momenti inercije oko težišta sustava masa dan je formulom

$$I_T = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_T)^2 m_i.$$

Ova formula dobije se zbrajanjem formula za svaku pojedinu masu.

Prema tome, moment inercije oko težišta segmenta $[a, b]$ s funkcijom gustoće f dan je formulom

$$I_T = \int_a^b (x - x_T)^2 f(x) dx.$$

Primjer 3

Odredite moment inercije homogenog segmenta.

Primjer 3

Odredite moment inercije homogenog segmenta.

Homogenost: $f(x) = 1$, za svaki $x \in [a, b]$. Težište: $x_T = \frac{a+b}{2}$.

Stoga je

$$I_T = \int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^2 \cdot 1 dx = \cdots = \frac{(b-a)^3}{12}.$$

Primjer 3

Odredite moment inercije homogenog segmenta.

Homogenost: $f(x) = 1$, za svaki $x \in [a, b]$. Težište: $x_T = \frac{a+b}{2}$.
Stoga je

$$I_T = \int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^2 \cdot 1 dx = \cdots = \frac{(b-a)^3}{12}.$$

Ako označimo duljinu segmenta sa $L = b - a$ i uočimo da je masa segmenta $m = L$ (jednakost brojeva bez mjernih jedinica), dobijemo formulu za moment inercije homogenog štapa

$$I_T = m\frac{L^2}{12}.$$

Primjer 1 (nastavak)

Odredite moment inercije oko težišta segmenta iz Primjera 1; $[a, b] = [0, 5]$, $f(x) = x$.

Primjer 1 (nastavak)

Odredite moment inercije oko težišta segmenta iz Primjera 1; $[a, b] = [0, 5]$, $f(x) = x$.

$$I_T = \int_a^b (x - x_T)^2 f(x) dx, \qquad x_T = \frac{10}{3}$$

$$\begin{aligned} I_T &= \int_0^5 (x - \frac{10}{3})^2 x dx \\ &= \int_0^5 (x^3 - \frac{20}{3} x^2 + \frac{100}{9} x) dx \\ &= (\frac{x^4}{4} - \frac{20}{3} \frac{x^3}{3} + \frac{100}{9} \frac{x^2}{2}) \Big|_0^5 = \frac{625}{36} \end{aligned}$$

Rad sile

Rad opisuje djelovanje sile na nekom putu. U slučaju konstantne sile jednak je umnošku sile i duljine puta, $W = Fs$. U slučaju da je sila promjenljiva, problem određivanja rada rješava se pomoću integrala.

Rad sile

Rad opisuje djelovanje sile na nekom putu. U slučaju konstantne sile jednak je umnošku sile i duljine puta, $W = Fs$. U slučaju da je sila promjenljiva, problem određivanja rada rješava se pomoću integrala.

Neka je $F(x)$ sila koja djeluje u točki x. Ako je $F(x) > 0$, sila djeluje u pozitivnom smjeru, a ako je $F(x) < 0$, sila djeluje u negativnom smjeru.

Rad sile

Za dio rada $\triangle W$ koji sila napravi na putu duljine $\triangle x$ vrijedi

$$\triangle W \approx F(x)\triangle x.$$

Rad sile

Za dio rada $\triangle W$ koji sila napravi na putu duljine $\triangle x$ vrijedi

$$\triangle W \approx F(x)\triangle x.$$

Dobijemo

$$dW = F(x)dx \quad \Rightarrow \; W' = F(x),$$

pa je

$$W = \int_a^b F(x)dx.$$

Elastična opruga

Neka je u točki s koordinatom $(0, A)$ pričvršćena savršeno elastična tanka opruga, kojoj je u trenutku mirovanja vrh u ishodištu.

Oprugu stlačimo u točku $(0, A)$ i pustimo. Zbog savršene elastičnosti, vrh opruge titrat će između točaka $(0, -A)$ i $(0, A)$.

Pretpostavimo da je sustav izoliran, tj. da je jedina sila koja se javlja sila napetosti opruge. Vrijednost te sile u točki x označimo $F(x)$.

Elastična opruga

Pokusom se pokaže da je sila napetosti uvijek usmjerena prema ishodištu pa su x i $F(x)$ suprotnog predznaka, te da je sila napetosti proporcionalna udaljenost vrha opruge od ishodišta.

Elastična opruga

Pokusom se pokaže da je sila napetosti uvijek usmjerena prema ishodištu pa su x i $F(x)$ suprotnog predznaka, te da je sila napetosti proporcionalna udaljenost vrha opruge od ishodišta.

Iz prethodnog dobijemo jednadžbu za silu napetosti

$$F(x) = -kx,$$

gdje je $k > 0$ konstanta koja ovisi o materijalu opruge.

Primjer 4

Izračunajte i komentirajte rad sile napetosti elastične opruge na putu od a do b.

Primjer 4

Izračunajte i komentirajte rad sile napetosti elastične opruge na putu od a do b.

$$W = \int_a^b (-kx)dx = -k\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = -k(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}) = \frac{k}{2}(a^2 - b^2)$$

Primjer 4

Izračunajte i komentirajte rad sile napetosti elastične opruge na putu od a do b.

$$W = \int_a^b (-kx)dx = -k\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = -k(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}) = \frac{k}{2}(a^2 - b^2)$$

Rad je pozitivan ako je $a^2 - b^2 > 0$, tj. ako je $|a| > |b|$.
Rad je negativan ako je $a^2 - b^2 < 0$, tj. ako je $|a| < |b|$.