

Funkcija dvije varijable

Matematika 2

Erna Begović Kovač, 2019.

Literatura: I. Gusić, Lekcije iz Matematike 2

<http://matematika.fkit.hr>

Uvod

- Funkcija jedna varijable: $f(x)$
- **Funkcija dvije varijable:** $f(x, y)$
- Funkcija n varijabli: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Funkciju više varijabli koristimo kada jedna veličina ovisi o više drugih, međusobno nezavisnih, veličina, npr. $z = x + y$. Onda pišemo

$$z = f(x, y), \quad f(x, y) = x + y.$$

Domena

Domena (područje definicije) \mathcal{D} funkcije $f(x, y)$ je skup uređenih parova (a, b) za koje je funkcija definirana.

Domena funkcije dvije varijable je podskup koordinatne ravnine

$$\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Maksimalna domena na kojoj funkcija ima smisla naziva se **prirodna domena**.

Primjer 1

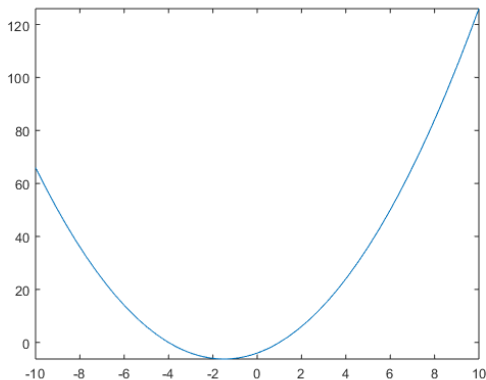
Odredite prirodnu domenu sljedećih funkcija:

(i) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$

(ii) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

Graf

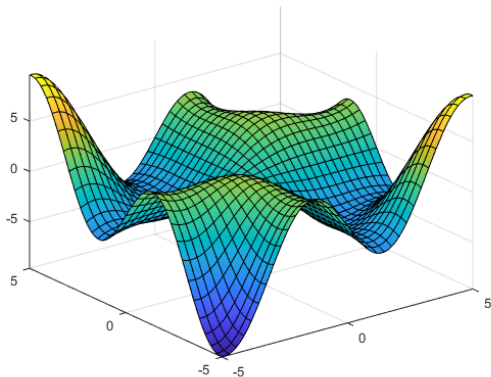
Graf funkcije jedne varijable $f(x)$ je krivulja u ravnini s jednažbom $y = f(x)$.



$$f(x) = x^2 + 3x - 4$$

Graf

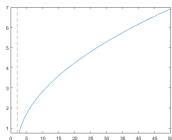
Graf funkcije **dvije varijable** $f(x, y)$ je ploha u prostoru s
jednadžbom $z = f(x, y)$.



$$f(x, y) = x \sin y + y \sin x$$

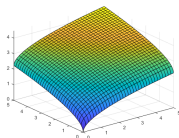
Graf

Kod funkcije **jedne varijable** ortogonalna projekcija grafa na x-os je domena funkcije.



$$f(x) = \sqrt{x-2}$$

Kod funkcije **dvije varijable** ortogonalna projekcija grafa na xy-ravninu je domena funkcije.



$$f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

Primjer 2 - Jednadžba kugline plohe

Zadana je funkcija

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Skicirajte graf ove funkcije.

Graf je ploha s jednadžbom $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. To možemo zapisati i kao

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z > 0.$$

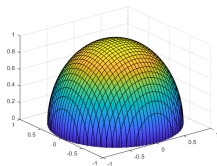
Sjetimo se da je

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

udaljenost točke (x, y, z) od ishodišta. To znači da je točka (x, y, z) na grafu funkcije f ako i samo ako je njena udaljenost od ishodišta jednaka 1.

Dakle, graf funkcije f je gornja polovica sfere polumjera 1.

Primjer 2 - Jednadžba kugline plohe



Ako izbacimo uvjet $z > 0$, dobijemo čitavu sferu

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

radijusa 1 sa središtem u ishodištu.

Uočimo sličnost s jednadžbom kružnice radijusa 1 sa središtem u ishodištu

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Derivacija

Prisjetimo se derivacije funkcije jedne varijable $f(x)$ u točki x_0

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

To pišemo i kao

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Parcijalne derivacije

Kod funkcije **dvije varijable** definiramo **parcijalne derivacije** u točki (x_0, y_0) .

- Parcijalna derivacija po x

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Ovdje y_0 stoji, a x se mijenja oko x_0 .

- Parcijalna derivacija po y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Ovdje x_0 stoji, a y se mijenja oko y_0 .

Koristimo i oznake

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Fizikalno značenje parcijalnih derivacija

Kod funkcije jedne varijable, $y = f(x)$, derivacija f' opisuje promjenu varijable y u ovisnosti o promjeni varijable x .

Kod funkcije dvije varijable, $z = f(x, y)$, parcijalna derivacija $\frac{\partial f}{\partial x}$ opisuje promjenu varijable z u ovisnosti o promjeni x , uz stalnu vrijednost y .

Obrnuto, parcijalna derivacija $\frac{\partial f}{\partial y}$ opisuje promjenu varijable z u ovisnosti o promjeni y , uz stalnu vrijednost x .

Računanje parcijalnih derivacija

Parcijalna derivacija funkcije $f(x, y)$ po x računa se tako da varijablu y smatramo konstantom i deriviramo po x kao da se radi o funkciji jedne varijable. I obrnuto za parcijalnu derivaciju po y .

Primjer 3

Neka je $f(x, y) = x^2y + 3y^2$. Odredite $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 3)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 6y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) = 12$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) = 22$$

Parcijalne derivacije višeg reda

Funkcija jedne varijable: $f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}$

Funkcija **dvije varijable**:

$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ - derivacija po x dva puta

$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ - derivacija po y dva puta

$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ - derivacija prvo po x , onda po y

$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ - derivacija prvo po y , onda po x

Primjer 4

Odredite sve druge parcijalne derivacije funkcije

$$f(x, y) = x^3y + x \sin y.$$

$$f_x(x, y) = 3x^2y + \sin y, \quad f_y(x, y) = x^3 + x \cos y$$

$$f_{xx}(x, y) = 6xy$$

$$f_{yx}(x, y) = 3x^2 + \cos y$$

$$f_{yy}(x, y) = -x \sin y$$

$$f_{xy}(x, y) = 3x^2 + \cos y$$

Schwarzov teorem

U prethodnom primjeru dobili smo

$$f_{yx}(x, y) = f_{xy}(x, y),$$

tj.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

To vrijedi za svaku funkciju $f(x, y)$.

Ovo pravilo poznato je pod nazivom **Schwarzov teorem**.

Zadatci

1. Odredite prve parcijalne derivacije funkcije

$$f(x, y) = \ln(2x + y - 2).$$

2. Odredite druge parcijalne derivacije funkcije

$$f(x, y) = 2x^3 - xy^2$$

3. Odredite prirodnu domenu funkcije

$$f(x, y) = \arcsin(x + y^2).$$