Funkcija dvije varijable

Matematika 2

Erna Begović Kovač

http://matematika.fkit.hr

Uvod

- Funkcija jedna varijable: $f(x)$
- **Funkcija dvije varijable**: $f(x, y)$
- Funkcija n varijabli: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Uvod

- Funkcija jedna varijable: $f(x)$
- **Funkcija dvije varijable**: $f(x, y)$
- Funkcija n varijabli: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Funkciju više varijabli koristimo kada jedna veličina ovisi o više drugih, međusobno nezavisnih, veličina.
Npr. ako je $z = x + y$, onda pišemo

$$z = f(x, y), \quad f(x, y) = x + y.$$

Domena

- **Domena** (područje definicije) $\mathcal{D}$ funkcije $f(x, y)$ je skup uređenih parova (a, b) za koje je funkcija definirana.

- Domena funkcije dvije varijable je podskup koordinatne ravnine
$$\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

- Maksimalna domena na kojoj funkcija ima smisla naziva se **prirodna domena**.

Primjer 1

Odredite prirodnu domenu sljedećih funkcija:

(i) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$,

(ii) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Primjer 1

Odredite prirodnu domenu sljedećih funkcija:

(i) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$,

(ii) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(i)

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 \leq 1$$

Primjer 1

Odredite prirodnu domenu sljedećih funkcija:

(i) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$,

(ii) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(i)

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 \leq 1$$

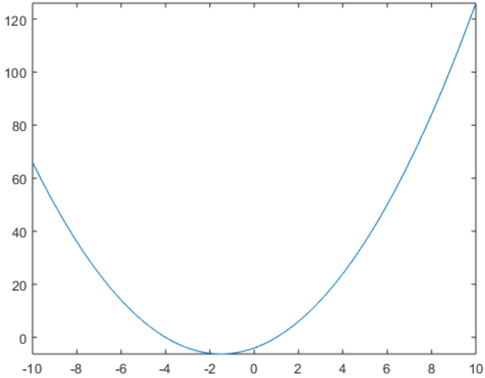
(ii)

$$\sqrt{x^2 + y^2} \neq 0, \quad x^2 + y^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow\; x^2 + y^2 > 0 \;\Rightarrow\; (x,y) \neq (0,0)$$

Graf

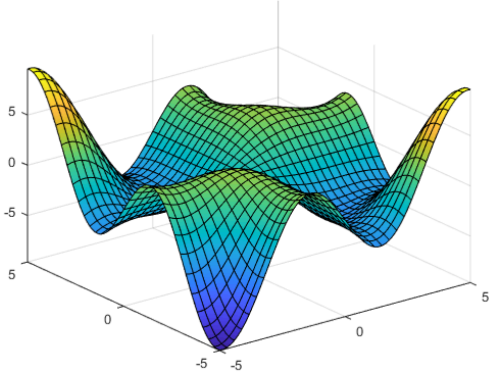
Graf funkcije jedne varijable $f(x)$ je krivulja u ravnini s jednadžbom $y = f(x)$.



$$f(x) = x^2 + 3x - 4$$

Graf

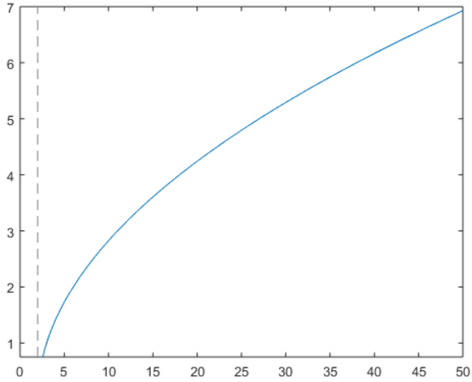
Graf funkcije dvije varijable $f(x,y)$ je **ploha u prostoru** s jednadžbom $z = f(x,y)$.



$$f(x,y) = x \sin y + y \sin x$$

Veza grafa i domene

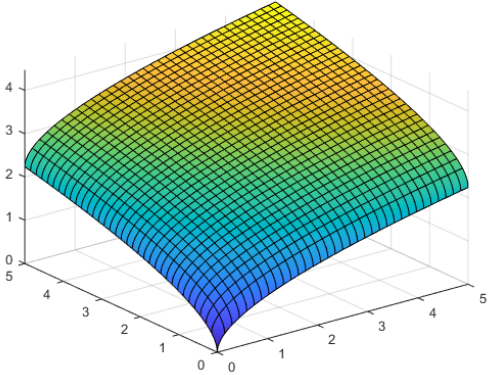
Kod funkcije jedne varijable ortogonalna projekcija grafa na x-os je domena funkcije.



$$f(x) = \sqrt{x-2}$$

Veza grafa i domene

Kod funkcije dvije varijable ortogonalna projekcija grafa na xy-ravninu je domena funkcije.



$$f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

Primjer 2 - Jednadžba kugline plohe

Zadana je funkcija

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Skicirajte graf ove funkcije.

Primjer 2 - Jednadžba kugline plohe

Zadana je funkcija

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Skicirajte graf ove funkcije.

Graf je ploha s jednadžbom $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, tj.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0.$$

Primjer 2 - Jednadžba kugline plohe

Zadana je funkcija

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Skicirajte graf ove funkcije.

Graf je ploha s jednadžbom $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, tj.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0.$$

Sjetimo se da je

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = d$$

udaljenost točke (x, y, z) od ishodišta.

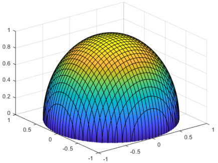
Imamo

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1.$$

To znači da je točka (x, y, z) na grafu funkcije f ako i samo ako je njena udaljenost od ishodišta jednaka 1.

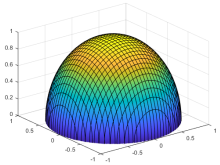
Primjer 2 - Jednadžba kugline plohe

Dakle, graf funkcije f je gornja polovica ($z \geq 0$) sfere polumjera 1.



Primjer 2 - Jednadžba kugline plohe

Dakle, graf funkcije f je gornja polovica ($z \geq 0$) sfere polumjera 1.



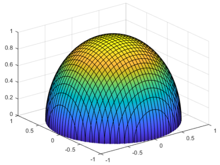
Ako izbacimo uvjet $z \geq 0$, dobijemo čitavu sferu

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

radijusa 1 sa središtem u ishodištu.

Primjer 2 - Jednadžba kugline plohe

Dakle, graf funkcije f je gornja polovica ($z \geq 0$) sfere polumjera 1.



Ako izbacimo uvjet $z \geq 0$, dobijemo čitavu sferu

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

radijusa 1 sa središtem u ishodištu.

Uočimo sličnost s jednadžbom kružnice radijusa 1 sa središtem u ishodištu

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Derivacija

Prisjetimo se derivacije funkcije jedne varijable $f(x)$ u točki x_0

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}.$$

To pišemo i kao

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}.$$

Parcijalne derivacije

Kod funkcije dvije varijable definiramo **parcijalne derivacije** u točki (x_0, y_0).

- Parcijalna derivacija po x

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\triangle x}$$

Ovdje je varijabla y fiksna, a x se mijenja oko x_0.

Parcijalne derivacije

Kod funkcije dvije varijable definiramo **parcijalne derivacije** u točki (x_0, y_0).

- Parcijalna derivacija po x

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\triangle x}$$

  Ovdje je varijabla y fiksna, a x se mijenja oko x_0.

- Parcijalna derivacija po y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)}{\triangle y}$$

  Ovdje je varijabla x fiksna, a y se mijenja oko y_0.

Parcijalne derivacije

Kod funkcije dvije varijable definiramo **parcijalne derivacije** u točki (x_0, y_0).

- Parcijalna derivacija po x

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\triangle x}$$

Ovdje je varijabla y fiksna, a x se mijenja oko x_0.

- Parcijalna derivacija po y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)}{\triangle y}$$

Ovdje je varijabla x fiksna, a y se mijenja oko y_0.

Koristimo i oznake

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Fizikalno značenje parcijalnih derivacija

Kod funkcije jedne varijable, $y = f(x)$, derivacija f' opisuje promjenu varijable y u ovisnosti o promjeni varijable x.

Fizikalno značenje parcijalnih derivacija

Kod funkcije jedne varijable, $y = f(x)$, derivacija f' opisuje promjenu varijable y u ovisnosti o promjeni varijable x.

Kod funkcije dvije varijable, $z = f(x, y)$, parcijalna derivacija $\frac{\partial f}{\partial x}$ opisuje promjenu varijable z u ovisnosti o promjeni x, uz stalnu vrijednost y.

Obrnuto, parcijalna derivacija $\frac{\partial f}{\partial y}$ opisuje promjenu varijable z u ovisnosti o promjeni y, uz stalnu vrijednost x.

Računanje parcijalnih derivacija

Parcijalna derivacija funkcije $f(x, y)$ po x računa se tako da varijablu y smatramo konstantom i deriviramo po x kao da se radi o funkciji jedne varijable. I obrnuto za parcijalnu derivaciju po y.

Računanje parcijalnih derivacija

Parcijalna derivacija funkcije $f(x, y)$ po x računa se tako da varijablu y smatramo konstantom i deriviramo po x kao da se radi o funkciji jedne varijable. I obrnuto za parcijalnu derivaciju po y.

Primjer 3

Neka je $f(x, y) = x^2y + 3y^2$. Odredite $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 3)$.

Računanje parcijalnih derivacija

Parcijalna derivacija funkcije $f(x, y)$ po x računa se tako da varijablu y smatramo konstantom i deriviramo po x kao da se radi o funkciji jedne varijable. I obrnuto za parcijalnu derivaciju po y.

Primjer 3

Neka je $f(x, y) = x^2y + 3y^2$. Odredite $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 3)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(2,3) = 12$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 6y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2,3) = 22$$

Parcijalne derivacije višeg reda

Funkcija jedne varijable: $f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2}$

Funkcija dvije varijable:

$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ - derivacija po x dva puta

$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ - derivacija po y dva puta

Parcijalne derivacije višeg reda

Funkcija jedne varijable: $f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}$

Funkcija dvije varijable:

$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ - derivacija po x dva puta

$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ - derivacija po y dva puta

$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ - derivacija prvo po x, onda po y

$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ - derivacija prvo po y, onda po x

Primjer 4

Odredite sve druge parcijalne derivacije funkcije
$f(x, y) = x^3 y + x \sin y$.

Primjer 4

Odredite sve druge parcijalne derivacije funkcije
$f(x, y) = x^3 y + x \sin y$.

$$f_x(x, y) = 3x^2 y + \sin y, \quad f_y(x, y) = x^3 + x \cos y$$

Primjer 4

Odredite sve druge parcijalne derivacije funkcije
$f(x, y) = x^3 y + x \sin y$.

$$f_x(x, y) = 3x^2 y + \sin y, \quad f_y(x, y) = x^3 + x \cos y$$

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= 6xy \\ f_{yx}(x, y) &= 3x^2 + \cos y \\ f_{yy}(x, y) &= -x \sin y \\ f_{xy}(x, y) &= 3x^2 + \cos y \end{aligned}$$

Schwarzov teorem

U prethodnom primjeru dobili smo

$$f_{yx}(x, y) = f_{xy}(x, y),$$

tj.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

To vrijedi za svaku funkciju $f(x, y)$.

Ovo pravilo poznato je pod nazivom **Schwarzov teorem**.

Zadatci

1. Odredite prve parcijalne derivacije funkcije
$$f(x, y) = \ln(2x + y - 2).$$
2. Odredite prve parcijalne derivacije funkcije
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}.$$
3. Odredite druge parcijalne derivacije funkcije
$$f(x, y) = 2x^3 - xy^2$$
4. Odredite prirodnu domenu funkcije
$$f(x, y) = \arcsin(x + y^2).$$