Linearna aproksimacija funkcija dvije varijable

Matematika 2

Erna Begović Kovač

http://matematika.fkit.hr

Uvod

- Linearna i kvadratna aproksimacija (i Taylorov red) služe, između ostalog, za približno računanje vrijednosti funkcije.
- Uz to, gledamo kako se promijeni vrijednost funkcije $f(x, y)$ ako se prva varijabla promijeni od x_0 do $x_0 + \triangle x$, a druga varijabla od y_0 do $y_0 + \triangle y$.

Linearna aproksimacija

Linearna aproksimacija funkcije jedne varijable u točki $x = x_0 + \triangle x$ je

$$f(x_0 + \triangle x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\triangle x,$$

tj.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Linearna aproksimacija

Linearna aproksimacija funkcije dvije varijable u točki (x, y), $x = x_0 + \triangle x$, $y = y_0 + \triangle y$ je

$$f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\triangle x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\triangle y,$$

tj.

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Vidimo da ova formula uzima u obzir promjenu i po x i po y.

Primjer 1

Odredite linearnu aproksimaciju funkcije

$$f(x, y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$$

u točki $(0.9, 2.1)$.

Primjer 1

Odredite linearnu aproksimaciju funkcije

$$f(x,y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$$

u točki $(0.9, 2.1)$.

$$x_0 = 1,\ \triangle x = x - x_0 = 0.9 - 1 = -0.1, \quad y_0 = 2,\ \triangle y = y - y_0 = 2.1 - 2 = 0.1$$

$$f(0.9, 2.1) \approx f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\cdot(-0.1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\cdot 0.1$$

Primjer 1

Odredite linearnu aproksimaciju funkcije

$$f(x,y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$$

u točki $(0.9, 2.1)$.

$$x_0 = 1,\ \triangle x = x - x_0 = 0.9 - 1 = -0.1, \quad y_0 = 2,\ \triangle y = y - y_0 = 2.1 - 2 = 0.1$$

$$f(0.9, 2.1) \approx f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) \cdot (-0.1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) \cdot 0.1$$

$$f(1,2) = \sqrt{6 - 1^2 - 2^2} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{6 - x^2 - y^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{6 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{6 - x^2 - y^2}} \cdot (-2y) = -\frac{y}{\sqrt{6 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -2$$

Primjer 1

Odredite linearnu aproksimaciju funkcije

$$f(x,y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$$

u točki $(0.9, 2.1)$.

$$x_0 = 1,\ \triangle x = x - x_0 = 0.9 - 1 = -0.1, \quad y_0 = 2,\ \triangle y = y - y_0 = 2.1 - 2 = 0.1$$

$$f(0.9, 2.1) \approx f(1,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\cdot(-0.1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\cdot 0.1$$

$$f(1,2) = \sqrt{6 - 1^2 - 2^2} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{6 - x^2 - y^2}}\cdot(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{6 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{6 - x^2 - y^2}}\cdot(-2y) = -\frac{y}{\sqrt{6 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -2$$

$$f(0.9, 2.1) \approx 1 - 1\cdot(-0.1) - 2\cdot 0.1 = 0.9$$

Primjer 2

Izračunajte približno duljinu dijagonale pravokutnika sa stranicama $a = 3.15$ i $b = 3.9$.

Primjer 2

Izračunajte približno duljinu dijagonale pravokutnika sa stranicama $a = 3.15$ i $b = 3.9$.

$$d^2 = a^2 + b^2, \quad d = \sqrt{a^2 + b^2} = f(a, b) > 0$$

Primjer 2

Izračunajte približno duljinu dijagonale pravokutnika sa stranicama $a = 3.15$ i $b = 3.9$.

$$d^2 = a^2 + b^2, \quad d = \sqrt{a^2 + b^2} = f(a,b) > 0$$

$$a_0 = 3,\ \triangle a = a - a_0 = 3.15 - 3 = 0.15, \quad b_0 = 4,\ \triangle b = b - b_0 = 3.9 - 4 = -0.1$$

$$d = f(3.15, 3.9) \approx f(3,4) + \frac{\partial f}{\partial a}(3,4) \cdot 0.15 + \frac{\partial f}{\partial b}(3,4) \cdot (-0.1)$$

Primjer 2

Izračunajte približno duljinu dijagonale pravokutnika sa stranicama $a = 3.15$ i $b = 3.9$.

$$d^2 = a^2 + b^2, \quad d = \sqrt{a^2 + b^2} = f(a, b) > 0$$

$$a_0 = 3,\ \triangle a = a - a_0 = 3.15 - 3 = 0.15, \quad b_0 = 4,\ \triangle b = b - b_0 = 3.9 - 4 = -0.1$$

$$d = f(3.15, 3.9) \approx f(3,4) + \frac{\partial f}{\partial a}(3,4) \cdot 0.15 + \frac{\partial f}{\partial b}(3,4) \cdot (-0.1)$$

$$f(3,4) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) = \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}} \cdot (2a) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial a}(3,4) = \frac{3}{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial b}(a,b) = \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}} \cdot (2b) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial b}(3,4) = \frac{4}{5}$$

$$d \approx 5 + \frac{3}{5} \cdot 0.15 + \frac{4}{5} \cdot (-0.1) = 5.01$$

Primjer 3 - Linearna aproksimacija funkcije tri varijable

Izračunajte približno udaljenost točke $(3.2, 5.8, 6.1)$ od ishodišta.

Primjer 3 - Linearna aproksimacija funkcije tri varijable

Izračunajte približno udaljenost točke $(3.2, 5.8, 6.1)$ od ishodišta.

Udaljenost točke (x, y, z) od ishodišta

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \Rightarrow \qquad f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Primjer 3 - Linearna aproksimacija funkcije tri varijable

Izračunajte približno udaljenost točke $(3.2, 5.8, 6.1)$ od ishodišta.

Udaljenost točke (x, y, z) od ishodišta

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \Rightarrow \qquad f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Linearna aproksimacija:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) \approx f(x_0, y_0, z_0) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) \end{aligned}$$

Primjer 3

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \text{u točki } (3.2, 5.8, 6.1)$$

$$x_0 = 3,\ \triangle x = 0.2, \quad y_0 = 6,\ \triangle y = -0.2, \quad z_0 = 6,\ \triangle z = 0.1,$$

Primjer 3

$$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \text{u točki } (3.2, 5.8, 6.1)$$

$$x_0=3,\ \triangle x=0.2, \quad y_0=6,\ \triangle y=-0.2, \quad z_0=6,\ \triangle z=0.1,$$

$$f(3,6,6)=\sqrt{3^2+6^2+6^2}=9$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(3,6,6)=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(3,6,6)=\frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(3,6,6)=\frac{2}{3}$$

$$d\approx 9+\frac{1}{3}\cdot 0.2+\frac{2}{3}\cdot(-0.2)+\frac{2}{3}\cdot 0.1=9+0=9$$

Geometrijska interpretacija linearne aproksimacije

Za funkciju jedne varijable linearna aproksimacija

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

intrerpretira se kao **pravac**

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

koji je **tangenta** na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$.

Geometrijska interpretacija linearne aproksimacije

Za funkciju dvije varijable linearna aproksimacija

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

intrerpretira se kao **ravnina**

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Tangencijalna ravnina

Opći oblik jednadžbe ravnine:

$$ax + by + cz = d.$$

Jednadžba tangencijalne ravnine na graf funkcije f u točki (x_0, y_0, z_0) glasi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Primjer 4

Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na graf funkcije

$$f(x,y) = 2x + \sqrt{x^2 + 3y^2}$$

u točki $(1, -1, f(1, -1))$.

Primjer 4

Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na graf funkcije

$$f(x,y) = 2x + \sqrt{x^2 + 3y^2}$$

u točki $(1, -1, f(1,-1))$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2 + \frac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = \frac{5}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y}{\sqrt{x^2+3y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) = -\frac{3}{2}$$

$$z_0 = f(1,-1) = 4$$

Jednadžba tangencijalne ravnine:

$$\frac{5}{2}(x-1) - \frac{3}{2}(y+1) - (z-4) = 0$$

$$5x - 3y - 2z = 0$$

Implicitno zadana funkcija

Ako je funkcija f zadana u obliku $f(x, y) = \cdots$,

$$\text{npr. } f(x, y) = 2x + 5y + xy,$$

kažemo da je f zadana **eksplicitno**.

U protivnom, f je zadana **implicitno**,

$$\text{npr. } x + y^2 + 2y + f^2(x, y) = 0.$$

Implicitno zadana funkcija

Ako je funkcija f zadana u obliku $f(x, y) = \cdots,$

$$\text{npr. } f(x, y) = 2x + 5y + xy,$$

kažemo da je f zadana **eksplicitno**.

U protivnom, f je zadana **implicitno**,

$$\text{npr. } x + y^2 + 2y + f^2(x, y) = 0.$$

Implicitno zadana funkcija može se zapisati kao

$$F(x, y, f(x, y)) = 0.$$

Implicitno zadana funkcija

Ako je funkcija f zadana u obliku $f(x, y) = \cdots$,

$$\text{npr. } f(x, y) = 2x + 5y + xy,$$

kažemo da je f zadana **eksplicitno**.

U protivnom, f je zadana **implicitno**,

$$\text{npr. } x + y^2 + 2y + f^2(x, y) = 0.$$

Implicitno zadana funkcija može se zapisati kao

$$F(x, y, f(x, y)) = 0.$$

Definiramo novu varijablu

$$z = f(x, y)$$

pa imamo

$$F(x, y, z) = 0.$$

Tangencijalna ravnina na implicitno zadanu funkciju

Jednadžba tangencijalne ravnine na graf implicitno zadane funkcije f u točki (x_0, y_0, z_0) glasi

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Veza jednadžbi za eksplicitno i implicitno zadanu funkciju

Svaku eksplicitno zadanu funkciju možemo shvatiti kao implicitnu.

Iz $z = f(x, y)$ imamo $f(x, y) - z = 0$. Stoga $F(x, y, z) = 0$ možemo zaspisati kao

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

Onda je

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = -1$$

pa se jednadžba tangente za implicitno zadanu funkciju svodi na jednadžbu tangente za eksplicitnu.

Veza jednadžbi za eksplicitno i implicitno zadanu funkciju

Implicitno:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z-z_0)=0$$

Eksplicitno:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

Primjer 5

Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na graf funkcije

$$x + y^2 + 2y + f^2(x, y) = 0$$

u točki $(-4, 1, f(-4, 1))$ ako je $f(-4, 1) > 0$.

Primjer 5

Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na graf funkcije

$$x + y^2 + 2y + f^2(x, y) = 0$$

u točki $(-4, 1, f(-4, 1))$ ako je $f(-4, 1) > 0$.

$$z = f(x, y),\ F(x, y, z) = x + y^2 + 2y + z^2 = 0$$
$$z_0 =?\ \rightarrow\ -4 + 1 + 2 + z_0^2 = 0,\ z_0^2 = 1,\ z_0 = 1 > 0$$

Primjer 5

Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na graf funkcije

$$x + y^2 + 2y + f^2(x, y) = 0$$

u točki $(-4, 1, f(-4, 1))$ ako je $f(-4, 1) > 0$.

$$z = f(x, y), \;\; F(x, y, z) = x + y^2 + 2y + z^2 = 0$$
$$z_0 = ? \;\; \to \;\; -4 + 1 + 2 + z_0^2 = 0, \;\; z_0^2 = 1, \;\; z_0 = 1 > 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial x}(-4, 1, 1) = 1$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 2y + 2, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(-4, 1, 1) = 4$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 2z, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(-4, 1, 1) = 2$$

Jednadžba tangencijalne ravnine:

$$1(x + 4) + 4(y - 1) + 2(z - 1) = 0$$

$$x + 4y + 2z = 2$$

Diferencijal

Za funkciju jedne varijable definiramo

- prirast u x

$$\rightarrow \quad \triangle f(x) = f(x + \triangle x) - f(x),$$

- približni prirast u x

$$\rightarrow \quad \triangle f(x) \approx f'(x)\triangle x,$$

- diferencijal u x

$$\rightarrow \quad df(x) = f'(x)dx.$$

Diferencijal

Analogno, za funkciju dvije varijable definiramo

- **prirast** u (x, y)

$$\rightarrow \quad \triangle f(x,y) = f(x + \triangle x, y + \triangle y) - f(x,y),$$

- **približni prirast** u (x, y)

$$\rightarrow \quad \triangle f(x,y) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\triangle x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\triangle y,$$

- **diferencijal** u (x, y)

$$\rightarrow \quad df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy.$$

Primjer 6

Izračunajte diferencijal funkcije $f(x, y) = \ln(2x + \sqrt{x^2 + 3y^2})$ u točki $(1, 1)$.

Primjer 6

Izračunajte diferencijal funkcije $f(x,y) = \ln(2x + \sqrt{x^2 + 3y^2})$ u točki $(1,1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2x + \sqrt{x^2+3y^2}} \cdot (2 + \frac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}}), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{5}{8}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2x + \sqrt{x^2+3y^2}} \cdot (\frac{3y}{\sqrt{x^2+3y^2}}), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{3}{8}$$

Diferencijal:

$$df(1,1) = \frac{5}{8}dx + \frac{3}{8}dy$$

Primjer 7

Izračunajte približni prirast udaljenosti točke $(4, 3)$ od ishodišta ako joj se prva koordinata poveća za 0.1, a druga smanji za 0.05.

Primjer 7

Izračunajte približni prirast udaljenosti točke $(4,3)$ od ishodišta ako joj se prva koordinata poveća za 0.1, a druga smanji za 0.05.

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = f(x,y), \quad \triangle x = 0.1, \ \triangle y = -0.05$$

Primjer 7

Izračunajte približni prirast udaljenosti točke $(4, 3)$ od ishodišta ako joj se prva koordinata poveća za 0.1, a druga smanji za 0.05.

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = f(x, y), \quad \triangle x = 0.1,\ \triangle y = -0.05$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(4, 3) = \frac{4}{5}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(4, 3) = \frac{3}{5}$$

Približni prirast:

$$\triangle f(4, 3) \approx \frac{4}{5} \cdot 0.1 + \frac{3}{5} \cdot (-0.05) = 0.05$$

Kvadratna aproksimacija

Kvadratna aproksimacija funkcije jedne varijable u točki $x = x_0 + \triangle x$ je

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Kvadratna aproksimacija

Kvadratna aproksimacija funkcije jedne varijable u točki $x = x_0 + \triangle x$ je

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Kvadratna aproksimacija funkcije dvije varijable u točki (x, y), $x = x_0 + \triangle x$, $y = y_0 + \triangle y$ je

$$\begin{aligned} f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\frac{(y - y_0)^2}{2} + \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0). \end{aligned}$$

Primjer 8

Odredite kvadratnu aproksimaciju funkcije $f(x, y) = 6 - x^2 - y^2$ u točki $(0.9, 2.1)$.

Primjer 8

Odredite kvadratnu aproksimaciju funkcije $f(x, y) = 6 - x^2 - y^2$ u točki $(0.9, 2.1)$.

$$x_0 = 1,\ \triangle x = -0.1, \quad y_0 = 2,\ \triangle y = 0.1$$

$$f(1, 2) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = -4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$$

Primjer 8

Odredite kvadratnu aproksimaciju funkcije $f(x,y) = 6 - x^2 - y^2$ u točki $(0.9, 2.1)$.

$$x_0 = 1,\ \triangle x = -0.1, \quad y_0 = 2,\ \triangle y = 0.1$$

$$f(1,2) = 1$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -2x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -2\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -4
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$

$$f(0.9, 2.1) \approx 1 - 2 \cdot (-0.1) - 4 \cdot 0.1 - 2\frac{(-0.1)^2}{2} - 2\frac{0.1^2}{2} + 0 = 0.78$$

Zadatci

1. Koristeći linearnu aproksimaciju izračunajte približnu vrijednost funkcije $f(x,y) = \text{arctg}\frac{x^2}{y}$ u točki $(-0.99, 1.03)$.
2. Koristeći linearnu aproksimaciju izračunajte približnu vrijednost funkcije $f(x,y) = \sqrt[3]{4xy+4}$ u točki $(1.1, 1.1)$.
3. Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na graf funkcije $f(x,y) = xe^{y^2-x}$ u točki $(4, 2)$.
4. Izračunajte približni prirast funkcije $f(x,y) = \ln(x^2+2y)$ ako je $(x_0, y_0) = (3, 4)$, $\triangle x = 0.01$, $\triangle y = -0.04$.