Lokalni ekstremi funkcija dvije varijable

Matematika 2

Erna Begović Kovač

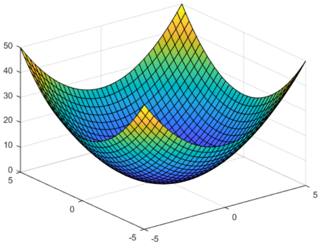
http://matematika.fkit.hr

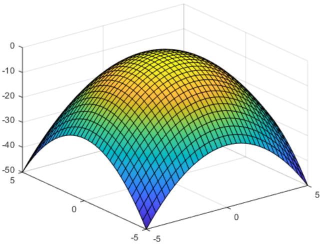
Uvod

- Lokalni i globalni ekstremi
- Rješavamo problem minimizacije i maksimizacije funkcije.
- Tražimo točku u kojoj funkcija poprima najmanju/najveću vrijednost.
- Ovaj se problem rješava korištenjem parcijalnih derivacija.

Geometrijska predodžba

- Funkcija f ima **lokalni minimum** u točki (x_0, y_0) ako je $f(x_0, y_0)$ najmanja vrijednost od f u nekoj okolini od (x_0, y_0).
- Funkcija f ima **lokalni maksimum** u točki (x_0, y_0) ako je $f(x_0, y_0)$ najveća vrijednost od f u nekoj okolini od (x_0, y_0).





Tangencijalna ravnina

Kod funkcije jedne varijable tangenta na graf funkcije u točki lokalnog ekstrema paralelna je s x-osi.

Kod funkcije dvije varijable tangencijalna ravnina na graf funkcije f u točki lokalnog ekstrema paralelna je s xy-ravninom.

Stoga, jednadžba tangencijalne ravnine u točki ekstrema ima oblik

$$z = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Tangencijalna ravnina

Iz jednadžbe tangencijalne ravnine

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

uz $z = c$ dobijemo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

To su **nužni uvjeti** za lokalni ekstrem.

Tangencijalna ravnina

Iz jednadžbe tangencijalne ravnine

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

uz $z = c$ dobijemo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

To su **nužni uvjeti** za lokalni ekstrem.

Točke koje zadovoljavaju nužne uvjete nazivaju se **kritične točke**.

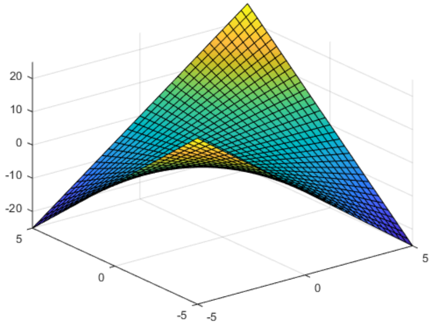
Kritične točke

Kritična točka može biti lokalni minimum, lokalni maksimum ili **sedlasta točka**.

Kritične točke

Kritična točka može biti lokalni minimum, lokalni maksimum ili **sedlasta točka**.

Sedlasta točka je analogna točki infleksije kod funkcije jedne varijable.



Primjer 1

Odredite kritične točke funkcije

$$f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5.$$

Primjer 1

Odredite kritične točke funkcije

$$f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5.$$

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x - 2 = 0 \\ f_y(x, y) &= 2y - 4 = 0 \end{aligned}$$

Primjer 1

Odredite kritične točke funkcije

$$f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5.$$

$$f_x(x, y) = 2x - 2 = 0$$
$$f_y(x, y) = 2y - 4 = 0$$

$$x = 1, \ \ y = 2$$

Kritična točka: $(1, 2)$.

Kriterij lokalnog ekstrema

Da odredimo karakter kritične točke koristimo derivacije drugog reda.

Označimo

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0),$$
$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0),$$
$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).$$

Kriterij lokalnog ekstrema

Da odredimo karakter kritične točke koristimo derivacije drugog reda.

Označimo

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \\
B &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \\
C &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0).
\end{aligned}
$$

Definiramo

$$
\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.
$$

Kriterij lokalnog ekstrema

Ako je

(i) $\Delta > 0$, onda je (x_0, y_0) točka lokalnog ekstrema, i to

- **maksimum** ako je $A < 0$,
- **minimum** ako je $A > 0$.

Kriterij lokalnog ekstrema

Ako je

(i) $\Delta > 0$, onda je (x_0, y_0) točka lokalnog ekstrema, i to

- **maksimum** ako je $A < 0$,
- **minimum** ako je $A > 0$.

(ii) $\Delta < 0$, onda je (x_0, y_0) **sedlasta točka**.

Kriterij lokalnog ekstrema

Ako je

(i) $\Delta > 0$, onda je (x_0, y_0) točka lokalnog ekstrema, i to

- **maksimum** ako je $A < 0$,
- **minimum** ako je $A > 0$.

(ii) $\Delta < 0$, onda je (x_0, y_0) **sedlasta točka**.

(iii) $\Delta = 0$, onda kriterij ne daje odluku.

Primjer 2

Odredite lokalne ekstreme funkcije

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3.$$

Primjer 2

Odredite lokalne ekstreme funkcije

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3.$$

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 3y = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = y$$
$$f_y(x, y) = -3x + 3y^2 = 0 \;\Rightarrow\; y^2 = x$$

Primjer 2

Odredite lokalne ekstreme funkcije

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3.$$

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 3y = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = y$$
$$f_y(x, y) = -3x + 3y^2 = 0 \;\Rightarrow\; y^2 = x$$

$$(x^2)^2 = x$$
$$x^4 - x = x(x^3 - 1) = 0$$
$$x_1 = 0,\; x_2 = 1,\; y_1 = 0,\; y_2 = 1$$

Kritične točke: $(0, 0), (1, 1)$

Primjer 2

Odredite lokalne ekstreme funkcije
$$f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3.$$

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 3y = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = y$$
$$f_y(x,y) = -3x + 3y^2 = 0 \;\Rightarrow\; y^2 = x$$

$$(x^2)^2 = x$$
$$x^4 - x = x(x^3 - 1) = 0$$
$$x_1 = 0,\; x_2 = 1,\; y_1 = 0,\; y_2 = 1$$

Kritične točke: $(0,0), (1,1)$

$$f_{xx}(x,y) = 6x, \quad f_{yx}(x,y) = -3, \quad f_{yy}(x,y) = 6y$$

Primjer 2

Točka $(0,0)$:

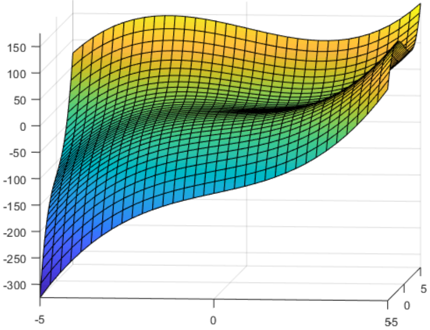
$$A = 0, \;\; B = -3, \;\; C = 0$$

$$\Delta = AC - B^2 = -9 < 0 \;\Rightarrow\; \text{sedlasta točka}$$

Točka $(1,1)$:

$$A = 6, \;\; B = -3, \;\; C = 6$$

$$\Delta = AC - B^2 = 36 - 9 > 0, \;\; A > 0 \Rightarrow \;\text{lokalni minimum}$$



Primjer 3

Od svih kvadara volumena V nađite onaj koji ima najmanje oplošje.

Primjer 3

Od svih kvadara volumena V nađite onaj koji ima najmanje oplošje.

Volumen je $V = abc$, a oplošje $O = 2ab + 2bc + 2ac$.

Primjer 3

Od svih kvadara volumena V nađite onaj koji ima najmanje oplošje.

Volumen je $V = abc$, a oplošje $O = 2ab + 2bc + 2ac$.

Želimo minimizirati izraz $O = 2ab + 2bc + 2ac = 2(ab + bc + ac)$.
Dovoljno je minimizirati

$$ab + bc + ac \to \min .$$

Primjer 3

Od svih kvadara volumena V nađite onaj koji ima najmanje oplošje.

Volumen je $V = abc$, a oplošje $O = 2ab + 2bc + 2ac$.

Želimo minimizirati izraz $O = 2ab + 2bc + 2ac = 2(ab + bc + ac)$. Dovoljno je minimizirati

$$ab + bc + ac \to \min .$$

Iz uvjeta $abc = V$ dobijemo $c = \frac{V}{ab}$ pa je

$$ab + bc + ac = ab + \frac{V}{a} + \frac{V}{b}.$$

Problem se svodi na traženje minimuma funkcije

$$f(a, b) = ab + \frac{V}{a} + \frac{V}{b}.$$

Primjer 3

$$f_a(a,b) = b - \frac{V}{a^2} = 0 \;\Rightarrow\; b = \frac{V}{a^2}$$
$$f_b(a,b) = a - \frac{V}{b^2} = 0 \;\Rightarrow\; a = \frac{V}{b^2}$$

$$a = \frac{V}{(\frac{V}{a^2})^2} = \frac{a^4}{V}$$
$$a - \frac{a^4}{V} = a(1 - \frac{a^3}{V}) = 0$$
$$a \neq 0,\; 1 - \frac{a^3}{V} = 0 \;\Rightarrow a = \sqrt[3]{V}$$

Primjer 3

$$f_a(a,b) = b - \frac{V}{a^2} = 0 \;\Rightarrow\; b = \frac{V}{a^2}$$
$$f_b(a,b) = a - \frac{V}{b^2} = 0 \;\Rightarrow\; a = \frac{V}{b^2}$$

$$a = \frac{V}{(\frac{V}{a^2})^2} = \frac{a^4}{V}$$
$$a - \frac{a^4}{V} = a(1 - \frac{a^3}{V}) = 0$$
$$a \neq 0,\; 1 - \frac{a^3}{V} = 0 \;\Rightarrow a = \sqrt[3]{V}$$

Dobijemo $a = b = c = \sqrt[3]{V}$ iz čega zaključujemo da od svih kvadara s danim obujmom, najmanje oplošje ima kocka.

Zadatci

1. Odredite kritične točke funkcija
   (i) $f(x, y) = (x^3 - 4xy)e^{-2y}$,
   (ii) $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$.
2. Odredite lokalne ekstreme funkcija
   (i) $f(x, y) = x^3 + x^2 + x^2y - y^2 - 6y - 5$,
   (ii) $f(x, y) = xy - 4x^2y - 4xy^2$.