

MATEMATIKA II

Upotreba programa Mathematica pri analizi funkcija dviju varijabla

1. Definicija funkcije koju želite proučiti:

naredba `f[x_, y_] :=`

2. Naredba koja crta plohu definirane funkcije u zadanom intervalu

naredba `Plot3D[f[x, y], {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}]`

Napomena: `xmin`, `xmax`, `ymin` i `ymax` su krajnje točke područja u kojem želimo proučavati funkciju

Istovremenim pritiskom na tipke **Shift** i **Enter** dobivate prikaz plohe definirane funkcije. Za upotrebu ove naredbe pogledajte Primjer 1.

Ukoliko želite:

- a) da se na koordinatnim osima ne vide oznake, u sintaksi naredbe `Plot3D[f[x, y], {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}, *]` na mjestu označenom s * upišite **Axes -> False**
- a) da ploha ne bude prikazana u različitim bojama, već samo u nijansama sive, na mjestu * u sintaksi naredbe upišite **Lighting -> False**
- b) da na crtežu ne budu označene linije koje određuju područje u kojem se ploha iscrtava, na mjestu * u sintaksi naredbe upišite **Boxed -> False**
- c) da se prilikom iscrtavanja crteža ne koriste boje, već da se iscrta samo koordinatna mreža na plohi, na mjestu * u sintaksi naredbe upišite **HiddenSurface -> False**
- d) da se na plohi ne iscrta koordinatna mreža, na mjestu * u sintaksi naredbe upišite **Mesh -> False**
- e) da ploha bude bijele boje (nema sjenčanja), na mjestu * u sintaksi naredbe upišite **Shading -> False**

Ako koristite više ovakvih naredbi, odvajajte ih zarezom.

Vjerojatno najvažnija opcija koju trebate naučiti podešavati je određivanje točke iz koje želimo promatrati plohu. Ova će opcija biti vrlo korisna ako Mathematica prikaže plohu iz točke gledišta iz koje se ne može reći mnogo o svojstvima funkcije. Tada će biti potrebno promijeniti gledište, za što koristimo opciju **ViewPoint -> {x, y, z}**. Za detalje pogledajte Primjer 1.

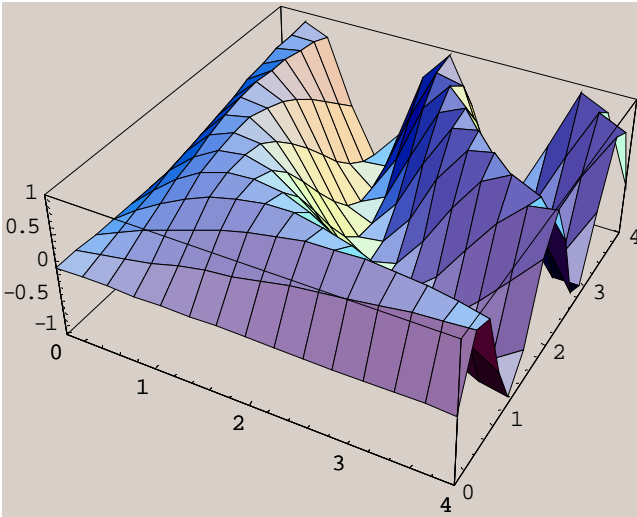
Također, možete utjecati na to kolika je preciznost kojom Mathematica iscrtava plohu korištenjem naredbe **PlotPoints -> #** - za detalje pogledajte Primjer 2.

Primjer 1

Upišite `f[x_, y_] := Sin[xy]` (pritisnite Shift + Enter)

Upišite `Plot3D[f[x, y], {x, 0, 4}, {y, 0, 4}]` (pritisnite Shift + Enter)

Dobiva se



Napomena: funkciju nije trebalo posebno definirati, mogli ste i napisati samo `Plot3D[Sin[xy], {x, 0, 4}, {y, 0, 4}]`.

Za točku u prostoru iz koje promatramo plohu ove funkcije Mathematica je uzima točku $\{1.3, -2.4, 2\}$ kao onu iz koje se svojstva plohe najbolje vide.

Međutim, često će biti potrebno promijeniti tu točku, ili naprosto gledati plohu iz što je više točaka gledišta moguće kako bismo što lakše i bolje uočili svojstva plohe.

Na primjer, da vidimo kako zadana ploha izgleda iz točke $(0, -2, 0)$ ("sprijeda odozgo").

Koristimo opciju `ViewPoint -> {x, y, z}`, gdje $\{x, y, z\}$ označava točku gledišta.

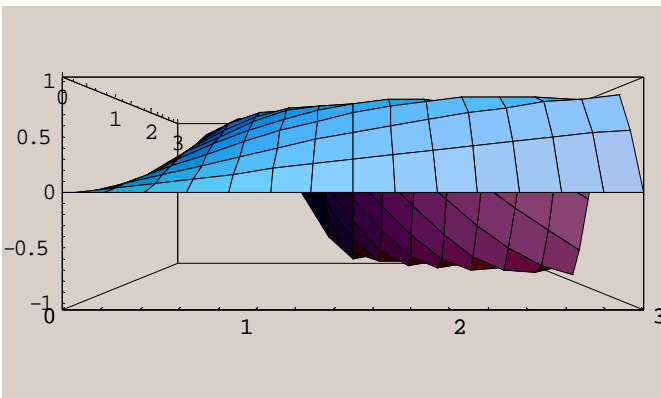
Ovaj se dodatak naredbi `Plot3D[f[x, y], {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}, *]` upisuje na mjestu označenom s `*`.

Upišite

`Plot3D[Sin[xy], {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, ViewPoint -> {0, -2, 0}]`

(pritisnite Shift + Enter)

Dobiva se



Možete koristiti sljedeću priručnu "tabelu" točaka:

$\{1.3, -2.4, 2\}$	točka koju Mathematica koristi po definiciji
$\{0, -2, 0\}$	sprijeda
$\{0, -2, 2\}$	sprijeda odozgo
$\{0, -2, -2\}$	sprijeda odozdo
$\{-2, -2, 0\}$	lijevi kut
$\{2, -2, 0\}$	desni kut
$\{0, 0, 2\}$	iznad

Nacrtajte ovu plohu s točkama gledišta zadanima gornjom tablicom!

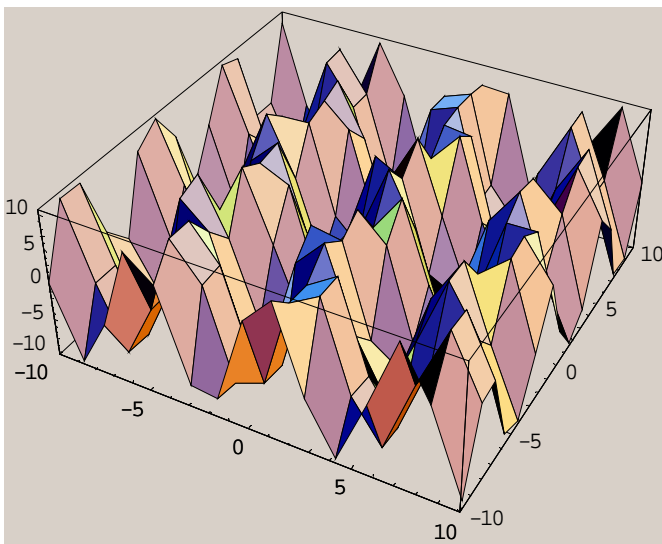
Napomena: Vrijednost 2 kao koordinatni izbor za točke gledišta odabrana je za ovu funkciju. Za neku drugu funkciju možda će biti prikladnije uzeti neku drugu vrijednost.

Primjer 2

Upišite `f[x_, y_] := 10 Sin[x + Sin[y]]` (pritisnite Shift + Enter)

Upišite `Plot3D[f[x,y], {x, -10, 10}, {y, -10, 10}]` (pritisnite Shift + Enter)

Dobiva se



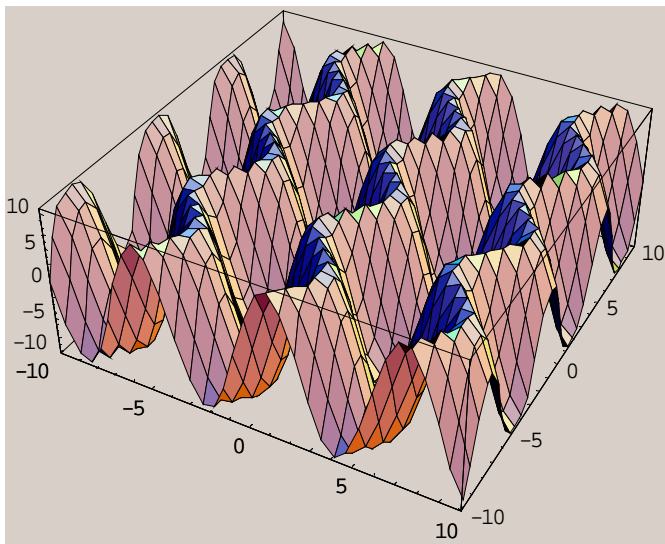
Primijetimo da nismo dobili plohu zadovoljavajuće kvalitete ispisa. Razlog tome je što je broj točaka u kojima Mathematica izračunava vrijednost funkcije i pomoću kojih crta plohu fiksiran na 15 po svakoj varijabli. Ako to želite promijeniti, koristite naredbu `PlotPoints -> #`, gdje na mjestu `#` upisujete brojku koja određuje u koliko će Mathematica točaka izračunati vrijednost funkcije. Ovaj se dodatak naredbi `Plot3D[f[x, y], {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}, *]` upisuje na mjestu označenom s `*`.

U našem primjeru imamo:

Upišite `f[x_, y_] := 10 Sin[x + Sin[y]]` (pritisnite Shift + Enter)

Upišite `Plot3D[f[x,y], {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, PlotPoints -> 35]`
(pritisnite Shift + Enter)

Dobiva se



Zadatak

Proučite plohu funkcije $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ u intervalu $[-2,2]$ na x-osi i $[-2,2]$ na y-osi i odredite otprilike točku lokalnog maksimuma funkcije na tom području.

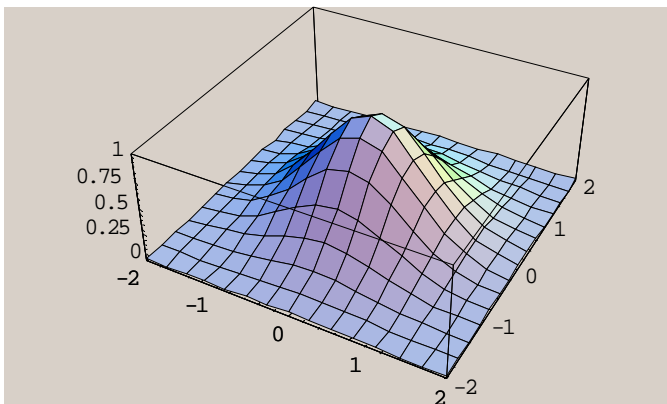
Rješenje:

Eksponencijalnu funkciju s bazom e u Mathematici označavamo s `Exp["argument"]`. Ovdje to znači da ćemo funkciju definirati izrazom `f[x_, y_]:=Exp[-(x^2+y^2)]`.

Upišite `f[x_, y_]:= Exp[-(x^2+y^2)]`

Upišite `Plot3D[f[x,y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]` (pritisnite Shift + Enter)

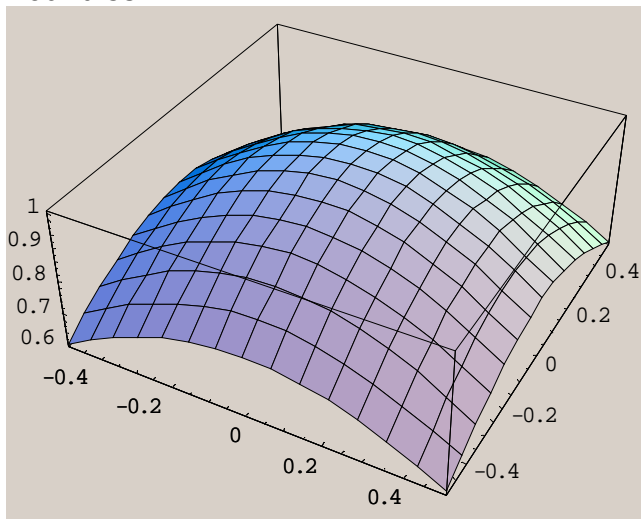
Dobiva se



Uočimo da je točka lokalnog maksimuma vjerojatno točka (0,0) (uvjerite se da je doista tako računom!). Možemo suziti interval na kojem promatramo funkciju na $[-0.5, 0.5]$ na x-osi i $[-0.5, 0.5]$ na y-osi.

Upišite `Plot3D[f[x,y], {x, -0.5, 0.5}, {y, -0.5, 0.5}]`
(pritisnite Shift + Enter)

Dobiva se



Pogledajte što se događa s plohom ove funkcije kada se područje još više "smanji".

Zadatak (Ispitni rok 7. travnja 2001.)

Ispitajte lokalne ekstreme funkcije $f[x, y] = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

Rješenje:

Upišite `f[x_, y_]:=y×Sqrt[x] - y^2 - x + 6y` (pritisnite Shift + Enter)

Napomena: znak umnoška × dobiva se istovremenim pritiskom tipki "desni Alt" i đ.

Koristeći naredbu `D[f[x,y], var]` nađite parcijalne derivacije funkcije f redom po varijablama x i y.

Upišite `D[f[x,y], x]` (pritisnite Shift + Enter)

Dobiva se $-1 + \frac{y}{2\sqrt{x}}$.

Upišite `D[f[x,y], y]` (pritisnite Shift + Enter)

Dobiva se $6 + \sqrt{x} - 2y$.

Koristeći naredbu `Solve[{jednadžbe}, {varijable}]` pronalazimo kandidate za lokalne ekstreme.

Upišite

`Solve[{-1 + $\frac{y}{2\sqrt{x}}$ == 0, 6 + $\sqrt{x} - 2y$ == 0}, {x, y}]`

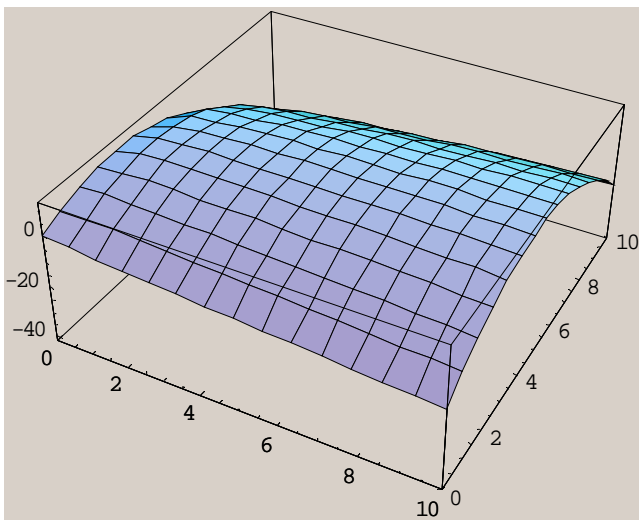
(pritisnite Shift + Enter).

Dobiva se $\{\{x \rightarrow 4, y \rightarrow 4\}\}$, što daje točku lokalnog ekstrema (4,4).

Da vidimo kako izgleda ploha ove funkcije u okolini točke (4,4).

Upišite `Plot3D[f[x,y], {x, 0, 10}, {y, 0, 10}]` (pritisnite Shift + Enter)

Dobiva se



Zadatak (Ispitni rok 10. ožujka 2001.)

Na plohi $f[x, y] = x y \sqrt{x^2 + x y + y^2}$ odredite točke u kojima je tangencijalna ravnina okomita na z-os, te odredite jednadžbe tih tangencijalnih ravnina.

Rješenje:

`f[x_,y_]:= x*y*Sqrt[x^2 + x*y + y^2]`

`Plot3D[f[x,y], {x, -10, 10}, {y, -10, 10}]`

