Računalni seminar - Matematika 2

Ana Bokšić

5 Parcijalne derivacije

5.1 Parcijalne derivacije prvog reda

Za dobivanje parcijalnih derivacija koristit ćemo već poznatu funkciju *diff()*. Obzirom da sad radimo s funkcijama dviju varijabli, potrebno je naznačiti po kojoj varijabli deriviramo. Npr. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ćemo dobiti naredbom

```
diff(f, x)
```

5.2 Parcijalne derivacije drugog i višeg reda

Opet koristimo naredbu *diff()*, kojoj redom šaljemo naziv funkcije, te varijable po kojima parcijalno deriviramo. Poredak varijabli nije bitan zbog Scwarzovog teorema, već je bitan broj pojedinih varijabli. Primjerice, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ dobivamo naredbom

`diff(f,y,y)` ili `diff(f,y,2)`

5.3 Tangencijalna ravnina i linearna aproksimacija

Prisjetimo se što smo radili na Mat1. Tangenta na graf funkcije u točki (x_0, y_0) bila je upravo linearna aproksimacija promatrane funkcije oko x_0

$$y = f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

tj. pravac s nagibom $f'(x_0)$ koji prolazi točkom (x_0, y_0). Analogno tome, tangencijalna ravnina na plohu u točki (x_0, y_0, z_0) biti će linearna aproksimacija funkcije $f(x, y)$ oko (x_0, y_0). Za eksplicitno zadanu funkciju jednadžba tangencijalne ravnine glasi

$$f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

Ako jednadžbu tangencijalne ravnine zapišemo malo drugačije dobit ćemo baš formulu za linearnu aproksimaciju. Uočite da je $z = f(x, y)$, a $z_0 = f(x_0, y_0)$.

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Dakle, sve što treba za naći tangencijalnu ravninu (a time i linearnu aproksimaciju) je pronaći parcijalne derivacije u (x_0, y_0). Ako je funkcija zadana implicitno definiramo $F(x, y, z)$, a za računanje koristimo formule

$$f_x = \frac{-F_x}{F_z}, \quad f_y = \frac{-F_y}{F_z}.$$

Vidi Primjere 4. i 5. u *RS_Mat2.m* skripti.

5.4 Lokalni ekstremi

U ovom odjeljku nema ništa novog, samo moramo upotrijebiti što smo dosad naučili. Traženje lokalnih ekstrema sastoji se od dva koraka:

1. Određivanje stacionarnih točaka (nultočaka prvih parcijalnih derivacija) pomoću *solve()*. Ako je (x_0, y_0) lokalni ekstrem funkcije f, mora vrijediti

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{i} \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

.

2. Analiza Hesseove matrice (matrice drugih parcijalnih derivacija) kako bismo utvrdili radi li se o lokalnom minimumu, maksimumu ili sedlastoj točki.

$$H(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

Računamo determinantu Δ matrice $H(x_0, y_0)$ za svaku stacionarnu točku (x_0, y_0). Ako je

1° $\Delta > 0$

- (a) $A > 0 \implies (x_0, y_0)$ je lokalni minimum,
- (b) $A < 0 \implies (x_0, y_0)$ je lokalni mmaksimum.

2° $\Delta < 0 \implies (x_0, y_0)$ je sedlasta točka,

3° $\Delta = 0 \implies$ nema odluke.

Vidi Primjere 6. i 7. u *RS_Mat2.m* skripti.

6 Dvostruki integrali

Za izračun dvostrukih integrala ponovno koristimo naredbu *int()*. Treba pažljivo napisati naredbu, jer *int()* može integrirati samo po jednoj varijabli (a sada imamo dvije, x i y). Zbog toga treba narebi *int()* reći po kojoj varijabli treba integrirati.

```
int(f,y,f1(x), f2(x))
```

Ulazni argumenti su

- f – funkcija koju integriramo,
- x ili y – varijabla po kojoj integriramo
- $g_1(y), g_2(y)$ ili $f_1(x), f_2(x)$ – granice integrala, funkcije **druge** varijable (one po kojoj **ne integriramo**)

Radimo kao kad rješavamo na papiru. Prvo integriramo po jednoj varijabli, a onda po drugoj pazeći na granice integrala.

Izračunajmo pomoću Octave-a integral

$$\int_0^1 dx \int_0^2 x^2 + 2y\, dy.$$

Prvo ćemo izračunati unutarnji integral $\int_0^2 x^2 + 2y\, dy$. Naredbi *int()* ne smijemo zaboraviti reći po kojoj varijabli treba integrirati! Integriramo f po y od 0 do 2.

```
f(x,y)=x^2+2*y
prvi_int=int(f,y,0,2)
```

Zatim dobiveni rezultat još integriramo po x od 0 do 1.

```
rjesenje=int(prvi_int,x,0,1)
```

Granice unutarnjeg integrala mogu biti i neke funkcije u varijabli vanjskog integrala. Te funkcije također treba simbolički zadati.

Izračunajmo

$$\int_0^4 dy \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{x-4} dx.$$

Podintegralna funkcija je $f(x, y) = 1$. Definiramo funkcije $g_1(y)$ i $g_2(y)$ koje čine granice unutarnjeg integrala.

```
f(x,y)=1
g1(y)=-sqrt(16-y^2)
g2(y)=4-y
```

Prvo računamo unutarnji integral po x. Ne smijemo zaboraviti naznačiti da su g_1 i g_2 funkcije po y.

```
prvi=int(f,x,g1(y),g2(y))
```

Zatim dobiveni rezultat još integriramo po y od 0 do 4.

```
rjesenje=int(prvi,y,0,4)
```

Vidi još Primjere 8. i 9. u *RS_Mat2.m* skripti.

7 Obične diferencijalne jednadžbe

Obična diferencijalna jednadžba (ODJ) je jednadžba oblika

$$F(x, y, y', y'', ...y^{(n)}) = 0,$$

koja povezuje nezavisnu varijablu x, nepoznatu funkciju $y(x)$ i njene derivacije $y'(x)$, $y''(x)$, ..., $y^{(n)}$. Ovdje F označava poznatu funkciju više varijabli. **Red** diferencijalne jednadžbe je red najviše derivacije koja se u njoj pojavljuje. Obično ovisnost funkcije y o x ne zapisujemo, ali ne smijemo na nju zaboraviti u računu.

Primjeri:

- ODJ 1. reda: $y' = y^3 + 2x$
- ODJ 2. reda: $y'' + 2y' + y = sin(x)$

Rješenje obične diferencijalne jednadžbe je funkcija (odnosno skup funkcija) jedne varijable $y(x)$. Na primjer, rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = y$ je svaka funkcija oblika

$$y(x) = C \cdot e^x \quad C \in \mathbb{R}.$$

Zaista, ako deriviramo gornju funkciju dobivamo

$$y'(x) = C \cdot e^x = y(x)$$

Diferencijalna jednadžba zadana bez početnog uvjeta kao ova gore ima tzv. **opće rješenje** koje odgovara skupu funkcija (zapis sa C). Ako su uz dif. jednadžbu zadani i početni uvjeti, onda ona ima tzv. **partikularno rješenje** (umjesto C imamo konkretan broj).

Kao nastavak gornjeg primjera, recimo da je zadan još i početni uvjet $y(0) = 2$. Tada uvrštavanjem u $y(x) = C \cdot e^x$ dobivamo

$$y(0) = C \cdot e^0 = C \cdot 1 \implies C = 2,$$

pa je partikularno rješenje $y(x) = 2e^x$.

Više o načinima rješavanja dif. jednadžbi čut ćete na predavanjima i seminaru, a ovdje ćemo pokazati kako riješiti ODJ pomoću Octave-a.

7.1 Funkcija dsolve()

Za rješavanje diferencijalnih jednadžbi koristit ćemo funkciju *dsolve()* iz paketa *symbolic*.

Recimo da želimo rješiti $xy' = -(x + y)$.

1. Postavljamo da je y funkcija po varijabli x

```
syms y(x)
```

2. Zadajemo **(==)** diferencijalnu jednadžbu i spremamo je **(=)** u varijablu `odj`. Pažnja, moramo pisati dupli znak jednakosti!

```
odj= diff(y)*x==-(x+y)
```

3. Rješavamo `odj` funkcijom *dsolve()*, a opće rješenje spremamo u varijablu `rjes`.

```
rjes=dsolve(odj)
```

Ako smo imali zadan i početni uvjet npr. $y(1) = 1$, partikularno rješenje dobivamo tako da u funkciju *dsolve()* dodamo i taj uvjet **(opet stavljamo znak ==)**.

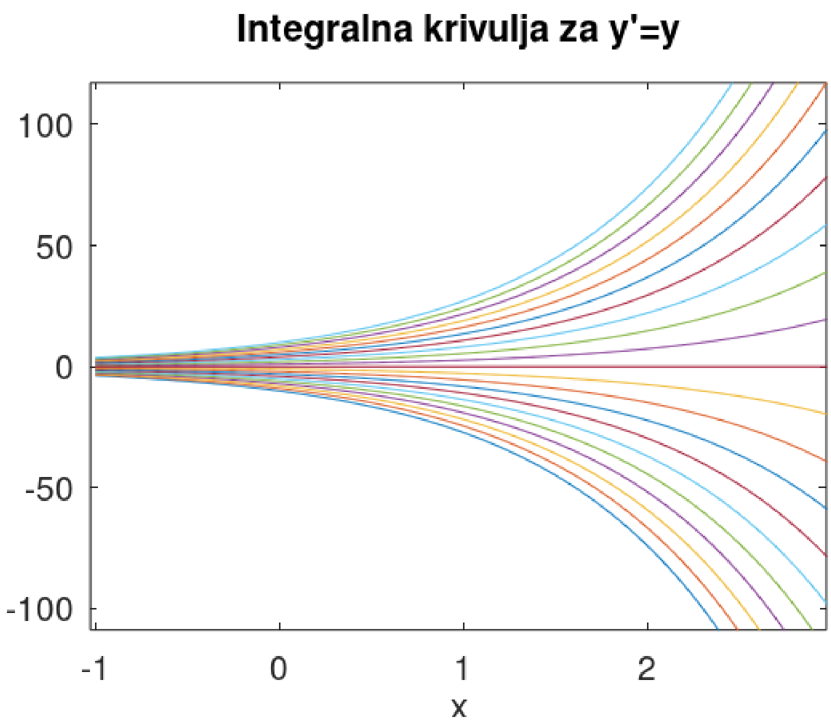
```
rjes=dsolve(odj, y(1)==1)
```

Vidi Primjere 10. i 11. u *RS_Mat2.m* skripti.

7.2 Integralna krivulja

Kada je diferencijalna jednadžba zadana bez početnog uvjeta, tj. kad imamo opće rješenje, njega grafički prikazujemo **integralnom krivuljom**. Opće rješenje nije samo jedna, već zapravo cijeli skup funkcija koje variraju ovisno o konstanti C.

Primjerice, opće rješenje dif. jednadžbe $y' = y$ je $y(x) = C \cdot e^x$. Sve te funkcije su eksponencijalne, a graf prolazi kroz točkom $(0, C)$. Kako je $C \in \mathbb{R}$, krivulje su padajuće ili rastuće. Na slici je integralna krivulja pridružena rješenju ove diferencijalne jednadžbe.


Integralna krivulja za y'=y
100
50
0
-50
-100
-1
0
1
2
x