VJEŽBE IZ MATEMATIKE 2

Ivana Baranović
Miroslav Jerković

Poglavlje 1

Integral

1.1 Neodređeni integral

Neka je zadana funkcija $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$: Funkcija $F : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ za koju je $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in (a, b)$ naziva se **primitivna funkcija** (antiderivacija) funkcije f.

Primjer 1 Odredite neku primitivnu funkciju slijedećih funkcija:

(a) $f(x) = x^2$

(b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

(c) $f(x) = 2^x$

(d) $f(x) = \frac{1}{x}$

(e) $f(x) = e^x$

(f) $f(x) = \sin x$

Rješenje:

(a) Tražimo neku funkciju koja derivirana daje x^2. Kako znamo da je $(x^3)' = 3x^2$, vidimo da je jedno rješenje $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Primjetimo da smo tom rješenju mogli dodati bilo koji konstantu jer $(const)' = 0$. Tako je rješenje i npr. $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2$.

(b) Znamo da je $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ pa je jedno od rješenja $F(x) = 2x^{\frac{1}{2}} + 1$.

(c) Npr. $F(x) = (\frac{1}{\ln 2})2^x + e$ jer $(2^x)' = (\ln 2)2^x$.

(d) $F(x) = \ln x$. Ovdje je rješenje npr. i $F(x) = \ln(2x)$ jer $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$ pa $(\ln(2x))' = (ln2 + \ln x)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

(e) $F(x) = e^x + 4$.

(f) $F(x) = -\cos x$.

Definicija 1.1.1 *Za zadanu funkciju $f(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ familija $\{F(x)|F'(x) = f(x), x \in (a, b)\}$ svih primitivnih funkcija te funkcije zove se* ***neodređeni integral*** *funkcije f i označava se sa $\int f(x)dx$.*

Primjer 2 Odredite slijedeće neodređene integrale:

(a) $\int (x^2 + x + 1)dx$ (c) $\int \frac{dx}{x+2}$

(b) $\int (\sqrt{x} + \cos x)dx$ (d) $\int \frac{dx}{1+x^2}$

Rješenje:

(a) Tražimo, kao i prije, funkciju koja derivirana daje $x^2 + x + 1$ i znamo da možemo dodati proizvoljnu konstantu. Stoga je rješenje: $\int (x^2+x+1)dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C$ gdje je C proizvoljna konstanta.

(b) $\int (\sqrt{x} + \cos x)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \sin x + C$

(c) $\int \frac{dx}{x+2} = \ln(|x+2| + C = \begin{cases} \ln(x+2) + C, & x > -2 \\ \ln(-(x+2)) + C, & x < -2. \end{cases}$

(d) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

Osnovna svojstva integriranja: iz definicije neodređenog integrala i svojstava derivacije lako se vidi da vrijede sljedeće formule:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$,

2) $\int (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int f(x)dx + \mu \int g(x)dx$,

3) $\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + C$.

Zadatak 3 Provjerite da vrijede slijedeće jednakosti:

(a) $\int (\sqrt[3]{x})'dx = \sqrt[3]{x} + C$ (c) $\left(\int \frac{dx}{\cos^2 x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

(b) $\int (\cos^2 x)'dx = \cos^2 x + C$ (d) $\left(\int \frac{\sin x}{x}\ dx\right)' = \frac{\sin x}{x}$

Rješenje:

(a) Imamo: $\int (\sqrt[3]{x})'dx = \int \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx = \frac{1}{3}\int x^{-\frac{2}{3}}dx = \sqrt[3]{x} + C$.

(c) Ovdje možemo koristiti definiciju neodređenog integrala i zaključak izvesti direktno ili računati:

$$\left(\int \frac{dx}{\cos^2 x}\right)' = (\tan x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

(d) Koristimo definiciju neodređenog integrala.

Zadatak 4 Vrijedi li jednakost: $\left(\int f(x)dx\right)' = \int f'(x)dx$?

Rješenje: Ne. Naime, $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ dok s druge strane imamo: $\int f'(x)dx = f(x) + C$. Uzmimo, npr. $f(x) = x$:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(\int xdx\right)' = (\frac{1}{2}x^2 + C)' = x$$

i

$$\int f'(x)dx = \int (x)'dx = \int dx = x + C$$

pa, ako uzmemo $C \neq 0$ jednakost ne vrijedi.

Zadatak 5 Koristeći svojstva integriranja, nađite sljedeće integrale:
(a) $\int(2x^2+1)^3 dx$ (b) $\int(2x^2+1)^{46} x dx$
Rješenje:

(a) $\int(2x^2+1)^3 dx = \int(8x^6+12x^4+6x^2+1)dx = \frac{8}{7}x^7+\frac{12}{5}x^5+\frac{6}{3}x^3+x+C$,

(b) $\int(2x^2+1)^{46} x dx = \int(2x^2+1)^{46}\frac{1}{4}d(2x^2+1) = \frac{1}{4}\int(2x^2+1)^{46}d(2x^2+1) = \frac{1}{4}\frac{(2x^2+1)^{47}}{47}+C = \frac{1}{188}(2x^2+1)^{47}+C$

Napomena: U zadatku (b) smo, ustvari, proveli zamjenu varijabli (vidi poglavlje Metoda supstitucije), $t = 2x^2+1$.

Zadatak 6 Nađite integrale:
(a) $\int\frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}dx$ (c) $\int\frac{x^2+1}{x-1}dx$

(b) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$
Rješenje:

(b)

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} &= \int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}dx = \frac{1}{2}\int\sqrt{x+1}dx - \frac{1}{2}\int\sqrt{x-1}dx = \\ &= \frac{1}{2}\int\sqrt{x+1}d(x+1) - \frac{1}{2}\int\sqrt{x-1}d(x-1) = \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{1}{3}\sqrt{(x-1)^3}+C\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+1}{x-1}dx &= \text{podijelimo ta dva polinoma } = \int(x+1+\frac{2}{x-1}dx = \\ &= x^2+x+2\ln(x-1)+C\end{aligned}$$

Zadatak 7 Nađite integrale:
(a) $\int 3^x e^x dx$ (c) $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$

(b) $\int 7^x 3^{-x} dx$
Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned}\int 3^x e^x dx &= \int e^{x\ln 3}e^x dx = \int e^{(1+\ln 3)x}dx = \\ &= \frac{1}{1+\ln 3}\int e^{(1+\ln 3)x}d((1+\ln 3)x) = \frac{e^{(1+\ln 3)x}}{1+\ln 3}+C\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx &= \int\left(2\left(\frac{2}{10}\right)^x-\frac{1}{5}\left(\frac{5}{10}\right)^{x-1}\right)dx = 2\int\left(\frac{1}{5}\right)^x dx-\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}dx = \\ &= \ldots = \frac{1}{5\ln 2}2^{-x+1}-\frac{2}{\ln 5}5^{-x}+C\end{aligned}$$

Zadatak 8 Nađite integral: $\int \frac{ax+b}{cx+d}dx$, gdje $a, c \neq 0$.

Rješenje:

$$\begin{aligned}\int \frac{ax+b}{cx+d}dx &= \frac{a}{c}\int\frac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}}dx = \frac{a}{c}\left[\int\frac{x+\frac{d}{c}+\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}}dx\right] = \\ &= \frac{a}{c}\left[x+\left(\frac{b}{a}-\frac{d}{c}\right)\ln\left|x+\frac{d}{c}\right|\right]+C\end{aligned}$$

Zadatak 9 Nađite integrale:

(a) $\int \tan x dx$

(b) $\int \cot x dx$

(c) $\int \tan^2 x dx$

(d) $\int \cot^2 x dx$

Rješenje:

(a) $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int\frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x|+C$

(c) $\int \tan^2 \ x dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = \tan x - x + C$

Zadatak 10 Nađite integrale:

(a) $\int \frac{4}{\sin^2(2x)}dx$

(b) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

(c) $\int \frac{dx}{\sin x}$

(d) $\int \frac{dx}{\cos x}$

Rješenje:

(a) $\int \frac{4}{\sin^2(2x)}dx = 2\int\frac{d(2x)}{\sin^2(2x)} = -2\cot(2x)+C$

(b) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x} = \tan x - \cot x + C$

(c) $\int \frac{dx}{\sin x} = \int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int\frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$

(d) $\int \frac{dx}{\cos x} = \int\frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \ldots = -\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right|+C$

Zadatak 11 Nađite integrale:

(a) $\int x\sqrt{2-5x}dx$

(b) $\int x\sqrt{2-5x^2}dx$

Rješenje:

(a)

$$\int x\sqrt{2-5x}dx = \int -\frac{1}{5}(2-5x-2)\sqrt{2-5x}dx = -\frac{1}{5}\int(2-5x)^{\frac{3}{2}}dx+\frac{2}{5}\int\sqrt{2-5x}dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{25}\int(2-5x)^{\frac{3}{2}}d(2-5x) - \frac{2}{25}\int(2-5x)^{\frac{1}{2}}d(2-5x) = \\
&= \frac{2}{125}(2-5x)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{75}(2-5x)^{\frac{3}{2}} + C
\end{aligned}
$$

Zadatak 12 Nađite integrale:

(a) $\int e^{3\cos x}\sin x dx$

(b) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$

(c) $\int \frac{2^{\arctan x}}{1+x^2}dx$

Rješenje:

(a) $\int e^{3\cos x}\sin x dx = -\frac{1}{3}\int e^{3\cos x}d(3\cos x) = -\frac{1}{3}e^{3\cos x} + C$

Zadatak 13 Nađite integrale:

(a) $\int \frac{e^x}{e^x-1}dx$

(b) $\frac{dx}{3^x+2}$

Rješenje:

(b)

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{3^x+2} &= \frac{1}{2}\int \frac{3^x+2-3^x}{3^x+2}dx = \frac{1}{2}\left[\int dx - \frac{1}{\ln 3}\int \frac{d(3^x+2)}{3^x+2}\right] \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{\ln 3}\ln(3^x+2) + C
\end{aligned}
$$

Zadatak 14 Nađite integrale:

(a) $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

(b) $\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$

Rješenje:

(a) $\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx = \int \frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}} = \ldots$

1.1.1 Metoda supstitucije

Ponekad možemo olakšati integriranje ako danu varijablu zamijenimo nekom prikladnijom prema slijedećem pravilu:

$$
\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \phi(t) + C \quad \Rightarrow \quad \int f(x)dx = \phi(\varphi^{-1}(x)) + C
$$

Primjetimo da smo metodu supstitucije već indirektno koristili u nekim prijašnjim zadacima.

Zadatak 1 Prigodnom supstitucijom riješite sljedeće integrale:

(a) $\int x\sqrt{1+3x^2}dx$

(b) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

(c) $\int x^2 3^{x^3}dx$

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1+3x^2}dx &= \left|\, t=1+3x^2 \Rightarrow dt=6xdx \,\right| = \frac{1}{6}\int \sqrt{t}dt = \frac{1}{6}\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C = \\ &= \frac{1}{9}(1+3x^2)^{\frac{3}{2}}+C\end{aligned}$$

Napomena: Naša susptitucija ekvivalentna je donjem postupku koji smo koristili u prijašnjim zadacima:

$$\int x\sqrt{1+3x^2}dx = \int \sqrt{1+3x^2}\frac{1}{6}d(1+3x^2) = \dots$$

(b)

$$\begin{aligned}\int x^2 3^{x^3}dx &= \left|\, t=x^3 \Rightarrow dt=3x^2dx \,\right| = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t + C = \\ &= \frac{1}{3}e^{x^3}+C\end{aligned}$$

Zadatak 2 Prigodnom supstitucijom riješite sljedeće integrale:

(a) $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\int \frac{2^{\arctan x}}{1+x^2}dx$

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\arcsin^2 x\sqrt{1-x^2}} &= \left|\, t=\arcsin x \Rightarrow dt=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \,\right| = \int \frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{t}+C = \\ &= \frac{1}{\arcsin x}+C\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int \frac{2^{\arctan x}}{1+x^2}dx &= \left|\, t=\arctan x \Rightarrow dt=\frac{dx}{1+x^2} \,\right| = \int 2^t dt \\ &= \frac{1}{\ln 2}2^t + C = \frac{1}{\ln 2}2^{\arctan x}+C\end{aligned}$$

Zadatak 3 Odredite sljedeće neodređene integrale:

(a) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{2\sin^2 x+\cos^2 x}}dx$ (c) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin^2 x+\cos^2 x}}dx$

(b) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2\sin^2 x+\cos^2 x}}dx$

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{2\sin^2 x+\cos^2 x}}dx &= \int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} = \left|\, t=\sin^2 x \Rightarrow dt = 2\sin x\cos x\right| = \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1+t}+C = \sqrt{1+\sin^2 x}+C\end{aligned}$$

(b) i (c) sami

Zadatak 4 Odredite sljedeći integral uz upotrebu navedene supstitucije:

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$, supstitucija $x = t^2$

(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$, supstitucija $x = \sin^2 t$

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} &= \left| x = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{x} \text{ i } dx = 2tdt \right| = \int \frac{2t}{\sqrt{t^2(1-t^2)}} dt = \\ &= 2\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2 \arcsin t + C = 2 \arcsin \sqrt{x} + C\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} &= \left| x = \sin^2 t \Rightarrow t = \arcsin \sqrt{x} \text{ i } dx = 2 \sin t \cos t dt \right| = \int \frac{2 \sin t \cos t}{\sin t \cos t} dt = \\ &= 2\int dt = 2t + C = 2 \arcsin \sqrt{x} + C\end{aligned}$$

Zadatak 5 Odredite slijedeće neodređene integrale:

(a) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$ (b) $\int \frac{\ln 2x}{x \ln 4x} dx$

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned}\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx &= \left| x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt \right| = \int \frac{1+t^2}{1+t} 2tdt = 2\int \frac{t^3+t}{t+1} dt \\ &= 2\int (t^2 - t + 2 - \frac{2}{1+t}) dt = \frac{2}{3}t^3 - t^2 + 4t - 4\ln(1+t) + C = \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x + 4\sqrt{x} - 4\ln(1+\sqrt{x}) + C\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln 2x}{x \ln 4x} dx &= \int \frac{\ln 2 + \ln x}{x(\ln 4 + \ln x)} dx = \left| \ln x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt \right| = \int \frac{\ln 2 + t}{\ln 4 + t} dt = \\ &= \int \frac{\ln 4 + t - \ln 2}{\ln 4 + t} dt = \int \left(1 - \frac{\ln 2}{\ln 4 + t}\right) dt = \\ &= t - \ln 2 \cdot \ln|\ln 4 + t| + C = \ln x - \ln 2 \cdot \ln|\ln 4 + \ln x| + C\end{aligned}$$

Zadatak 6 Odredite sljedeći integral uz upotrebu navedene supstitucije:

(a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$, supstitucija $x = \frac{1}{t}$

(b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$, supstitucija $x = \tan t$

Trigonometrijske supstitucije: Neka je $a > 0$.

1) Ako integral sadrži radikal $\sqrt{a^2 - x^2}$, onda obično stavljamo $x = a\sin t$ i dobivamo
$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t.$$

2) Ako integral sadrži radikal $\sqrt{x^2 - a^2}$, stavljamo $x = \frac{a}{\cos t}$ i dobivamo
$$\sqrt{x^2 - a^2} = a\tan t.$$

3) Ako integral sadrži radikal $\sqrt{a^2 + x^2}$, stavljamo $x = a\tan t$ i dobivamo
$$\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos t}.$$

Zadatak 7 Primjenom trigonometrijskih supstitucija izračunajte:

(a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(b) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$

(c) $\int \sqrt{1-x^2}dx$

(d) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \left|\ x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt\ \right| = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t}\cos t dt = \int \sin^2 t dt = \\
&= \int \frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\int dt - \frac{1}{2}\int \cos 2t dt = \\
&= \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t + C = \frac{1}{2}\arcsin x - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx &= \left|\ x = \tan t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos^2 t}\ \right| = \int \frac{1}{\cos t}\frac{1}{\tan t}\frac{dt}{\cos^2 t} = \\
&= \int \frac{dt}{\cos^2 t\sin t} = \int \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t\sin t}dt = \int \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt + \int \frac{dt}{\sin t} = \\
&= \frac{1}{\cos t} + \int \frac{dt}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} = \frac{1}{\cos t} + \frac{1}{2}\int \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}}dt = \\
&= \frac{1}{\cos t} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\tan\frac{t}{2}\cos^2\frac{t}{2}} = \frac{1}{\cos t} + \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + C = \\
&= \sqrt{x^2+1} + \ln\left|\frac{-1 \pm \sqrt{1+\tan^2 t}}{\tan t}\right| + C = \\
&= \sqrt{x^2+1} + \ln\left|\frac{-1 \pm \sqrt{1+x^2}}{x}\right| + C
\end{aligned}$$

1.1.2 Parcijalna integracija

Neka su u i v neprekidno derivabilne funkcije (svojstvo neprekidnosti nećemo ovdje pobliže objašnjavati, ono za nas znači da je funkcija "dovoljno lijepa" da se sa njom može raditi parcijalna integracija). Onda je

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Primjer 1 Primjenom formule za parcijalnu integraciju izračunajte

$$\int e^x \sin xdx.$$

Rješenje: Imamo

$$\begin{aligned}
\int e^x \sin xdx &= -\left(\int e^x(-\sin x)dx\right) = \begin{vmatrix} u = e^x & dv = -\sin x \\ du = e^x dx & v = \cos xdx \end{vmatrix} = \\
&= -\left(e^x \cos x - \int \cos xe^x dx\right) = \begin{vmatrix} u = e^x & dv = \cos x \\ du = e^x dx & v = \sin xdx \end{vmatrix} = \\
&= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin xdx.
\end{aligned}$$

Sada primjetimo da se integral od kojeg smo krenuli pojavio sa desne strane ali sa suprotnim predznakom. Prebacimo ga na lijevu stranu i dobivamo:

$$\begin{aligned}
2\int e^x \sin xdx &= e^x \sin x - e^x \cos x \\
\Rightarrow \int e^x \sin xdx &= \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + C
\end{aligned}$$

Zadatak 2 Parcijalnom integracijom riješite:

(a) $\int x \sin xdx$ (c) $\int x^2 e^x dx$

(b) $\int x \cos xdx$ (d) $\int x \ln xdx$

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned}
\int x \sin xdx &= -\left(\int x(-\sin x)dx\right) = \begin{vmatrix} u = x & dv = -\sin x \\ du = dx & v = \cos xdx \end{vmatrix} = \\
&= -x \cos x + \int \cos xdx = -x \cos x + \sin x + C
\end{aligned}$$

(c)

$$\int x^2 e^x dx = \begin{vmatrix} u = x^2 & dv = e^x dx \\ du = 2xdx & v = e^x \end{vmatrix} = x^2 e^x - \int 2xe^x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = 2x & dv = e^x dx \\ du = 2dx & v = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - 2xe^x + \int 2e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

(c)

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = xdx \\ du = \frac{dx}{x} & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2 \ln x}{2} - \int x^2 \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int xdx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C \end{aligned}$$

Zadatak 3 Riješite parcijalnom integracijom:

(a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$ (b) $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \frac{x}{\sqrt{1+x^2} dx} \\ du = dx & v = \sqrt{1+x^2} \end{array} \right| = x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx = \\ &= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx \end{aligned}$$

Primjetimo da se početni integral pojavio sa desne strane i to sa suprotnim predznakom; prebacujemo ga na lijevi stranu i dobivamo:

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx &= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad \Rightarrow \\ \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} - \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{2} + C \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \frac{x}{(1+x^2)^2 dx} \\ du = dx & v = -\frac{1}{2(1+x^2)} \end{array} \right| = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \int \frac{dx}{2(1+x^2)} dx = \\ &= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x + C \end{aligned}$$

Zadatak 4 Riješite:

(a) $\int \frac{x^2-2x+5}{e^x} dx$ (b) $\int (x^3+1) \cos 2x dx$

Zadatak 5 Primjenom parcijalne integracije riješite:

(a) $\int \arcsin x dx$ (c) $\int \sqrt{a^2+x^2} dx, \quad a \neq 0$

(b) $\int x^2 \arctan x dx$

Rješenje:

(a)

$$\int \arcsin x dx = \begin{vmatrix} u = \arcsin x & dv = dx \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & v = x \end{vmatrix} = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$
$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

(b)

$$\int x^2 \arctan x dx = \begin{vmatrix} u = \arctan x & dv = x^2 dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2} & v = \frac{x^3}{3} \end{vmatrix} = \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} dx =$$
$$= \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{3} \int \frac{x^2}{1+x^2} \frac{1}{2} d(x^2) = \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{6} \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} d(x^2) =$$
$$= \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{6} \left(\int d(x^2) - \int \frac{d(x^2)}{1+x^2} \right) =$$
$$= \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{6} (x^2 - \ln(1+x^2)) + C$$

(c)

$$\int \sqrt{a^2+x^2} = \int \frac{a^2+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}} dx + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \quad \text{vidi Zadatak 3 (b)} \quad =$$
$$= a^2 \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + C =$$
$$= \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2+x^2} + C$$

1.1.3 Integriranje racionalnih funkcija

Za integriranje racionalnih funkcija najčešće koristimo metodu neodređenih koeficijenata i metodu Ostrogradskog koju ovdje nećemo opisivati.

Metoda neodređenih koeficijenata: Nakon odvajanja cijelog dijela, integriranje racionalne funkcije svodimo na integriranje pravog racionalnog razlomka:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

gdje su $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi takvi da je stupanj polinoma $P(x)$ manji od stupnja polinoma $Q(x)$. Ako je

$$Q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_n)^{\alpha_n}$$

gdje su $x_1, \dots, x_n$ različiti realni korijeni polinom $Q(x)$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ prirodni brojevi, onda gornji razlomak možemo rastaviti na parcijalne razlomke:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \dots$$
$$\dots + \frac{A_{n1}}{x - x_n} + \frac{A_{n2}}{(x - x_n)^2} + \dots + \frac{A_{n\alpha_n}}{(x - x_n)^{\alpha_n}}.$$

Neodređene koeficijente $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{n\alpha_n}$ nalazimo tako da gornji identitet svedemo na cijeli oblik pa izjednačimo koeficijente s istim stupnjem varijable x ili tako da za x u tu istu jednadžbu uvrstimo prikladne brojeve.

Primjer 1 Izračunajte integral $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$

Rješenje: U zadanom integralu prvo odvajamo cijeli dio:

$$\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} = \frac{x^2-5x+6+3}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{3}{x^2-5x+6}$$

pa imamo

$$\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx = \int dx + \int \frac{3}{x^2-5x+6}dx = x + 3\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$$

Sada je u brojniku $P(x) = 1$ što je nižeg stupnja nego $Q(x) = x^2 - 5x + 6$ u nazivniku. Vrijedi:

$$Q(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2).$$

Stoga rastavljamo naš razlomak na sljedeće parcijalne razlomke:

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}.$$

Tražimo keoficijente A i B.

Prvi način: svodimo naš identitet na cijeli oblik i izjednačujemo koeficijente s istim stupnjem varijable x.

$$\begin{array}{rcl}
\frac{1}{x^2-5x+6} & = & \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} \quad \Big/ (x-3)(x-2) \quad \Rightarrow \\
1 & = & A(x-2) + B(x-3) \quad \Rightarrow \\
1 & = & (A+B)x - 2A - 3B \\
\text{iz čega slijedi} & & A + B = 0 \quad \text{i} \quad -2A - 3B = 1 \quad \Rightarrow \\
 & & A = 1 \quad \text{i} \quad B = -1
\end{array}$$

Drugin način: nalazimo A i B tako da uvrstimo zgodne vrijednosti za x u jednadžbi $1 = A(x-2) + B(x-3)$, npr.

$$\begin{array}{rcl}
x & = & 2 \quad \Rightarrow \quad 1 = -B \quad \Rightarrow B = -1 \\
x & = & 3 \quad \Rightarrow \quad 1 = A \quad \Rightarrow A = 1
\end{array}$$

Sada imamo:

$$\begin{array}{rcl}
\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx & = & x + 3\int \frac{dx}{x^2-5x+6} = x + 3\int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right)dx = \\
 & = & x + 3\ln|x-3| - 3\ln|x-2| + C = x + 3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C.
\end{array}$$

Primjer 2 Nađite integral: $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx$.

Rješenje: Direktnim uvrštavanjem provjerimo da 3 i -1 nisu nule polinoma u brojniku pa je, prema tome, razlomak skraćen do kraja. Rastavljamo ga na parcijalne razlomke:

$$\begin{aligned}\frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2} &= \frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2} \quad \Rightarrow \\ 5x^2+6x+9 &= A(x-3)(x+1)^2+B(x+1)^2+C(x-3)^2(x+1)+D(x-3)^2\end{aligned}$$

Uvrštavamo pogodne vrijednosti za x:

$$\begin{aligned}x=3 \quad &\Rightarrow \quad = \quad 5\cdot 9+6\cdot 3+9=B\cdot 16 \quad \Rightarrow \quad B=\frac{72}{16}=\frac{9}{2}\\ x=-1 \quad &\Rightarrow \quad = \quad 5-6+9=D\cdot 16 \quad \Rightarrow \quad D=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Sada vratimo dobivene vrijednosti u početnu jednadžbu i imamo:

$$2(5x^2+6x+9)=A(x-3)(x+1)^2+9(x+1)^2+C(x-3)^2(x+1)+(x-3)^2.$$

To dalje računamo i izjednačavamo koeficijente uz potencije od x:

$$\begin{aligned}10x^2+12x+18 &= A(x-3)(x^2+2x+1)+9(x^2+2x+1)^2+\\ &\qquad +C(x^2-6x+9)(x+1)+(x^2-6x+9)=\\ &= A(x^3-x^2-5x-3)+9(x^2+2x+1)+C(x^3-5x^2+3x+9)+(x^2-6x+9)\\ \text{koeficijenti uz } x^3 &: \quad A+C=0\\ \text{slobodni koeficijenti} &: \quad -3A+9+9C+9=18 \quad \Rightarrow \quad -3A+9C=0\\ \Rightarrow & \quad A=0 \quad \text{i} \quad C=0.\end{aligned}$$

Stoga slijedi:

$$\begin{aligned}\int\frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx &= \int\left(\frac{9}{2(x-3)^2}+\frac{1}{2(x+1)^2}\right)dx=\\ &= -\frac{9}{2(x-3)}-\frac{1}{2(x+1)}+C\end{aligned}$$

(ovdje je C u zadnjem redu kao i obično oznaka za konstantu, te nema veze za C iz rastava na parcijalne razlomke).

Zadatak 3 Riješite sljedeće integrale:

(a) $\int\frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx$ (b) $\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$

Rješenje:

(a) Brojnik je istog stupnja kao i nazivnik pa prvo dijelimo polinome:

$$\frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}=\frac{x^3+x+1}{x^3+x}=1+\frac{1}{x^3+x}$$

Sada imamo:

$$\int\frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}=\int dx+\int\frac{dx}{x^3+x}.$$

Rastavljamo razlomak u drugom integralu na parcijalne razlomke:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x^3+x} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \quad \Rightarrow \\
1 &= A(x^2+1) + (Bx+C)x \quad \Rightarrow \\
& A+B=0, \quad C=0, \quad A=1 \quad \text{pa} \quad B=-1
\end{aligned}
$$

Slijedi:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx &= \int dx + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1}dx = \\
&= x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C
\end{aligned}
$$

b) Ovdje u nazivniku imamo jednu realnu, već istaknutu nultočku i polinom drugog stupnja pa odmah tražimo koeficijente:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \quad \Rightarrow \\
1 &= A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1) \quad \Rightarrow
\end{aligned}
$$

nakon izjednačavanja uz stupnjeve $\Rightarrow \quad A = \frac{1}{3},\ B = -\frac{1}{3},\ C = -\frac{2}{3}$

Sada imamo:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx &= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx = \\
&= \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{3}{6}\int \frac{dx}{x^2+x+1}dx = \\
&= \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx
\end{aligned}
$$

i ovaj zadnji integral je očito arctan pa dovršite sami.

Problem površine - određeni integral. Leibniz-Newtonova formula

Računat ćemo određeni integral funkcije f na intervalu $[a,b]$, u oznaci $\int_a^b f(x)dx$, te kasnije upoznati geometrijsku interpretaciju dobivenog rezultata. Brojeve a i b zovemo redom **donja**, odnosno **gornja granica integracije**, a interval $[a,b]$ **interval integracije**. Potrebno je poznavati osnovna svojstva određenog integrala integrabilne funkcije f na intervalu $[a,b] \subseteq \mathscr{D}(f)$:

(1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

(2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(3) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, gdje je c konstanta

(4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ za svaki $c \in < a,b >$.

(5) $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ ako je $f(x) \geq 0$ za svaki $x \in [a,b]$.

No, ostaje pitanje kako efektivno **računati** neki određeni integral? Ovdje se ključnom pokazuje tzv. **Newton-Leibnizova formula**:

Ako je funkcija f integrabilna na intervalu $[a,b]$ i ima na tom intervalu primitivnu funkciju F (funkciju takvu da je $F' = f$), onda je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Često umjesto $F(b) - F(a)$ pišemo skraćeno $F(x)|_a^b$, pa Newton-Leibnizovu formulu možete pamtiti u ovom obliku:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b.$$

Napomena: Znamo da je, prema definiciji, neodređeni integral funkcije f jednak primitivnoj funkciji F, točnije čitavoj klasi primitivnih funkcija $\{F + C | C \in \mathbb{R}\}$. Dakle, dovoljno je naći neodređeni integral funkcije f i potom određeni integral izračunati kao razliku vrijednosti primitivne funkcije u gornjoj i donjoj granici integracije. Pritom je važno uvidjeti da ovaj račun *ne ovisi* o tome kojeg smo predstavnika klase primitivnih funkcija izabrali. Naime, ako su F_1 i F_2 dvije primitivne funkcije funkcije f na intervalu $[a,b]$, onda znamo da postoji realna konstanta C takva da je $F_2 = F_1 + C$, pa je

$F_1|_a^b = F_1(b) - F_1(a) = F_1(b) + C - (F_1(a) + C) = F_2(b) - F_2(a) = F_2|_a^b$.

Stoga se (radi jednostavnosti) kod računa određenog integrala *zanemaruje aditivna konstanta*.

Primjer 1 Izračunajte određeni integral $\int_{-3}^{5}(3x^2-1)dx$.

Rješenje: Koristeći Newton-Leibnizovu formulu računamo:

$$\int_{-3}^{5}(3x^2-1)dx = \int_{-3}^{5}3x^2dx - \int_{-3}^{5}1dx =$$
$$= (x^3-x)|_{-3}^{5} = 5^3 - 5 - ((-3)^3 - (-3)) = 120 + 24 = 144.$$

Određeni integrali pozitivnih funkcija

Određeni integral $\int_a^b f(x)dx$ **pozitivne** funkcije f točno je jednak površini P ravninskog područja omeđenog grafom funkcije f, $x-$osi i pravcima $x = a$ i $x = b$.

Primjer 2

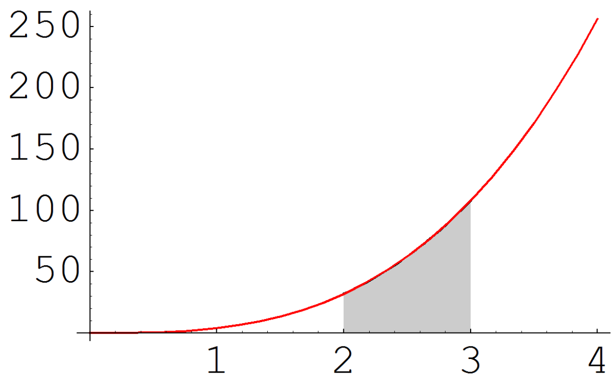
Izračunajte određeni integral $\int_2^3 4x^3dx$ i geometrijski interpretirajte rezultat.

Rješenje:

Znamo da je primitivna funkcija funkcije $g(x) = x^3$ dana s $G(x) = \frac{x^4}{4}$ i tu činjenicu uz svojsvto (3) i Newton-Leibnizovu formulu koristimo u računu:

$$\int_2^3 4x^3dx \quad = \quad 4\int_2^3 x^3dx = 4\cdot(\frac{x^4}{4})|_2^3 = (x^4)|_2^3 = 3^4 - 2^4 = 65.$$

Geometrijska interpretacija rezultata je sljedeća: rezultat integracije, dakle 65, brojčano odgovara površini područja odozgo omeđenog grafom funkcije $f(x) = 4x^3$, odozdo $x-$osi, slijeva pravcem $x = 2$, a zdesna pravcem $x = 3$:



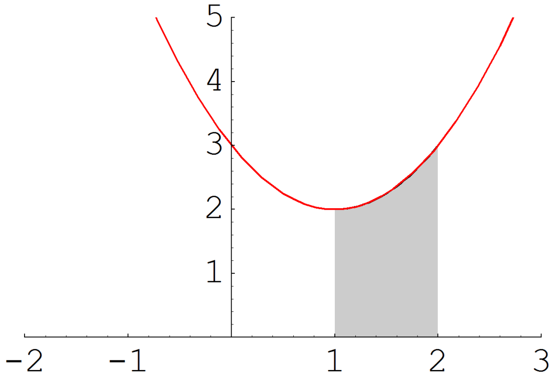
Primjer 3

Izračunajte $\int_1^2(x^2-2x+3)dx$ i geometrijski interpretirajte rezultat.

Rješenje:

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x^2-2x+3)dx &= \int_1^2 x^2 dx - 2\int_1^2 x dx + 3\int_1^2 dx = \\ &= (\frac{x^3}{3})|_1^2 - 2(\frac{x^2}{2})|_1^2 + 3x|_1^2 = \frac{7}{3}.\end{aligned}$$

Broj $\frac{7}{3}$ brojčano odgovara površini lika odozgo omeđenog grafom funkcije $f(x) = x^2-2x+3$, ododzo $x-$osi, slijeva pravcem $x=1$, a zdesna pravcem $x=3$:



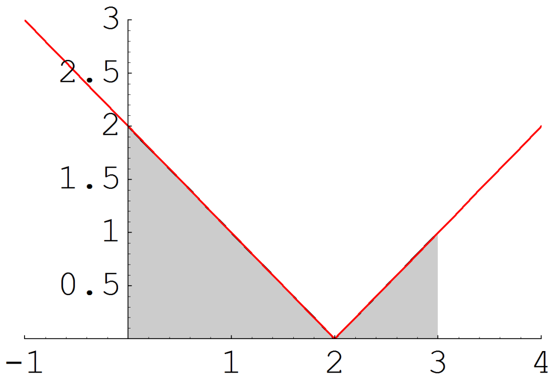
Primjer 4

Izračunajte $\int_0^3 |x-2|dx$ i geometrijski interpretirajte rezultat.

Rješenje:

$$\begin{aligned}\int_0^3 |x-2|dx &= \int_0^2 -(x-2)dx + \int_2^3 (x-2)dx = \\ &= -(\frac{x^2}{2}-2x)|_0^2 + (\frac{x^2}{2}-2x)|_2^3 = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Što se geometrijske intrepretacije rezultata tiče, broj $\frac{5}{2}$ odgovara površini područja odozgo omeđenog grafom funkcije $f(x) = |x-2|$, odozdo $x-$osi, slijeva pravcem $x=0$ (dakle $y-$osi), a zdesna pravcem $x=3$:

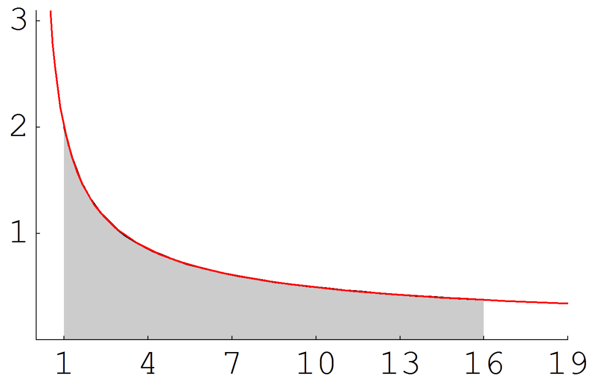


Primjer 5 Izračunajte $\int_1^{16} \frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}}{x} dx$ i geometrijski interpretirajte dobiveni rezultat.

Rješenje: Najprije računamo zadani integral:

$$\int_1^{16} \frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}}{x} dx = \int_1^{16} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} dx + \int_1^{16} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x} dx = \int_1^{16} x^{\frac{-1}{2}} dx + \int_1^{16} x^{\frac{-3}{4}} dx =$$
$$= (\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}})|_1^{16} + (\frac{x^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}})|_1^{16} = (2\sqrt{x}+4\sqrt[4]{x})|_1^{16} = (2\sqrt{16}+4\sqrt[4]{16}) - (2\sqrt{1}+4\sqrt[4]{1}) =$$
$$= 2\cdot 4 + 4\cdot 2 - 2 - 4 = 16 - 6 = 10.$$

Rezultat brojčano odgovara površini lika odozgo omeđenog grafom funkcije $f(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}}{x}$, ododzo $x-$osi, slijeva pravcem $x = 1$, a zdesna pravcem $x = 16$:



Zadatak 1 Izračunajte i geometrijski interpretirajte sljedeće određene integrale:

(1) $\int_1^2 2x dx$

(2) $\int_{-2}^3 |x^3| dx$

(3) $\int_1^2 \frac{1}{x^6} dx$

(4) $\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx$

(5) $\int_0^{2\pi} |\sin(2x)| dx$

Određeni integrali ostalih funkcija

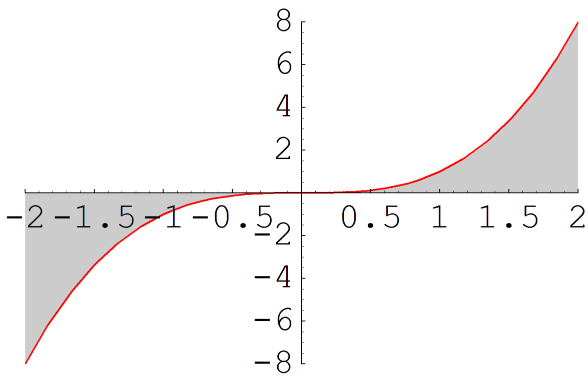
Određeni integral $\int_a^b f(x)dx$ funkcije f koja na intervalu $[a,b]$ ne poprima samo pozitivne vrijednosti jednak je razlici između zbroja površina iznad osi x (a ispod grafa funkcije f) i zbroja površina ispod osi x (a iznad grafa funkcije f). Najbolje da to objasnimo na primjeru.

Primjer 6 Izračunajte određeni integral $\int_{-2}^2 x^3 dx$ i geometrijski interpretirajte rezultat.

Rješenje: Vidimo da je rezultat integracije nula:

$$\int_{-2}^2 x^3 dx = (\frac{x^4}{4})|_{-2}^2 = (\frac{2^4}{4}) - (\frac{(-2)^4}{4}) = 4 - 4 = 0.$$

Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = x^3$ na intervalu $[-2, 2]$:



Vidimo da nultočka funkcije $f(x) = x^3$, tj. točka $x = 0$ označava prijelaz grafa funkcije f iz donje u gornju poluravninu koordinatnog sustava. Integral $\int_{-2}^{2} x^3 dx$ možemo zapisati ovako:

$$\int_{-2}^{2} x^3 dx = \int_{-2}^{0} x^3 dx + \int_{0}^{2} x^3 dx.$$

Prvi integral s desne strane gornje jednakosti računa **negativnu vrijednost** površine područja omeđenog odozdo grafom funkcije f, odozgo s $x-$osi, slijeva pravcem $x = -2$, a zdesna pravcem $x = 0$, dok drugi integral s desne strane gornje jednakosti računa površinu područja omeđenog odozgo grafom funkcije f, odozdo s $x-$osi, slijeva pravcem $x = 0$, a zdesna pravcem $x = 2$. Ako prvu površinu odznačimo s P_1, a drugu s P_2, onda zapravo vrijedi

$$\int_{-2}^{2} x^3 dx = P_1 - P_2.$$

Kako je $\int_{-2}^{2} x^3 dx = 0$, to je $P_1 - P_2 = 0$, tj. $P_1 = P_2$, Što je znog simetričnosti funkcije f (ona je neparna, tj. simetrična obzirom na ishodište koordinatnog sustava) i jasno. Dakle, rezultat integracije ukazuje da su dvije površine sa slike međusobno jednake.

Primjer 7

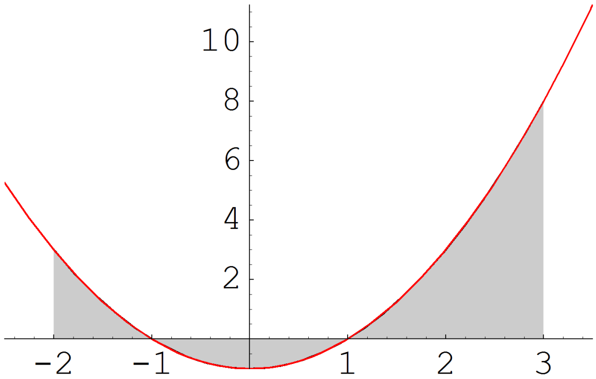
Izračunajte određeni integral $\int_{-2}^{3}(x^2 - 1)dx$ i geometrijski interpretirajte rezultat.

Rješenje:

Računamo:

$$\int_{-2}^{3}(x^2-1)dx = (\frac{x^3}{3} - x)|_{-2}^{3} = (\frac{3^3}{3} - 3) - (\frac{(-2)^3}{3} - (-2)) = 6 - (\frac{-2}{3}) = \frac{20}{3}.$$

Geometrijska interpretacija rezultata je sljedeća: rezultat integracije, dakle $\frac{20}{3}$, brojčano odgovara $P_1 - P_2 + P_3$, gdje je P_1 površina područja omeđenog slijeva pravcem $x = -2$ a zdesna pravcem $x = -1$, P_2 površina područja omeđenog slijeva pravcem $x = -1$ a zdesna pravcem $x = 1$, te P_3 površina područja omeđenog slijeva pravcem $x = 1$ a zdesna pravcem $x = 3$. Sva tri područja su odozgo i odozdo omeđena grafom funkcije $f(x) = x^2 - 1$ te $x-$osi. Točke $x = -1$ i $x = 1$ u kojima graf funkcije f prelazi iz gornje u donju poluravninu koordinatnog sustava dobivamo rješavanjem jednadžbe $f(x) = x^2 - 1 = 0$ (to su nultočke funkcije f).



Ovaj rezultat smo dobili stoga što je

$$\int_{-2}^{3}(x^2-1)dx = \int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx + \int_{-1}^{1}(x^2-1)dx + \int_{1}^{3}(x^2-1)dx,$$

gdje prvi integral s desne strane odgovara P_1, drugi $-P_2$, a treći P_3.

Primjer 8 Izračunajte površinu područja omeđenog grafom funkcije $f(x) = x^2 - 1$, $x-$osi te pravcima $x = -2$ i $x = 3$.

Rješenje: Rješavanje ovog zadatka slično je prethodnom, uz bitnu razliku da ćemo ukupnu površinu $P = P_1 + P_2 + P_3$ lika s gornje slike dobiti ako integral $\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx$ računamo s negativnim predznakom. To znači da je

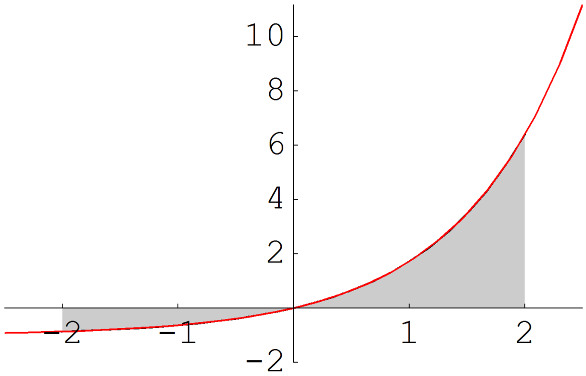
$$\begin{aligned}
P &= \int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx - \int_{-1}^{1}(x^2-1)dx + \int_{1}^{3}(x^2-1)dx = \\
&= (\frac{x^3}{3}-x)|_{-2}^{-1} - (\frac{x^3}{3}-x)|_{-1}^{1} + (\frac{x^3}{3}-x)|_{1}^{3} = \\
&= [(\frac{(-1)^3}{3}-(-1)) - (\frac{(-2)^3}{3}-(-2))] - \\
&\quad -[(\frac{1^3}{3}-1) - (\frac{(-1)^3}{3}-(-1))] + \\
&\quad +[(\frac{3^3}{3}-3) - (\frac{1^3}{3}-1)] = \\
&= \frac{4}{3} - (\frac{-4}{3}) + \frac{20}{3} = \frac{28}{3}.
\end{aligned}$$

Primjer 9 Izračunajte površinu područja omeđenog grafom funkcije $f(x) = e^x - 1$, $x-$osi te pravcima $x = -2$, $x = 2$.

Rješenje: Najprije provjeravamo koje su nultočke funkcije f, tj. rješavamo jednadžbu $f(x) = 0$:

$$e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = \ln 1 \Rightarrow x = 0.$$

Kako se $x = 0$ nalazi unutar intervala integracije $[-2, 2]$, jedan dio zadanog područja integracije se nalazi ispod, a drugi iznad $x-$osi:



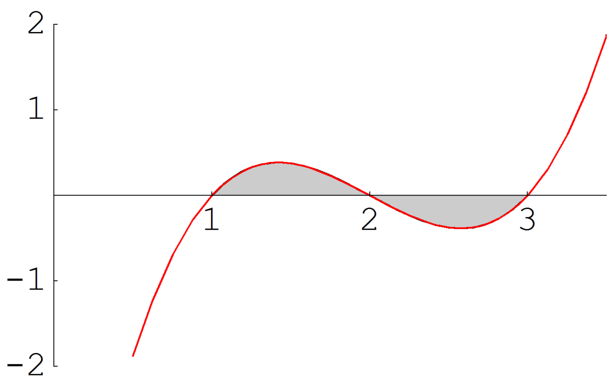
Vidimo sa slike da je (kako bismo izračunali površinu P zadanog područja) potrebno integral na intervalu $[-2,0]$ računati s negativnim, a na intervali $[0,2]$ s pozitivnim predznakom:

$$\begin{aligned}
P &= -\int_{-2}^{0}(e^x-1)dx+\int_{0}^{2}(e^x-1)dx= \\
&= -(e^x-x)|_{-2}^{0}+(e^x-x)|_{0}^{2}= \\
&= -[(e^0-0)-(e^{-2}-(-2))]+[(e^2-2)-(e^0-0)]= \\
&= -(1-e^{-2}-2)+(e^2-2-1)=\ldots= \\
&= e^2+e^{-2}-2.
\end{aligned}$$

Primjer 10

Izračunjte površinu područja omeđenog grafom funkcije $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$ i $x-$osi.

Rješenje: Primijetimo da nisu zadane granice područja slijeva i zdesna, no to nije niti potrebno, jer je područje u potpunosti određeno zahtjevom iz teksta zadatka (ograničenost odozgo i odozdo). Naime, očito su nultočke ove funkcije točke $x_1=1$, $x_2=2$ i $x_3=3$. Analizom toka funkcije dobivamo sljedeći graf:



odakle je jasno da nije potrebno zadati granice slijeva i zdesna – one se "očitaju" sa slike.

Preciznije, vidimo da se područje sastoji od dva dijela: površina prvog će se računati kao $\int_1^2 (x-1)(x-2)(x-3)dx$, a površina drugog kao $-\int_2^3 (x-1)(x-2)(x-3)dx$, pa za ukupnu površinu P imamo

$$\begin{aligned}
P &= \int_1^2 (x-1)(x-2)(x-3)dx - \int_2^3 (x-1)(x-2)(x-3)dx = \\
&= \int_1^2 (x^3-6x^2+11x-6)dx - \int_2^3 (x^3-6x^2+11x-6)dx = \\
&= (\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11x^2}{2} - 6x)|_1^2 - (\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11x^2}{2} - 6x)|_2^3 = \\
&= \ldots = \frac{1}{4} - (-\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Zadatak 2 Izračunajte i interpretirajte geometrijski sljedeće određene integrale:

(1) $\int_{-2}^2 (2x-1)dx$

(2) $\int_{-3}^2 (x^2+x)dx$

(3) $\int_{-2\pi}^{\pi} \cos x dx$

Zadatak 3 Izračunajte površinu omeđenu s $x-$osi, grafom funkcije f i pravcima $x=a$, $x=b$ ako je:

(1) $f(x) = 2-4x$, $a=0$, $b=2$

(2) $f(x) = -x^2-x+2$, $a=-4$, $b=2$

(3) $f(x) = 2^x-2$, $a=-3$, $b=2$

Zadatak 4 Izračunajte površinu omeđenu s $x-$osi i grafom funkcije f ako je:

(1) $f(x) = |2x-1|-5$

(2) $f(x) = -x^2-x+6$

(3) $f(x) = (x+2)^2 \cdot (x-4)$

Metode računanja određenog integrala. Nepravi integral

Supstitucija u određenom integralu

Kao i kod neodređenog integrala i pri računanju određenog integrala često se koristi tehnika supstitucije integracijske varijable. Pritom možemo upotrijebiti jednu od sljedeće dvije metode:

(1) izvršimo zamjenu integracijske varijable i računamo neodređeni integral - nakon što nađemo primitivnu funkciju vraćamo se na staru varijablu; ovaj postupak *ne zahtijeva* promjenu granica integracije

(2) integracijsku varijablu mijenjamo direktno u određenom integralu - ovaj postupak podrazumijeva i odgovarajuću *promjenu granica integracije*.

Pri radu s ovom tehnikom posredno koristimo sljedeći rezultat:

Za neprekidnu funkciju f na intervalu $[a,b]$ i diferencijabilnu funkciju $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ takvu da je φ' neprekidna i $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ vrijedi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Primjer 1

Koristeći obje metode supstitucije izračunajte $\int_0^2 2x(x^2+1)^3 dx$.

Rješenje:

1. način: Najprije računamo neodređeni integral koristeći supstitucijsku varijablu, a potom vraćamo izvornu varijablu i računamo dređeni integral. Supstitucija koju ćemo ovdje koristiti je $t = x^2 + 1$, iz čega slijedi da je $dt = 2xdx$. Sada možemo zamijeniti sve podintegralne elemente supstitucijskom varijablom:

$$\int 2x(x^2+1)^3 dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} = \frac{(x^2+1)^4}{4},$$

pa je

$$\begin{aligned} \int_0^2 2x(x^2+1)^3 dx &= \frac{(x^2+1)^4}{4}\Big|_0^2 = \\ &= \frac{(2^2+1)^4}{4} - \frac{(0^2+1)^4}{4} = \frac{625}{4} - \frac{1}{4} = 156. \end{aligned}$$

2. način: Osim podintegralnih elemenata, supstituirat ćemo i granice integracije. Supstitucija $t = x^2 + 1$ odgovara i na pitanje koje su (u terminima varijable t) nove granice integracije: za donju granicu imamo $x = 0 \Rightarrow t = 1$, a za gornju $x = 2 \Rightarrow t = 5$, pa integral postaje

$$\int_0^2 2x(x^2+1)^3 dx = \int_1^5 t^3 dt = (\frac{t^4}{4})|_1^5 = \frac{5^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 156.$$

Napomena:

Važno je uočiti pogodnu supstituciju i pritom paziti da je veza između početne i supstitucijske varijable jednoznačna.

Primjer 2

Izračunajte određeni integral $\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx$.

Rješenje:

Uvodimo supstituciju $1 + 2x = t^2$, odakle slijedi $x = \frac{t^2-1}{2}$, što nakon diferenciranja daje $dx = t dt$.

Ako pokušamo izraziti supstitucijsku varijablu t preko početne integracijske varijable x, naići ćemo na poteškoće. Naime, iz veze $1 + 2x = t^2$ nije moguće jednoznačno izračunati supstitucijsku vezu, jer imamo dvije mogućnosti: $t = \sqrt{1+2x}$ ili $t = -\sqrt{1+2x}$. Oba ova izbora su dobra, ali se nužno trebamo odlučiti za samo jedan i s njime potom nastaviti račun. Neka je veza dana s $t = \sqrt{1+2x}$.

1. način: za donju granicu integracije imamo $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{3}$, a za gornju $x = 4 \Rightarrow t = 3$, pa je

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx &= \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{\frac{t^2-1}{2} \cdot t dt}{t} = \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{t^2-1}{2} dt = \\ &= \frac{1}{2}(\frac{t^3}{3} - t)|_{\sqrt{3}}^3 = \frac{1}{2}(\frac{3^3}{3} - 3 - \frac{\sqrt{3}^3}{3} + \sqrt{3}) = 3.\end{aligned}$$

2. način: računamo najprije neodređeni integral

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx = \int \frac{t^2-1}{2} dt = \frac{1}{2}(\frac{t^3}{3} - t),$$

a potom se vraćamo na početnu integracijsku varijablu x: $t = \sqrt{1+2x}$, pa je konačno

$$\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx = \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{1+2x}^3}{3} - \sqrt{1+2x})|_1^4 = 3.$$

Što bi se dogodilo da smo za vezu između x i t uzeli $t = -\sqrt{1+2x}$? Računajmo po prvom načinu: za donju granicu integracije imamo $x = 1 \Rightarrow t = -\sqrt{3}$, a za gornju $x = 4 \Rightarrow t = -3$, pa je (obratite pažnju na predznak $-$ u podintegralnoj funkciji!)

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx &= \int_{-\sqrt{3}}^{-3} \frac{\frac{t^2-1}{2} \cdot t dt}{-t} dt = -\int_{-\sqrt{3}}^{-3} \frac{t^2-1}{2} dt = \int_{-3}^{-\sqrt{3}} \frac{t^2-1}{2} dt = \\ &= \frac{1}{2}(\frac{t^3}{3} - t)|_{-3}^{-\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\frac{(-\sqrt{3})^3}{3} + \sqrt{3}) - \frac{(-3)^3}{3} - 3)) = 3.\end{aligned}$$

Posebno su važne supstitucije kod kojih funkcijska veza između početne i supstitucijske varijable nije očita, kao u sljedećem primjeru.

Primjer 3

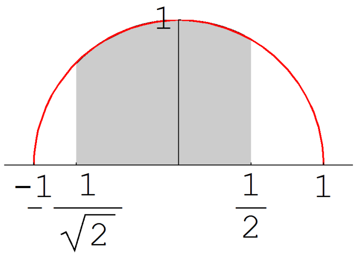
Izračunajte $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}dx$ i geometrijski interpretirajte rezultat.

Rješenje:

Uvodimo tipičnu supstituciju za ovakve integrale: $x = \sin t$, odakle slijedi $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$, a $dx = \cos t dt$. Da bismo imali jednoznačnu vezu između x i t, moramo odabrati smo jedan dio domene sinusne funkcije, i to takav da se postižu sve vrijednosti iz skupa vrijednosti $[-1,1]$. Uzmimo $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Kako u tom području kosinus poprima samo pozitivne vrijednosti, možemo maknuti znak apsolutne vrijednosti, pa je $\sqrt{1-x^2} = \cos t$. Dalje, granice integracije sada nije teško odrediti: za donju granicu imamo $x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}$, a za gornju $x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$, pa je

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}dx &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos t \cdot \cos t dt = \\ &= (\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t)|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{24}(5\pi + 3\sqrt{3} + 6).\end{aligned}$$

Što se geometrijske interpretacije rezultata tiče, broj $\frac{1}{24}(5\pi + 3\sqrt{3} + 6) \approx 1.121$ odgovara površini dijela gornje polukružnice sa središtem u ishodištu i radijusom 1 – to je dio omeđen pravcima $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $x = \frac{1}{2}$:



Primjer 4

Izračunajte $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$.

Rješenje:

Uvodimo supstituciju $e^x - 1 = t^2$. Sada je $e^x dx = 2tdt$, pa iz $e^x = t^2 + 1$ slijedi $dx = \frac{2t}{t^2+1}dt$. Ako uzmemo $t = \sqrt{e^x - 1}$, onda za donju granicu integracije imamo $x = 0 \Rightarrow t = 0$, a za gornju $x = ln2 \Rightarrow t = 1$, pa je

$$\begin{aligned}\int_0^1 t \cdot \frac{2t}{t^2+1}dt &= 2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = \\ &= 2\int_0^1 (1 - \frac{1}{t^2+1})dt = 2(t - \arctan t)|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Zadatak 1 Metodom supstitucije riješite sljedeće određene integrale:

(1) $\int_0^1 (x+3)^{10}dx$

(2) $\int_{-1}^{2} x\sqrt{8-x^2}dx$

(3) $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$

(4) $\int_{0}^{1} x^3\sqrt{x^2+3}dx$

(5) $\int_{0}^{2}(2-3x^2)(x^3-2x+1)^2dx$

(6) $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+9}}dx$

(7) $\int_{0}^{1}(e^x-1)^4e^xdx$

(8) $\int_{1}^{e} \frac{\sin\ln x}{x}dx$

(9) $\int_{1}^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$

(10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{2+3\cos^2 x}\sin 2xdx.$

Parcijalna integracija u određenom integralu

Kao i kod neodređenog integrala, i kod računanja određenog integrala možemo koristiti tehniku parcijalne integracije, tj. formulu

$$\int_a^b udv = (uv)|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Pritom je važno primijetiti da se u ovako skraćenoj formuli nigdje eksplicitno ne piše integracijska varijabla x, ali da se granice integracije a i b odnose upravo na nju.

Primjer 5

Izračunajte $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}dx.$

Rješenje:

Parcijalno integriramo na sljedeći način: $\frac{dx}{\sin^2 x} = dv \Rightarrow v = -\cot x$, $u = x \Rightarrow dx = du$, pa je

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}dx &= (-x\cot x)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot xdx = \\ &= -\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{4}\cdot 1 + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x}dx\end{aligned}$$

Uvodimo supstituciju $\sin x = t$, odakle je $\cos xdx = dt$, pa je

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x}dx &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{t} = (\ln t)|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \\ &= \ln\sqrt{3} - \ln\sqrt{2} = \ln\sqrt{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

Sada imamo

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx = -\frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Primjer 6 Izračunajte $\int_0^1 \arctan x dx$ i geometrijski interpretirajte rezultat.

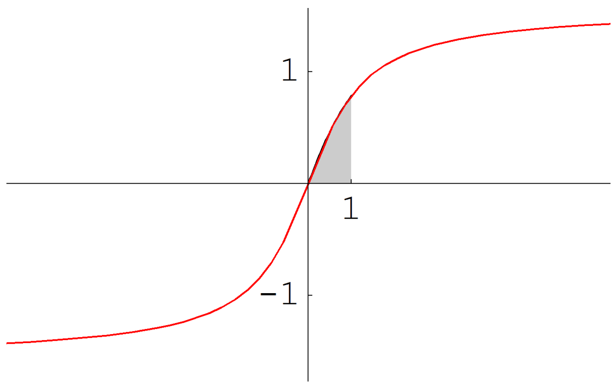
Rješenje: Parcijalno integriramo tako da uzmemo $u = \arctan x \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}dx$, $dv = dx \Rightarrow v = x$ pa imamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arctan x dx &= (x \cdot \arctan x)|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \\ &= \arctan 1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx, \end{aligned}$$

gdje dobiveni integral rješavamo supstitucijom $1+x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dt$ (granice integracije: $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = 1 \Rightarrow t = 2$). Dobivamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arctan x dx &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\ln|t|)|_1^2 = \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

Rezultat (koji približno iznosi 0.439) odgovara površini lika odozgo omeđenog grafom funkcije $f(x) = \arctan x$, odozdo s $x-$osi, slijeva pravcem $x = 0$, a zdesna pravcem $x = 1$:



Zadatak 2

Primjenom parcijalne integracije izračunajte sljedeće određene integrale:

(1) $\int_{\ln 1}^{\ln 2} xe^x dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3)\sin x dx$

(3) $\int_0^{e-1} \ln(1+x)dx$.

Nepravi integral

Često se u zadacima pojavljuju integrali funkcija koje se ne mogu evaluirati u nekoj od rubnih točaka ili u nekoj od unutrašnjih točaka intervala integracije. U tom slučaju koristimo sljedeću definiciju:

> Ako se neka od granica integracije nalaze u beskonačnosti definiramo (uz uvjet da svaki od sljedećih limesa postoji i konačan je):
>
> (1) $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$
>
> (2) $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$
>
> (3) $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)dx.$
>
> Ako unutar integracijskog intervala $[a,b]$ funkcija f ima prekid u točki c ili u toj točki nije definirana, onda definiramo (uz uvjet da sljedeći limes postoji i konačan je):
>
> $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to c-0} \int_a^{\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to c+0} \int_{\varepsilon_2}^b f(x)dx.$$

Primjer 7

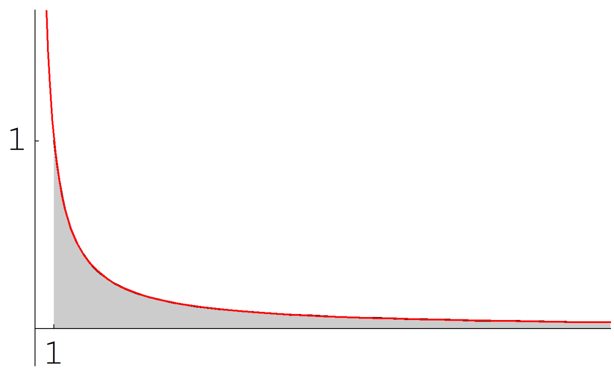
Izračunajte $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ i geometrijski interpretirajte rezultat.

Rješenje:

Koristimo gornju definiciju i računamo

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x} &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} (\ln x)|_1^b = \\ &= \lim_{b\to\infty} \ln b - \ln 1 = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty.\end{aligned}$$

Rezultat govori da lik odozgo omeđen grafom funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$, odozdo s $x-$osi te slijeva pravcem $x = 1$ ima beskonačnu površinu:



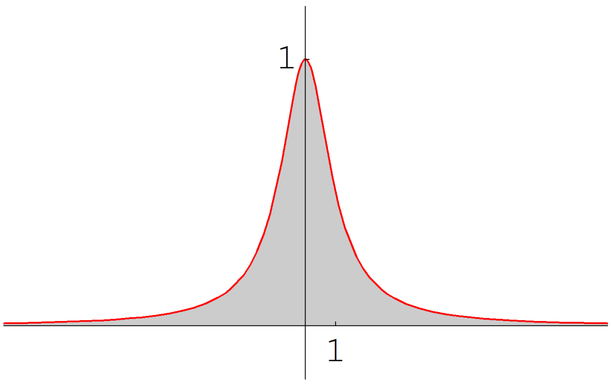
Primjer 8

Izračunajte $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ i geometrijski interpretirajte rezultat.

Rješenje:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \\
&= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \\
&= \lim_{a\to-\infty} (\arctan x)|_a^0 + \lim_{b\to\infty} (\arctan x)|_0^b = \\
&= \lim_{a\to-\infty} (-\arctan a) + \lim_{b\to\infty} (\arctan b) = \\
&= -(-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} = \pi.
\end{aligned}$$

Rezultat integracije, dakle broj π, odgovara površini otvorenog područja omeđenog odozgo grafom funkcije $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, a odozdo s $x-$osi:



Napomena: Slično kao gore pokušajte riješiti $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{1+x^2}$. Ako nacrtate sliku podintegralne funkcije, izgleda (zbog njene neparnosti) kao da ovaj nepravi integral postoji i jednak je nuli. Međutim, rješavanje po principu gornjeg primjera vodi nas na zbroj dva limesa, od kojih je prvi $-\infty$, a drugi ∞, što znači da ovaj nepravi integral *ne postoji*.

Pogledajmo što se događa kada podintegralna funkcija ima prekid unutar integracijskog područja:

Primjer 9

Izračunajte $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

Rješenje:

Očito je da podintegralna nije definirana u točki $x = 2$, pa je

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} &= \lim_{\varepsilon_1\to 2-0} \int_1^{\varepsilon_1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} + \lim_{\varepsilon_2\to 2+0} \int_{\varepsilon_2}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} = \\
&= \lim_{\varepsilon_1\to 2-0} (3\sqrt[3]{x-2})|_1^{\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2\to 2+0} (3\sqrt[3]{x-2})|_{\varepsilon_2}^4 = \\
&= \lim_{\varepsilon_1\to 2-0} (3\sqrt[3]{\varepsilon_1-2}+3) + \lim_{\varepsilon_2\to 2+0} (3\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{\varepsilon_2-2}) = \\
&= 3 + \sqrt[3]{2}.
\end{aligned}$$

Primjer 10

Izračunajte $\int_0^\infty xe^{-x}dx$.

Rješenje:

Koristimo tehniku parcijalne integracije: $x = u \Rightarrow dx = du$, $dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$, pa je

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty xe^{-x}dx &= (-xe^{-x})|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}dx = \\
&= \lim_{b\to\infty}(-xe^{-x})|_0^b + \lim_{b\to\infty}(-e^{-x})|_0^b = \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{-b}{e^b} + \lim_{b\to\infty}(-e^{-b}+e^0) = (L'H) = \\
&= \lim_{b\to\infty}(\frac{-1}{e^b}) + 1 = 1.
\end{aligned}$$

Zadatak 3 Izračunajte sljedeće neprave integrale:

(1) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x-1)^2}$

(2) $\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$

(3) $\int_0^\infty e^{-x}dx$

(4) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(5) $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$

(6) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}$

(7) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

(8) $\int_0^\infty \frac{e^x dx}{(e^x+1)^2}$

(9) $\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x}$

(10) $\int_0^1 (\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \ln x)dx.$

Poglavlje 1

Primjene određenog integrala

1.1 Površina ravninskog lika

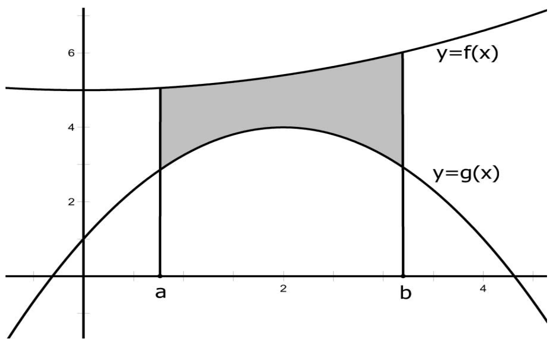
Za dani ravninski lik omeđen krivuljama $y = f(x)$ i $y = g(x)$ te pravcima $x = a$ i $x = b$ treba odrediti njegovu površinu P (vidi sliku). Koristimo činjenicu da je površina tog lika jednaka razlici površina lika omeđenog pravcima $x = a$, $x = b$, osi x i krivuljom $y = f(x)$ te lika omeđenog s $x = a$, $x = b$, osi x i krivuljom $y = g(x)$. Zaključujemo:

$$P = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx,$$

tj.

$$P = \int_a^b (f - g)(x)dx.$$

Ova jednostavna formula temelj je računa površina ravninskih likova gore opisanog tipa.

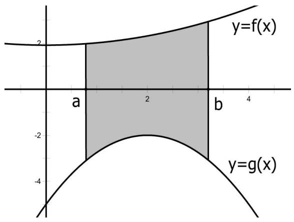


Slika 1.1: Površina P jednaka je razlici površina određenih grafovima Γ_f i Γ_g

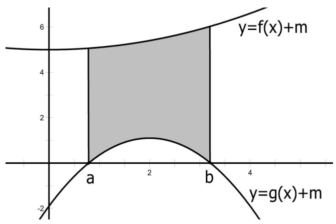
Gornja formula vrijedi i u slučaju da nije $f(x) \geq 0$ i $g(x) \geq 0$ za sve $x \in [a, b]$, ali uz uvjet da je $f(x) - g(x) \geq 0$ za sve $x \in [a, b]$. Naime, prema slici je očito da možemo translatirati krivulje Γ_f i Γ_g duž $y-$osi koliko je potrebno (recimo za neku veličinu m) do situacije sa slike 2.1., na kojoj su sve vrijednosti funkcija f i g na intervalu $[a, b]$ nenegativne (vidi sliku 2.2.). Naime, tada se površina P koju tražimo očito neće promijeniti, a možemo primijeniti poznatu formulu:

$$P = \int_a^b [f(x) + m]dx - \int_a^b [g(x) + m]dx = \int_a^b (f - g)(x)dx.$$

Dakle, možemo primijeniti već postojeću formulu čak i u slučaju da nisu sve vrijednosti podintegralnih funkcija na intervalu integracije nenegativne.



$\Downarrow$



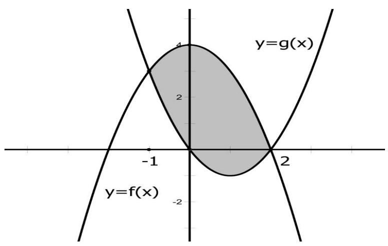
Slika 1.2: Formulu razlike površina možemo primijeniti i na funkcije kojima nisu sve vrijednosti na integracijskom području nenegativne.

Primjer 1

Izračunajte površinu područja ograničenog s $y = 4 - x^2$ i $y = x^2 - 2x$.

Rješenje:

Grafovi ovih funkcija omeđuju lik (označimo mu površinu s P) određen točkama presjeka ovih krivulja, a to su točke s apscisama $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$ – vidi sliku. Označimo $f(x) := 4 - x^2$ ("gornja funkcija"), $g(x) := x^2 - 2x$ ("donja funkcija").



Sada je

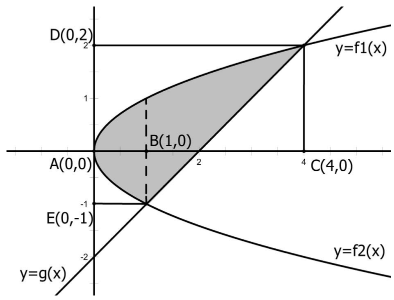
$$
\begin{aligned}
P &= \int_{-1}^{2}(f-g)(x)dx = \int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx = \\
&= (-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x)|_{-1}^{2} = 9.
\end{aligned}
$$

Primjer 2

Izračunajte površinu P omeđenu krivuljama $y^2 = x$ i $y = x - 2$.

Rješenje:

Formula koju smo do sada primjenjivali podrazumijevala je da funkcije čiji grafovi omeđuju ravninski lik čiju površinu tražimo možemo eksplicitno napisati u integracijskoj varijabli. Ovdje moramo uočiti da krivulja $y^2 = x$ ima dva kraka (dvije mogućnosti za eksplicitni zapis), $f_1(x) := \sqrt{x}$ i $f_2(x) := -\sqrt{x}$. Ako nacrtamo sliku, vidjet ćemo da uz korištenje ovako zapisanih podintegracijskih funkcija možemo primijeniti poznatu formulu.



Vrijedi:

$$
\begin{aligned}
P &= \int_{0}^{1}(\sqrt{x}-(-\sqrt{x}))dx + \int_{1}^{4}(\sqrt{x}-(x-2))dx = \\
&= 2(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}})|_{0}^{1} + (\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x)|_{1}^{4} = \frac{9}{2}.
\end{aligned}
$$

Međutim, postoji i jednostavniji način da se ovaj zadatak riješi. Naime, ako već ne možemo iz $y^2 = x$ dobiti eksplicitni izraz za y kao funkciju od x, možemo obratno $-$ eksplicitno izraziti x pomoću y: $x = y^2$. Također, iz $y = x - 2$ izlazi $x = y + 2$, a iz slike je odmah vidljivo da je integraciju po varijabli y lakše provesti, jer "gledano sa strane osi y" vidimo da se radi o dvjema funkcijama u varijabli x koje na intervalu integracije (sada zadanom donjom granicom $y = -1$ i gornjom granicom $y = 2$) poprimaju samo nenegativne vrijednosti, pa imamo

$$
P = \int_{-1}^{2}(y+2-y^2)dy = (-\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}+2y)|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}.
$$

Sada možemo napisati još jednu formulu: za funkcije f i g zadane u varijabli y na intervalu $[c,d]$ površina P lika omeđenog krivuljama Γ_f i Γ_g te pravcima

$y = c$ i $y = d$ je dana s

$$P = \int_c^d (f - g)(y) dy.$$

Ponekad je pri rješavanju zadataka s površinama pogodnije preći na polarne koordinate, kao u sljedećem primjeru. Ako pritom računamo površinu lika određenog krivuljama $r = r_1(\varphi)$ i $r = r_2(\varphi)$ te rubnim polupravcima integracijskog područja $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$, koristit ćemo sljedeću formulu:

$$P = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} ({r_1}^2 - {r_2}^2) d\varphi.$$

Za vježbu ćemo riješiti pomoću ove formule i jedan zadatak koji se inače može lako riješiti elementarnim metodama.

Primjer 3

Koristeći određeni integral izračunajte površinu P određenu krivuljama zadanim jednadžbama $x^2 + y^2 + 8x = 0$, $x^2 + y^2 + 4x = 0$.

Rješenje:

Nakon što transformiramo jednadžbe ovih krivulja vidimo da se radi o kružnicama:

$x^2 + y^2 + 8x = 0 \;\; / + 16 \Rightarrow (x + 4)^2 + y^2 = 4^2$

$x^2 + y^2 + 4x = 0 \;\; / + 8 \Rightarrow (x + 2)^2 + y^2 = 2^2$,

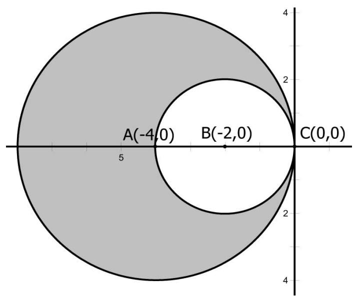
i to kružnicama sa središtima u $(-4, 0)$ i $(-2, 0)$ te radijusima $r_1 = 4$ i $r_2 = 2$, redom.

Transformirajmo ove jednadžbe u polarni oblik korištenjem formula $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Dobiva se:

$r_1 = 8 \cos \varphi$ za prvu kružnicu i

$r_2 = 4 \cos \varphi$ za drugu kružnicu.

Treba još odrediti granice integracijskog područja. Sa slike se vidi da je $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$, pa je

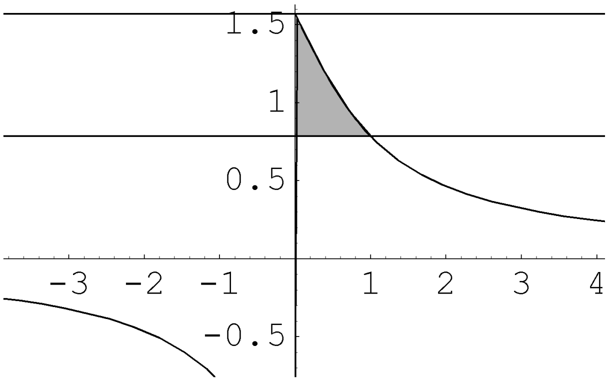


$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} ((8 \cos \varphi)^2 - (4 \cos \varphi)^2) d\varphi = 24 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= 24 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos 2\varphi + 1}{2} d\varphi = 24 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 2\varphi}{2} + \varphi\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 12\pi. \end{aligned}$$

Primjer 4 Koristeći određeni integral izračunajte površinu P određenu krivuljama zadanim jednadžbama $x=0$, $y=\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, $y=\frac{\pi}{4}$.

Rješenje:

Prvo skiciramo zadane krivulje i uzmemo u obzir $\lim_{x\to\infty}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=0$ (jer $\frac{1}{x}$ ide u nulu) te $\lim_{x\to 0}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$ (jer $\frac{1}{x}$ ide u $+\infty$) Sada je površina dana s (radi se o nepravom integralu):



$$
\begin{aligned}
P &= \int_0^1 \left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\pi}{4}\right)dx = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\pi}{4}\right)dx = \\
&= \lim_{a\to 0}\left(x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{\pi}{4}x|_a^1\right) = \\
&= \lim_{a\to 0}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}-a\arctan\left(\frac{1}{a}\right)-\frac{1}{2}\ln(1+a^2)+\frac{\pi}{4}a\right)=\frac{1}{2}\ln 2
\end{aligned}
$$

pri čemu smo uzeli u obzir da je

$$
\begin{aligned}
\int \arctan\left(\frac{1}{x}\right)dx &= \left|\begin{array}{ll} u=\arctan\left(\frac{1}{x}\right) & dv=dx \\ du=-\frac{1}{1+x^2} & v=x \end{array}\right| = x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)+\int\frac{x}{1+x^2}dx = \\
&= x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)
\end{aligned}
$$

i

$$
\lim_{a\to 0} a\arctan\frac{1}{a} = 0\cdot\frac{\pi}{2}=0
$$

Zadatak 1 Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama:

(1) $y=x^2$, $y=4x$

(2) $y=x^2-1$, $y=4|x|-5$

(3) $y=x(x-1)(x-2)$ i $x-$osi.

(4) $y=\frac{\pi}{6}$, $y=\arcsin\frac{1}{x}$

(5) $y=x^2$, $y=x^3-2x$

(6) $x^2 + y^2 = 2x + 2y$ i nejednakostima $x \geq 0$, $y \geq 0$

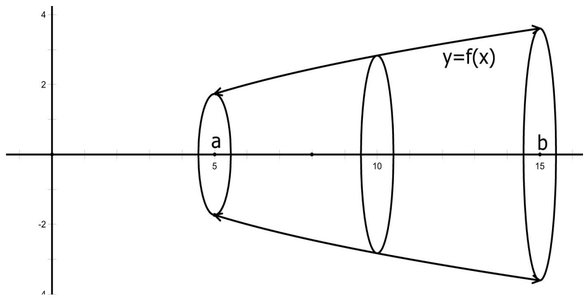
(7) $4x^2 - 7y^2 = 20$, $4y^2 - x^2 = 4$

(8) $4x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + 4y^2 = 4$

(9) $y = x \arctan x^3$, $y = \frac{\pi}{4}|x|$

1.2 Volumen rotacijskog tijela

Graf funkcije f rotiramo oko $x-$osi. Postavlja se pitanje: koji je volumen V tijela dobivenog rotacijom lika određenog dijelom grafa funkcije f te pravcima $x = a$, $y = b$ i $x-$ osi (vidi sliku)?



Odgovor daje sljedeća formula:

$$V_x = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Međutim, postoji formula i za rotaciju lika određenog grafom funkcije f na intervalu $[a, b]$ na $x-osi$ *oko* $y-osi$. Ta formula glasi:

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

Također, ako imamo funkciju $x = g(y)$ (gdje je x eksplicitno izražen preko y) i rotacijski interval $[c, d]$ na $y-osi$ te rotiramo oko $y-osi$, imat ćemo:

$$V_y = \pi \int_c^d g(y)^2 dy.$$

Ako rotiramo lik određen grafom funkcije f na intervalu $[c, d]$ na $y-osi$ *oko* $x-osi$, imat ćemo formulu

$$V_x = 2\pi \int_c^d g(y) y dy.$$

Sažeto ove četiri formule možemo pregledno iskazati jednom tablicom:

integr. po ↓ / rot. oko →	$x-$osi	$y - osi$
$[a,b]$ na $x-$osi	$V_x = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$	$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$
$[c,d]$ na $y-$osi	$V_x = 2\pi \int_c^d g(y) y dy$	$V_y = \pi \int_c^d g(y)^2 dy$

Također, imamo i formulu za volumen rotacijskog tijela koje je dobiveno rotacijom područja *između* dviju krivulja. U tom slučaju koristimo slične formule kao u gornjoj tablici, uz primjenu modela iz dijela o površini područja omeđenog dvjema krivuljama. Npr. za volumen V tijela nastalog rotacijom područja omeđenog krivuljama $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$ na intervalu $[a,b]$ oko $x-$osi koristimo formulu

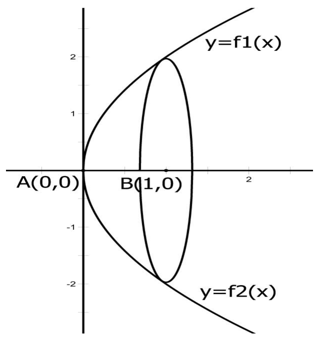
$$V = \pi \int_a^b (f_1(x)^2 - f_2(x)^2) dx$$

i slično za ostale formule.

Primjer 5

Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom oko $x-$osi lika omeđenog parabolom $y^2 = 4x$ i pravcem $x = 1$.

Rješenje:



Naša funkcija nije eksplicitno izražena preko integracijske varijable x, ali to formula niti ne zahtijeva: imamo $y^2 = f(x)$, što je upravo izraz koji se traži u formuli.

Očito je sa slike da moramo koristiti formulu za integraciju duž intervala $[0,1]$ na $x-$osi za rotaciju oko $x-$osi, pa imamo

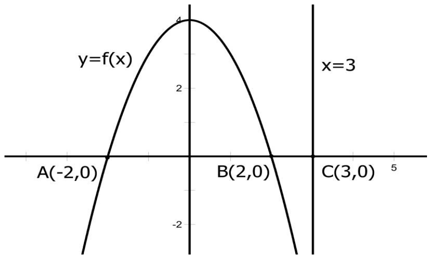
$$V_x = \pi \int_0^1 y^2 dx = \pi \int_0^1 4x dx = 2\pi (x^2)|_0^1 = 2\pi.$$

Ponekad se zadaje rotacija oko pravaca paralelnih s $x-$osi, odnosno s $y-$osi. U tom slučaju primjenjujemo iste formule, ali moramo izvršiti translaciju cjelokupnog koordinatnog sustava, kao u donjem primjeru.

Primjer 6

Izračunajte volumen V tijela nastalog rotacijom oko pravca $x = 3$ lika omeđenog parabolom $y = 4 - x^2$ i $x-$osi.

Rješenje:



Rotacija oko pravca $x = 3$ znači da ćemo zahtijevati da u točki $\tilde{O}(3,0)$ bude ishodište novog koordinatnog sustava $(\tilde{O},\tilde{x},\tilde{y})$ čija je veza sa starim dana s $\tilde{x} = x-3$, $\tilde{y} = y$. Tako u novom koodinatnom sustavu točka $(3,0)$ (zapisana u starom sustavu) postaje $(0,0)$. Formulu za volumen primijenit ćemo u odnosu na novi sustav. To znači da trebamo napisati nove granice integracije, novu podintegralnu funkciju i novi diferencijal u skladu s gornjim transformacijskim formulama $(x,y) \to (\tilde{x},\tilde{y})$.

Kako se radi o rotaciji oko pravca $x = 3$, a to je pravac paralelan s $y-$osi, riječ je u biti o rotaciji oko novonastale $\tilde{y}-$osi, pa primjenjujemo formulu za V_y.

Još se trebamo odlučiti koju ćemo integraciju koristiti. S obzirom da se transformacijom koordinatnog sustava ne mijenjaju $y-$koordinate (jer je $\tilde{y} = y$), a samim time niti diferencijal, koristit ćemo za integraciju duž $\tilde{y}-$osi.

Volumen V izrazimo kao razliku volumena V_1 i V_2 koji se dobiju rotacijom redom lijevog, odnosno desnog kraka parabole oko $\tilde{y}-$osi. Očito je još preostalo samo da funkcijski izrazimo lijevi i desni krak u novim koordinatama, i to u smislu ovisnosti $\tilde{x}$ o $\tilde{y}$ (jer integriramo duž $\tilde{y}-$osi).

Lijevi krak: u starim koordinatama riječ je funkcijskoj vezi $x = g_1(y) = -\sqrt{4-y}$, a kako je $x = \tilde{x}+3, y = \tilde{y}$, u novim koordinatama veza glasi $g_1(\tilde{y}) = -\sqrt{4-\tilde{y}} - 3$.

Desni krak: slično kao za lijevi krak u starim koordinatama imamo $x = g_2(y) = \sqrt{4-y}$, a u novim $g_2(\tilde{y}) = \sqrt{4-\tilde{y}} - 3$.

Računamo sada volumen:

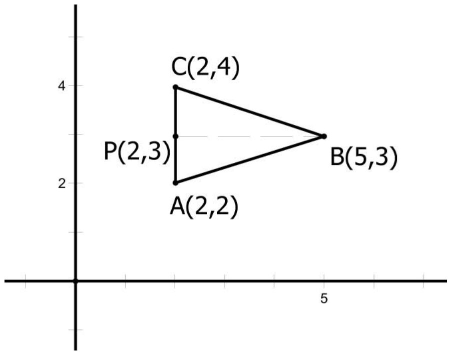
$$\begin{aligned}
V &= V_1 - V_2 = \pi \int_0^4 (g_1(\tilde{y})^2 - g_2(\tilde{y})^2) d\tilde{y} = \\
&= \pi \int_0^4 ((-\sqrt{4-\tilde{y}} - 3)^2 - (\sqrt{4-\tilde{y}} - 3)^2) d\tilde{y} = \\
&= 12\pi \int_0^4 \sqrt{4-\tilde{y}} d\tilde{y} = 8\pi \\
&= 64\pi.
\end{aligned}$$

Primjer 7

Trokut zadan vrhovima $A(2,2), B(5,3), C(2,4)$ rotira oko $y-$osi. Odredite volumen V nastalog tijela.

Rješenje:

Sa slike vidimo da se radi o trokutu simetričnom obzirom na pravac $y = 3$, pa volumen V možemo računati kao dvostruki volumen V_1 lika nastalog rotacijom



"donje polovice" trokuta određene s dva pravca: prvi pravac prolazi točkama A i B (pravac $y = 3x - 4$), a drugi točkama A i P (pravac $x = 2$).

"Gornja" funkcija (gledano s $y-$osi) dana je s $x = g_1(y) = \frac{y+4}{3}$, a "donja" s $x = g_2(y) = 2$. Očito je integracijsko područje dano s $y_1 = 2$, $y_2 = 3$, pa imamo

$$\begin{aligned} V &= 2V_1 = 2\pi \int_2^3 (g_1(y)^2 - g_2(y)^2) dy = \\ &= 2\pi \int_2^3 ((\frac{y+4}{3})^2 - 4) dy = \frac{2\pi}{3}(\frac{y^3}{3} + 4y^2 + 4y)|_2^3 = \frac{182}{9}\pi. \end{aligned}$$

Zadatak 2

(1) Područje određeno krivuljama $y^2 = x$, $3y^2 = 2(x+2)$ rotira oko $x-$osi. Izračunajte volumen tako dobivenog tijela.

(2) Odredite volumen tijela koje nastaje rotacijom lika određenog sa $\sin x + 1 \leq y \leq 1$, $\pi \leq x \leq 2\pi$ oko $x-$osi.

(3) Nađite volumen tijela nastalog rotacijom kružnice $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ oko osi x $(b > a)$.

(4) Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom krivulje $x^2 + y^2 = 2x + 2y$ oko $x-$osi.

Zadatak 3

(1) Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja $(x-1)^2 \leq y \leq \sqrt{x-1}$ oko $y-$osi.

(2) Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja $y \leq x \leq 5y, y^2 \leq 6 - x$ oko osi y.

(3) Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja $\frac{3}{5\pi}|x| \leq y \leq |\sin x|$ oko $y-$osi.

(4) Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja zadanog nejednadžbama $1 + \sin x \leq y \leq 1$, $\pi \leq x \leq 2\pi$ oko $y-$osi.

(5) Skup određen krivuljama $x^2 + y^2 = 2x$, $y = 2x$, $y = x/\sqrt{3}$ rotira oko $y-$osi. Izračunajte volumen dobivenog tijela.

(6) Odredite volumen tijela nastalog rotacijom područja $y^2 \leq (2-x)(4+x)$ oko y osi.

(7) Odredite volumen tijela nastalog rotacijom krivulje $(y-2)^2 = x(4-x)$ oko $y-$osi.

Zadatak 4

(1) Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja $0 \leq y \leq \sin x$, $x \in [0, \pi]$ oko pravca $y = 2$.

(2) Izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom područja $-1 \leq y \leq \sin x$ $x \in [0, 2\pi]$ oko pravca $y = 2$.

(3) Lik određen krivuljama $y = \sqrt{x}$, $y = x$, $x \in [0, 4]$ rotira oko pravca $x = 1$. Izračunajte volumen tako dobivenog tijela.

(4) Odredite volumen tijela nastalog rotacijom krivulje $y^2 = x(4-x)$ oko pravca $x = 1$.

Poglavlje 1

Funkcije više varijabli

1.1 Domena

Jedno od osnovnih pitanja koje se može postaviti za realnu funkciju dvije varijable jest pitanje domene, tj. utvrđivanje područja u ravnini $\mathbb{R}^2$ na kojem je funkcija definirana. Često se pritom i skicira skup svih točaka domene u koordinatnom sustavu, jer sam eksplicitni zapis za domenu ne govori previše.

Funkcije koje ćemo mi promatrati kompozicije su nekoliko elementarnih funkcija, npr. korjenovanja, potenciranja, logaritamskih funkcija te trigonometrijskih i njima inverznih arkus funkcija.

Stoga ćemo se ukratko podsjetiti koje su domene tih funkcija. Pritom ćemo te funkcije promatrati kao funkcije jedne varijable. Naime, bitno je da se uoči *uvjet* koji mora vrijediti na argument funkcije koju promatramo, bila ta funkcija jedne ili više varijabli. Rješavanjem svih uvjeta dolazimo do domene zadane funkcije.

(1) $f(x) = \sqrt{x}$. Uvjet kojeg postavljamo je da je $x \geq 0$, odakle i dolazimo do domene $\mathcal{D}(f) = [0, \infty >$. Uvjet pamtimo kao "*podkorijenski izraz je nenegativan*".

(2) $f(x) = \frac{1}{x}$. Jedini uvjet kojeg treba postaviti je $x \neq 0$, pa je $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Općenito, funkcije potenciranja s pozitivnim cjelobrojnim potencijama $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$ nemaju uvjeta na domenu, pa je u tom slučaju domena čitav $\mathbb{R}$, dok funkcije potenciranja s negativnim potencijama $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{Z}_-$ imaju uvjet da je $x \neq 0$ (zbog razlomka, jer npr. $x^{-5} = \frac{1}{x^5} = (\frac{1}{x})^5$). Dakle, svu pažnju kod funkcija potenciranja cjelobrojnim potencijama treba usmjeriti samo na funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$. Uvjet kojeg pamtimo glasi: "*razlomak je različit od nule*".

(3) $f(x) = \log_a x$. Uvjet glasi: $x > 0$. Međutim, može se dogoditi da je zadana funkcija u kojoj logaritamska baza ovisi o funkcijskoj varijabli, kao npr. $f(x) = \log_x x^2$. U tom slučaju (što se baze tiče) moramo poštivati činjenicu da je baza strogo veća od nule i različita od jedinice, pa imamo uvjete $x > 0, x \neq 1$. Dakle, kod logaritamske funkcije postoje dva uvjeta, koja pamtimo kao "*argument je strogo pozitivan*" i "*baza je strogo pozitivna i različlita od jedinice*". Dalje, poznati je da eksponencijalna funkcija kao inverzna funkcija logaritamske funkcije nema uvjeta na domenu, tj. da je za $f(x) = a^x$ (uz $a > 0$ i $a \neq 1$!) domena jednaka čitavom $\mathbb{R}$.

(4) Kod trigonometrijskih funkcija, poznato je da funkcije $\sin x$ i $\cos x$ imaju za domenu čitav skup realnih brojeva, pa uvjeta na domenu *nema*. Međutim, kod funkcija $\tan x$ i $\cot x$ moramo obratiti pažnju na definiciju ovih funkcija, tj. na nazivnike: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, pa ćemo zbog (2) imati kod funkcije $\tan x$ uvjet $\cos x \neq 0$, a kod $\cot x$ uvjet $\sin x \neq 0$.

(5) Kod arkus funkcija poznati su uvjeti na domenu koji je određuju. Nas će u zadacima zanimati samo funkcije $\arcsin x$ i $\arccos x$. Za obje ove funkcije znamo da je domena dana s $\mathcal{D}(f) = [-1, 1]$, tj. uvjet na x glasi $|x| \leq 1$. Dakle, uvjet na izraz koji se nalazi pod arcsin ili arccos funkcijom možemo pamtiti kao "*argument je po apsolutnoj vrijednosti manji ili jednak 1*".

Riješimo nekoliko primjera, ali sada određujući domenu funkcije dvije varijable.

Primjer 1 Odredite domenu funkcije $f(x, y) = \sqrt{x + 1 - \sqrt{x + y}}$ i rješenje predočite grafički u ravnini.

Rješenje: Najprije zbog "vanjskog" korijena moramo postaviti uvjet:

(1) $x + 1 - \sqrt{x + y} \geq 0$,

a potom zbog "vanjskog" korijena

(2) $x + y \geq 0$.

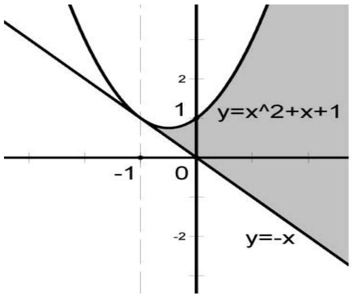
Prvi uvjet se rješava po slučajevima. Najprije napišimo $\sqrt{x + y} \leq x + 1$. Imamo

(a) ako je $x + 1 < 0$ (tj. $x < -1$), nejednažba nema rješenja (jer je s lijeve strane nenegativan, a s desne strane negativan broj).

(b) ako je $x + 1 \geq 0$ (tj. $x \geq -1$), možemo kvadrirati nejednadžbu, jer su obje strane pozitivne. Dobivamo $x + y \leq x^2 + 2x + 1$, odnosno $y \leq x^2 + x + 1$. Radi se o području odozgo omeđenom parabolom $y = x^2 + x + 1$ (a uključuje i samu parabolu).

Rješenje prvog uvjeta možemo ukratko napisati kao $y \leq x^2 + x + 1$ za $x \geq -1$.

Rješavamo drugi uvjet. Imamo $y \geq -x$, što grafički možemo predstaviti područjem ravnine omeđenim odozdo pravcem s jednadžbom $y = -x$ (područje uključuje i sam pravac). Konačno rješenje se dobiva presijecanjem područja dobivenih rješavanjem oba uvjeta. Kako u drugom uvjetu nema rješenja za $x < -1$, to "lijevo" od pravca $x = -1$ nema niti jedne točke iz domene. Međutim, za $x \geq -1$ ("desno" od pravca $x = -1$) imamo uvjet $y \leq x^2 + x + 1$, ali i uvjet $y \geq -x$, pa je domena skup svih točaka koje se nalaze "ispod" parabole $y = x^2 + x + 1$, a "iznad" pravca $y = -x$ (uključujući i te dvije krivulje). Pažljivim crtanjem i računom vidi se da se ove dvije krivulje sijeku upravo u točki s $x-$koordinatom jednakom -1, pa rješenje izgleda kao na slici (vidi str. 3.).



Slika 1.1: Grafički prikaz domene funkcije f

Primjer 2 Odredite domenu funkcije $f(x,y) = \sqrt{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} - xy}$ i rješenje predočite grafički u ravnini.

Rješenje: Kao i u prtehodnom primjeru, ovdje možemo postaviti dva uvjeta:
(1) $\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} - xy \geq 0$, vezano uz "vanjski" korijen i
(2) $(1-x^2)(1-y^2) \geq 0$, vezano uz "unutarnji" korijen.
Riješimo najprije prvi uvjet:
$\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \geq xy$, imamo diskusiju:

(a) Ako je $xy < 0$, s lijeve strane nejednadžbe imamo korijen (koji je uvijek nenegativan), a s desne strane strogo negativan broj, pa je u ovom slučaju nejednakost očito zadovoljena. No, rješavali smo u skupu $xy < 0$, što riješeno daje točke drugog ($x < 0$, $y > 0$) i četvrtog kvadranta ($x > 0$, $y < 0$). Točke koje leže na koordinatnim osima su zbog stroge nejednakosti isključene.

(b) Ako je $xy \geq 0$, obje su strane nejednadžbe nenegativne, pa možemo kvadrirati nejednadžbu. Dobivamo nakon sređivanja $x^2 + y^2 \leq 1$, pa se radi o krugu sa središtem u ishodištu i radijusom 1. Preciznije, u skup točaka koje čine rješenje uključena je i sama kružnica. Kako smo ovaj slučaj rješavali u skupu točaka koje zadovoljavaju nejednadžbu $xy \geq 0$, vrijednit će to u prvom ($x \geq 0$, $y \geq 0$) i trećem ($x \leq 0$, $y \leq 0$) kvadrantu (ovog puta uključivši i točke koje leže na koordinatnim osima).

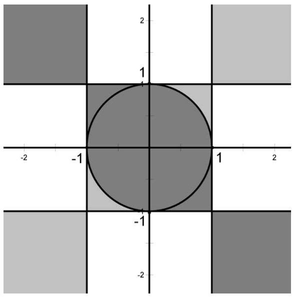
Riješimo sada drugi uvjet. Ako nejednadžbu zapišemo u obliku

(a) $1 - x^2 \geq 0$ i $1 - y^2 \geq 0$, što daje $|x| \leq 1$ i $|y| \leq 1$. Rješenje je dano kao $\{(x,y)| -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$, što je kvadrat stranice 2 sa središtem (presjecištem dijagonala) u ishodištu. Stranice su uključene.

(b) $1 - x^2 \leq 0$ i $1 - y^2 \leq 0$, što daje $|x| \geq 1$ i $|y| \geq 1$. Rješenje je dano kao $\{(x,y)|x \leq -1 \text{ ili } x \geq 1, y \leq -1 \text{ ili } y \geq 1\}$.

Unija dva skupa dobivena pod (a) i (b) je rješenje drugog uvjeta.

Konačno rješenje prvog uvjeta dano je kao dio unutar jedinične kružnice u prvom i trećem kvadrantu, odnosno kao cijeli drugi i četvrti kvadrant. Međutim, to rješenje moramo presjeći s rješenjem drugog uvjeta da dobijemo konačno rješenje. Ono je na donjoj slici označeno svjetlosivo, uz napomenu da su sve rubne točke tog područja dio rješenja. Tamnosivi dio dolazi od rješenja prvog uvjeta i služi samo za orijentaciju.



Slika 1.2: Grafički prikaz domene funkcije f

Zadatak 3 Odredite domenu funkcije f:

(1) $f(x,y) = \sqrt{\sqrt{2x+y} + x - 3}$

(2) $f(x,y) = \sqrt{x + 2 - \sqrt{x+y+1}}$

(3) $f(x,y) = \sqrt{x + \sqrt{y-x}}$

(4) $f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-4)(9-x^2-y^2)}$

Primjer 4 Odredite domenu funkcije $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{\frac{xy}{x-y}} - 1\right)$.

Rješenje: Rješavamo dva uvjeta:

(1) $\sqrt{\frac{xy}{x-y}} - 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{xy}{x-y}} > 1 \Rightarrow \frac{xy}{x-y} > 1$ (zbog logaritma)

(2) $\frac{xy}{x-y} \geq 0$ (zbog korijena)

(3) $x \neq y$ (zbog nazivnika).

Očito prvi uvjet uključuje i drugi, pa je dovoljno riješiti samo njega. Imamo dvije mogućnosti:

(a) ako je $x - y > 0$ množenjem s nazivnikom znak nejednakosti se ne mijenja, pa imamo $xy > x - y$, tj. $y(x+1) > x$. Ako je $x + 1 > 0$, dijeljenjem s tim izrazom dobivamo $y > \frac{x}{x+1}$. Ako je $x + 1 < 0$, dijeljenjem dobivamo $y < \frac{x}{x+1}$.

(b) ako je $x - y < 0$ dobivamo $xy < x - y$, tj. $y(x+1) < x$. Ako je $x + 1 > 0$, imamo $y < \frac{x}{x+1}$, dok za $x + 1 < 0$ imamo $y > \frac{x}{x+1}$.

Još treba vidjeti što je s opcijom $x = -1$. Uvrštenjem u početnu nejednadžbu dobivamo

$$\frac{-y}{-1-y} > 1 \Rightarrow \frac{1}{-1-y} > 0 \Rightarrow -1 - y > 0 \Rightarrow y < -1.$$

Pokušajte ovako izračunatu domenu funkcije prikazati u ravnini!

Zadatak 5 Odredite domenu funkcije f:

(1) $f(x, y) = \ln(1 - y + \sqrt{x - 3})$

(2) $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2 - 4} - y + x)$

(3) $f(x, y) = \ln(1 - x - \sqrt{y - 2x})$

Primjer 6 Odredite domenu funkcije
$f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)} + \ln(4 - x) + \ln(4 - y)$.
Rješenje:
Imamo sljedeće uvjete:

(1) $\sin(x^2 + y^2) \geq 0$, zbog korijena

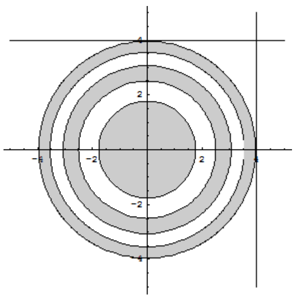
(2) $4 - x > 0$, zbog logaritma

(3) $4 - y > o$, zbog logaritma

Uzimajući u obzir uvjete (2) i (3), rješavamo prvi uvjet:

$$\sin(x^2 + y^2) \geq 0 \Rightarrow (x^2 + y^2) \in [0, \pi] + 2k\pi \quad \text{gdje } k \in \mathbb{Z}$$

Tu je očito riječ o kružnim vijencima odgovarajućih radijusa, međutim, zbog uvjeta (2) i (3), uzimamo samo one unutar kvadranta oneđenog s $x = 4$, $y = 4$



Slika 1.3: Grafički prikaz domene funkcije f

Primjer 7 Odredite $\mathcal{D}(f)$ funkcije $f(x, y) = \sqrt{1 - \log_x^2 y}$ i rješenje predočite grafički.
Rješenje: U ovom zadatku osim diskusije po argumentu logaritamske i korjenske funkcije moramo uvjete postavljati i vezano uz bazu logaritamske funkcije, jer je ona ovisna o varijabli x.
Imamo sljedeće uvjete:

(1) $1 - \log_x^2 y \geq 0$, zbog korijena

(2) $y > 0$, zbog logaritma

(3) $x > 0$ i $x \neq 1$, zbog logaritma

Uzimajući u obzir uvjete (2) i (3), rješavamo prvi uvjet:

$\log_x^2 y \leq 1$

$|\log_x y| \leq 1$

$-1 \leq \log_x y \leq 1$

Sada moramo napraviti diskusiju po bazi:

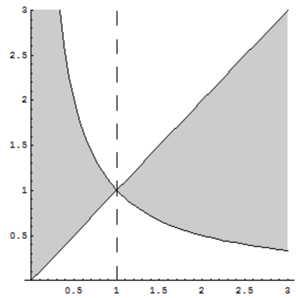
(a) ako je $0 < x < 1$, logaritamska funkcija je padajuća, pa djelovanjem inverzne funkcije na gornje dvije nejednadžbe mijenjamo znak nejednakosti:

$x^{-1} \geq y \geq x$.

(b) ako je $x > 1$, logaritamska funkcija je rastuća, pa djelovanjem inverzne funkcije na gornje dvije nejednadžbe znak nejednakosti ostaje isti:

$x^{-1} \leq y \leq x$.

Zbog drugog i trećeg uvjeta radimo samo u prvom kvadrantu, i to isključivši zbog stroge nejednakosti točke koje se nalaze na koordinatnim osima, kao i bez pravca $x = 1$ (zbog baze). Opcije pod (a) i (b) govore da i u dijelu ravnine omeđenom pravcima $x = 0$ i $x = 1$, ali i onom omeđenom slijeva pravcem $x = 1$ rješenje predstavlja područje koje se nalazi između pravca $y = x$ i $y = \frac{1}{x}$. Rješenje uključuje i ove krivulje, a grafički je predstavljeno sljedećom slikom:



Slika 1.4: Grafički prikaz domene funkcije f

Zadatak 8 Odredite domenu funkcije f:

(1) $f(x, y) = \sqrt{\log_y^2 x - 9}$

(2) $f(x, y) = \sqrt{\log_{x+y}(x - y - 1)}$

(3) $f(x, y) = \sqrt{\ln(y + x^2) - \ln(x - y^2)}$

(4) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 9y^2} + \ln(-x^2 + 9y^2 + 1)$

(5) $f(x, y) = \frac{\sqrt{8x - 6y + x^2 + y^2}}{\log(xy)}$

(6) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - 4}{x + y}} + \ln(x^2 - 4)$

Primjer 9 Pokažite da je domena funkcije $f(x,y) = \arcsin \frac{x+y+2}{x+y+1} + \sqrt{3x+2} + \sqrt{3y+2}$ prazna.

Rješenje: Koristimo činjenicu da je domena arcsin funkcije dana s $[-1,1]$, što ovdje postaje jedan od uvjeta koje moramo postaviti:

(1) $-1 \leq \frac{x+y+2}{x+y+1} \leq 1$, zbog arcsin funkcije

(2) $3x + 2 \geq 0$, zbog korijena

(3) $3y + 2 \geq 0$, zbog korijena.

Drugi i treći uvjet je lako riješiti, dobivamo $x \geq -\frac{2}{3}$, $y \geq -\frac{2}{3}$. Riješimo sada prvi uvjet:

$-1 \leq \frac{x+y+2}{x+y+1} \leq 1$

$-1 \leq 1 + \frac{1}{x+y+1} \leq 1$

$-2 \leq \frac{1}{x+y+1} \leq 0$

Vidimo da je $\frac{1}{x+y+1} \leq 0$, što znači da imamo $x+y+1 < 0$, tj. $y < -x-1$. Zbog toga pri množenju s nazivnikom prva nejednadžba mijenja znak nejednakosti, pa imamo

$-2(x+y+1) \geq 1$

$x + y + 1 \leq -\frac{1}{2}$

$y \leq -x - \frac{3}{2}$.

Dakle, konačno rješenje predstavlja područje određeno četirima nejednadžbama: $y \leq -x-\frac{3}{2}$, $y < -x-1$, $x \geq -\frac{2}{3}$, $y \geq -\frac{2}{3}$. Iz treće nejednaždbe imamo $-x \leq \frac{2}{3}$, što uvrštanjem u prvu daje

$y \leq \frac{2}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{5}{6} < -\frac{2}{3}$, što je u suprotnosti sa zadnjom nejednadžbom. Odavdje slijedi tvrdnja: $\mathcal{D}(f) = \emptyset$.

Do istog zaključka možete doći ako skicirate presjeke poluravnina koje predstavljaju rješenja gornjih nejednadžbi.

Primjer 10 Odredite domenu funkcije $f(x,y) = \ln[\pi^2 - 4\arccos^2 \frac{x}{y}]$.

Rješenje: Postavljamo uvjete:

(1) $\pi^2 - 4\arccos^2 \frac{x}{y} > 0$, zbog logaritamske funkcije

(2) $-1 \leq \frac{x}{y} \leq 1$, zbog arccos funkcije.

Rješavamo prvi uvjet:

$\pi^2 - 4\arccos^2 \frac{x}{y} > 0$

$-4\arccos^2 \frac{x}{y} > -\pi^2$

$\arccos^2 \frac{x}{y} < (\frac{\pi}{2})^2$

$|\arccos \frac{x}{y}| < \frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} < \arccos \frac{x}{y} < \frac{\pi}{2}$

S obzirom na to da je skup vrijednosti arccos funkcije dan s $0 \leq \arccos \frac{x}{y} \leq \pi$, to je nejednakost $-\frac{\pi}{2} < \arccos \frac{x}{y}$ uvijek zadovoljena. Međutim, moramo uzeti u obzir uvjet $0 \leq \arccos \frac{x}{y}$, pa sada imamo

$0 \le \arccos \frac{x}{y} < \frac{\pi}{2}$, što invertiranjem daje
$\cos 0 \ge \frac{x}{y} > \cos \frac{\pi}{2}$
$1 \ge \frac{x}{y} > 0$.
Vidimo sada da je ovaj sustav nejednadžbi "jači" od onog danom uvjetom (2), kojeg stoga nećemo niti rješavati. Rješavamo dakle do kraja uvjet (1), tj. njegove dvije nejednadžbe:

(a) $0 < \frac{x}{y}$: radi se o točkama prvog ($x > 0$ i $y > 0$) i trećeg kvadranta ($x < 0$ i $y < 0$), isključivši točke koje se nalaze na koordinatnim osima (zbog stroge nejednakosti).

(b) $\frac{x}{y} \le 1$: ako je $y < 0$ imamo $x \ge y$, a za $y > 0$ je $x \le y$. Dakle, ako se radi o trećem kvadrantu, rješenje predstavljaju točke koje zadovoljavaju nejednadžbu $y \le x$, a ako se radi o prvom kvadrantu, rješenje su sve točke koje zadovoljavaju nejednadžbu $y \ge x$.

Konačno rješenje možemo zapisati ovako:
$\mathcal{D}(f) = \{(x, y) | x < 0, y < 0, y \le x\} \cup \{(x, y) | x > 0, y > 0, y \ge x\}$.
Napomena: Prema svim "parnim" korijenima postupamo kao s drugim korijenom, tj. zahtijevamo da argument bude nenegativan. ako se radi o neparnim korijenima, ne postavljamo uvjete, tj. argument je proizvoljan realan broj.

Zadatak 11 Odredite domenu funkcije f:

(1) $f(x, y) = \log_2(x^2 + y^2 - 9) \cdot \arccos \frac{x-2}{2}$

(2) $f(x, y) = \arcsin \left[1 - \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2\right]$

(3) $f(x, y) = \ln(4x^2 + 9y^2 - 1) + \arcsin \frac{(x+y)^2-1}{(x+y)^2+1}$

(4) $f(x, y) = \ln \left(\frac{x}{y}\right) + \sqrt{\arccos \frac{x-3y}{x+y}}$

1.2 Parcijalne derivacije

1.2.1 Parcijalne derivacije prvog reda

Definicija 1.2.1 *Neka je $f(x, y)$ funkcija dvije varijable. Ako y držimo konstantnim (npr. $y = y_0$), a x varijabilnim, onda možemo promatrati $f(x, y_0)$ kao funkciju varijable x. Ako je ta funkcija diferencijabilna u $x = x_0$, onda vrijednost derivacije te funkcije označavamo s $f_x(x_0, y_0)$ i zovemo je **parcijalna derivacija funkcije** f **po varijabli** x **u točki** (x_0, y_0). Ponekad se piše i $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,y_0)} f(x, y)$ ili $\frac{\partial f}{\partial x} f(x_0, y_0)$.*

*Analogno definiramo i **parcijalnu derivaciju funkcije** f **po varijabli** y **u točki** (x_0, y_0), u oznaci $f_y(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(x_0,y_0)} f(x, y)$ ili $\frac{\partial f}{\partial y} f(x_0, y_0)$.*

Ako parcijalna derivacija funkcije f po varijabli x postoji za sve fiksne $y = y_0$ u svim točkama $x = x_0$ (x_0 i y_0 su takvi da je (x_0, y_0) iz domene funkcije

f), onda funkciju $f \to f_x$ danu s $(x_0, y_0) \to f_x(x_0, y_0)$ zovemo ***parcijalna derivacija funkcije f po varijabli x****, u oznaci f_x ili $\frac{\partial f}{\partial x}$.*

Analogno definiramo i ***parcijalnu derivaciju funkcije f po varijabli y****, u oznaci f_y ili $\frac{\partial f}{\partial y}$.*

Ove derivacije zovemo jednim imenom **parcijalne derivacije prvog reda** funkcije f ili skraćeno **prve parcijalne derivacije** funkcije f.

Primjer 1 Izračunajte f_x i f_y funkcije $f(x, y) = x^3 - y + 2x^3y^2$, te nađite $f_x(1, 4)$ i $f_y(1, -1)$.

Rješenje:

Da bismo našli parcijalnu derivaciju funkcije f po varijabli x, promatramo gornju funkciju kao funkciju varijable x, dok varijablu y shvaćamo kao konstantu. Imamo

$f_x(x, y) = 3x^2 + 6x^2y^2$

$f_y(x, y) = -1 + 4x^3y.$

Da bismo izračunali vrijednost parcijalne derivacije po x ili po y u točki $(1, -1)$, potrebno je samo uvrstiti ove vrijednosti u izraz za f_x i f_y, redom. Imamo

$f_x(1, 4) = 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1^2 \cdot 4^2 = 99$

$f_y(1, -1) = -1 + 4 \cdot 1^3 \cdot (-1) = -5.$

Pavilo za derivaciju kompozicije funkcija vrijedi i ovdje, kao što se može vidjeti u sljedećem primjeru:

Primjer 2 Izračunajte f_x i f_y funkcije $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$.

Rješenje: Računamo:

$$f_x(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot f_x(\frac{y}{x}) = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot f_y(\frac{y}{x}) = \frac{1}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Zadatak 3 Izračunajte f_x i f_y sljedećih funkcija:

(1) $f(x, y) = 5x^3y^2 - 9$

(2) $f(x, y) = e^{x-2y}$

(3) $f(x, y) = \arcsin xy^2$

(4) $f(x, y) = x^4 \sin xy^3$

(5) $f(x, y) = \sin e^{x-y}$

(6) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(7) $f(x, y) = x^3 \ln 1 + xy^{-\frac{3}{5}}$

(8) $f(x, y) = \sqrt{3x^5y - 7x^3y}$

(9) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$

(10) $f(x,y) = y^{-\frac{3}{2}} \tan^{-1} \frac{x}{y}$.

Zadatak 4 Izračunajte vrijednosti f_x i f_y funkcije $f(x,y)$ u danim točkama:

(1) $f(x,y) = 9 - x^2 - 7y^3$ u $(3,1)$

(2) $f(x,y) = x^2 e^{xy}$ u $(1,1)$

(3) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 4y^2}$ u $(1,2)$

(4) $f(x,y) = x^2 \cos xy$ u $(\frac{1}{2}, \pi)$.

1.2.2 Parcijalne derivacije drugog reda

S obzirom da su parcijalne derivacije po x i po y (ako postoje) i same funkcije, možemo (uz neka ograničenja koja nas ovdje neće zanimati) izračunavati njihove parcijalne derivacije, bilo po x bilo po y:
Preciznije, za danu diferencijabilnu funkciju f i njene parcijalne derivacije (ako su one opet diferencijabilne funkcije) možemo računati:

(1) parcijalnu derivaciju po x funkcije f_x $-$ oznaka f_{xx} ili $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

(2) parcijalnu derivaciju po y funkcije f_x $-$ oznaka f_{yx} ili $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

(3) parcijalnu derivaciju po x funkcije f_y $-$ oznaka f_{xy} ili $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

(4) parcijalnu derivaciju po y funkcije f_y $-$ oznaka f_{yy} ili $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Ove derivacije zovemo jednim imenom **parcijalne derivacije drugog reda** funkcije f ili skraćeno **druge parcijalne derivacije** funkcije f.
Napomena:
Naravno, moguće je računati parcijalne derivacije drugih parcijalnih derivacija (tzv. parcijalne derivacije trećeg reda), pa i nastaviti ovaj postupak na računanje parcijalnih derivacija još viših redova. Međutim, nas to ovdje neće zanimati.

Primjer 1 Izračunajte parcijalne derivacije drugog reda funkcije $f(x,y) = x^2y^3 + x^4y$.
Rješenje:
Najprije treba izračunati parcijalne derivacije prvog reda:
$f_x(x,y) = 2xy^3 + 4x^3y$
$f_y(x,y) = 3x^2y^2 + x^4$.
Sada možemo izračunati sve četiri parcijalne derivacije:
$f_{xx}(x,y) = 2y^3 + 12x^2y$
$f_{xy}(x,y) = 6xy^2 + 4x^3$
$f_{yx}(x,y) = 6xy^2 + 4x^3$
$f_{yy}(x,y) = 6x^2y$.

Napomena:
Primijetite da je u prethodnom primjeru $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$, što je upravo tvrdnja Schwarzovog teorema. Naime, za dovoljno "lijepe" funkcije imat ćemo uvijek jednakost između "miješanih" parcijalnih derivacija, pa će u praksi biti dovoljno izračunati samo tri od četiri moguće parcijalne derivacije drugog reda.

Zadatak 2 Ponovite zadatke 3 i 4, ali sada računajući sve parcijalne derivacije drugog reda. Uvjerite se u ispravnost tvrdnje Schwarzovog teorema na ovim primjerima!

1.2.3 Parcijalne derivacije implicitno zadanih funkcija

Često u praksi nailazimo na funkcije kod kojih nije moguće eksplicitno izraziti funkcijsko pravilo u terminima obiju varijabli. Npr. kod funkcije $f(x,y)$ zadane implicitno s $x^2 + f(x,y)\sin(xyf(x,y)) = 0$ nije moguće eksplicitno izraziti $f(x,y)$ kao funkciju u varijablama x i y. U takvim izrazima često označavamo $z := f(x,y)$ pa gornji izraz poprima oblik $x^2 + z\sin(xyz) = 0$. Sada *formalno* ovaj izraz shvaćamo kao funkciju $F(x,y,z)$ *tri* varijable x, y i z, iako je jasno da je z ovdje zapravo *funkcija* u varijablama x i y.

Nas će prije svega zanimati kako u takvim izrazima naći parcijalne derivacije prvog reda i potom izračunati vrijednosti tih derivacija u zadanoj točki. U našim oznakama to znači da želimo pronaći z_x i z_y.

Pri računanju parcijalnih derivacija vrijedi sljedeće pravilo:

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z}, \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Primjer 1 Izračunajte prve parcijalne derivacije funkcije $z = f(x,y)$ zadane implicitno s $xz^2 + x^2 + 2x + y^2 + 4 = 0$.

Rješenje: U našem slučaju je $F(x,y,z) = xz^2 + x^2 + 2x + y^2 + 4$, pa je
$F_x(x,y,z) = z^2 + 2x + 2$
$F_y(x,y,z) = 2y$
$F_z(x,y,z) = 2xz$.
Sada je prema gornjoj formuli
$f_x(x,y) = -\frac{z^2+2x+2}{2xz}$
$f_y(x,y) = -\frac{2y}{2xz} = -\frac{y}{xz}$.

Zadatak 2 Izračunajte prve parcijalne derivacije funkcije $z = f(x,y)$ zadane implicitno s:

(1) $(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} = 1$

(2) $\ln(2x^2 + y - z^3) = x$

(3) $x^2 + z\sin xyz = 0$

(4) $e^{xy}\sinh z - z^2x + 1 = 0$.

Primjer 3 Izračunajte $z_{yx}(0,0)$ ako je $z = \frac{x+y}{x+yz+2}$.

Rješenje: Iako na prvi pogled tako ne izgleda, $z = f(x, y)$ je implicitno zadana kao funkcija u varijablama x i y. Sređivanjem dobivamo:

$z(x + yz + 2) = x + y$

$zx + yz^2 + 2z - x - y = 0.$

Dakle, $F(x, y, z) := zx + yz^2 + 2z - x - y$, pa imamo

$F_x(x, y, z) = z - 1$

$F_z(x, y, z) = x + 2yz + 2.$

Stoga je $z_x = -\frac{z-1}{x+2yz+2}$.

Sada treba naći drugu derivaciju z_{yx}. Da bismo je izračunali, trebat će nam i z_y:

$F_y(x, y, z) = z^2 - 1$, pa je

$z_y = -\frac{z^2-1}{x+2yz+2}$.

Nama će trebati $z_y(0, 0)$. Ako je $x = y = 0$, onda uvrštavanjem u početni izraz za $z = f(x, y)$ imamo $z = 0$, pa je $z_y(0, 0) = \frac{1}{2}$.

Sada računamo $z_{yx}(1, 1)$, što je parcijalna derivacija po varijabli y funkcije z_x. No, kako z_x nije eksplicitno izražena kao funkcija po x i y, već se s desne strane izraza za z_x pojavljuje i sam z, morat ćemo pažljivo derivirati, shvaćajući z kao funkciju u varijabli y (jer parcijalno deriviramo po y). To znači da će se u izrazu za z_{yx} pojaviti z_y, kojeg smo gore već izračunali u točki $(0, 0)$. Imamo:

$z_{yx} = -\frac{z_y(x+2yz+2)-(z-1)(2z+2yz_y)}{(x+2yz+2)^2}$.

Za točku $(0, 0)$ (tj. $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z_y(0, 0) = \frac{1}{2}$) je

$z_{yx}(0, 0) = -\frac{\frac{1}{2}\cdot 2-(-1)\cdot 0}{2^2}$, tj. $z_{xy}(0, 0) = -\frac{1}{4}$.

Zadatak 4 Izračunajte druge parcijalne derivacije funkcije $z = z(x, y)$ u točki $T(1, 0)$ zadane implicitno s $x^2 - 2x + z^2 - 4z + 1 = 0,\ z > 0$.

Poglavlje 1

Linearna aproksimacija funkcija više varijabla, tangencijalna ravnina, diferencijal.

1.1 Tangencijalna ravnina

Proučavamo sljedeći problem: za plohu danu jednadžbom (implicitnom ili eksplicitnom) treba naći tangencijalnu ravninu koja prolazi danom točkom (na samoj plohi ili se nalazi izvan nje).

Formula koju ovdje koristimo glasi: neka je $T_0(x_0, y_0, z_0)$ neka točka *na plohi* zadanoj *eksplicitno* jednadžbom $z = f(x, y)$. Ako postoje $f_x(x_0, y_0)$ i $f_y(x_0, y_0)$ (i vrijede još neki uvjeti koji nas ovdje neće zanimati), onda ploha u točki T_0 ima tangencijalnu ravninu i njena jednadžba glasi

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Primjer 1 Odredite tangencijalnu ravninu na graf funkcije $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ povučenu u točki $(4, 1, z_0)$ tog grafa.

Rješenje: Najprije ćemo odrediti točku z_0 iz činjenice da je točka $(4, 1, z_0)$ na grafu funkcije f — to znači da koordinate te točke zadovoljavaju jednakost (uz $x_0 = 1, y_0 = 1$)

$$z_0 = f(x_0, y_0) = f(4, 1) = 1 \cdot \sqrt{4} - 1^2 - 4 + 6 \cdot 1 = 3.$$

Kako bismo iskoristili formulu za tangencijalnu ravninu potrebno je još izračunati $f_x(x_0, y_0)$ i $f_y(x_0, y_0)$:

$$f_x(x, y) = \frac{y}{2\sqrt{x}} - 1 \quad \Rightarrow \quad f_x(4, 1) = \frac{1}{2\sqrt{4}} - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$
$$f_y(x, y) = \sqrt{x} - 2y + 6 \quad \Rightarrow \quad f_y(4, 1) = \sqrt{4} - 2 \cdot 1 + 6 = 6.$$

Sada prema formuli za jednadžbu tangencijalne ravnine imamo

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4}(x-4)+6(y-1)-(z-3) &= 0 \ / \cdot (-4) \\ 3x-12-24y+24+4z-12 &= 0 \\ 3x-24y+4z &= 0 \end{aligned}$$

Primjer 2 Izračunajte tangencijalnu ravninu plohe $z = x^2y$ u točki $(2,1,4)$.

Rješenje: Najprije provjeravamo da se točka $(2,1,4)$ doista nalazi naplohi $z = x^2y$: $4 = 2^2 \cdot 1$. Potom računamo vrijednosti prvih derivacija u točki $(2,1,4)$:

$z_x(x,y) = 2xy \Rightarrow z_x(2,1) = 4$

$z_y(x,y) = x^2 \Rightarrow z_y(2,1) = 4.$

Jednadžba ravnine dobiva se uvrštavanjem u gornju formulu:

$4(x-2)+4(y-1)-(z-4) = 0 \Rightarrow 4x+4y-z = 8.$

Napomena: Može se dogoditi da je potrebno naći tangencijalnu ravninu na plohu koja nije zadana eksplicitno. Za *implicitno* zadanu plohu $F(x,y,z) = 0$ koristimo sljedeću formulu za tangencijalnu ravninu u točki $(x_0, y_0, f(x_0,y_0) = z_0)$ *na plohi*:

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0.$$

Primijetite da je formula za tangencijalnu ravninu na plohu zadanu eksplicitno dobivena iz ove formule ako se uzme da je u eksplicitnom slučaju funkcija F dana s $F(x,y,z) = f(x,y) - z$.

Primjer 3 Odredite tangencijalnu ravninu plohe $\mathcal{P} \ldots xz^2 + x^2y = 6$ povučene u točki $M(x > 0, 2, 1)$.

Rješenje: Izračunajmo najprije koordinatu točke x. Kako se točka M nalazi na plohi, njene koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu plohe. Uvrštavanjem i korištenjem činjenice $x > 0$ imamo

$x + 2x^2 = 6 \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$

Računamo dalje prve derivacije funkcije $F(x,y,z) := xz^2+x^2y-6$, uvrštavajući potom koordinate točke $M(\frac{3}{2},2,1)$:

$F_x(x,y,z) = z^2+2xy \Rightarrow F_x(\frac{3}{2},2,1) = 7$

$F_y(x,y,z) = x^2 \Rightarrow F_y(\frac{3}{2},2,1) = \frac{9}{4}$

$F_z(x,y,z) = 2xz \Rightarrow F_z(\frac{3}{2},2,1) = 3$

Jednadžba ravnine glasi:

$7(x-\frac{3}{2})+\frac{9}{4}(y-2)+3(z-1) = 0 \Rightarrow 28x+9y+12z = 72.$

Primjer 4 Na plohi $x^2+y^2-z^2-2x = 8$ nađite točke u kojima je tangencijalna ravnina paralelna s koordinatnom ravninom $y = 0$.

Rješenje:

Tangencijalna ravnina na zadanu plohu će u nekoj točki (x_0,y_0,z_0) biti paralelna na ravninu $y = 0$ ako su vektori normala tih ravnina kolinearni.

Nađimo najprije opći oblik tangencijalne ravnine na plohu $x^2+y^2-z^2-2x = 8$ za proizvoljnu točku plohe (x_0,y_0,z_0). S obzirom da je ploha zadana implicitno, definiramo $F(x,y,z) := x^2+y^2-z^2-2x-8$ i računamo

$F_x(x,y,z) = 2x - 2 \Rightarrow F_x(x_0,y_0,z_0) = 2x_0 - 2$
$F_y(x,y,z) = 2y \Rightarrow F_y(x_0,y_0,z_0) = 2y_0$
$F_z(x,y,z) = -2z \Rightarrow F_z(x_0,y_0,z_0) = -2z_0.$

Stoga jednadžba tangencijalne ravnine glasi

$(2x_0 - 2)(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - 2z_0(z - z_0) = 0 \;\; / : 2$
$(x_0 - 1)x + y_0 y - z_0 z - (x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 - 2x_0) = x_0.$

Kako je (x_0, y_0, z_0) na plohi, ta točka zadovoljava jednadžbu plohe, tj. vrijedi $x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 - 2x_0 = 8$, pa sređeni oblik jednadžbe tangencijalne ravnine glasi

$(x_0 - 1)x + y_0 y - z_0 z = 8 + x_0 \qquad (*)$

Zadano je da ova ravnina mora biti paralelna ravnini $y = 0$, pa imamo kolinearnost među vektorima normala: $\frac{x_0-1}{0} = \frac{y_0}{1} = \frac{-z_0}{0}$. Odavdje izlazi $x_0 = 1$, $z_0 = 0$, što uvrštanjem u jednadžbu plohe daje $y_0^2 = 9$. Imamo dva rješenja:

(1) $y_0 = 3$. Zajedno s $x_0 = 1$, $z_0 = 0$ imamo točku $(1, 3, 0)$. Uvrštanjem u $(*)$ dobivamo da je jednadžba tangencijalne ravnine $3y = 9$, tj. $y = 3$.

(2) $y_0 = -3$. Zajedno s $x_0 = 1$, $z_0 = 0$ imamo točku $(1, -3, 0)$. Uvrštanjem u $(*)$ dobivamo da je jednadžba tangencijalne ravnine $3y = -9$, tj. $y = -3$.

Zaključak je da se u dvije točke na plohi postiže uvjet paralelnosti tangencijalne ravnine s $y = 0$. To su točke $(1, 3, 0)$ i $(1, -3, 0)$, a tangencijalne ravnine su $y = 3$ i $y = -3$, redom.

Zadatak 5 Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $\mathcal{P} \ldots z - xy = 0$ koja je okomita na pravac $\frac{x}{2} = \frac{y-\pi}{1} = \frac{z+3}{1}$.

Zadatak 6 Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine plohe $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ paralelne sa $2x + y + 3z = 1$.

Zadatak 7 Odredite ravninu tangencijalnu na elipsoid $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ koja je usporedna ravnini zadanoj jednadžbom $x - y + 2z - \ln 2 = 0$.

Zadatak 8 Sfera Σ zadana je jednadžbom $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na Σ koja sadrži točke $T_1(1, 3, 1)$, $T_2(2, 1, 1)$.

1.2 Linearna aproksimacija funkcija dviju varijabla

Koristimo sljedeću formulu *linearne aproksimacije* za približnu vrijednost funkcije f u točki $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y.$$

Napomena:

Ova se formula najčešće koristi za izračunavanje vrijednosti funkcije f u točkama koje se nalaze *dovoljno blizu* točkama čiju je funkcijsku vrijednost lako izračunati. Dakle, u pravilu su Δx i Δy "dovoljno" mali da stvarna vrijednost funkcije u točki odgovara aproksimativnoj vrijednosti danoj gornjom formulom.

Primjer 9 Zadana je funkcija $f(x,y)=x^2+y^2-4x^2y^2$. Korištenjem formule za linearnu aproksimaciju izračunajte približno $f(1.95,2.1)$.

Rješenje:

Najprije odredimo točku $(x_0,y_0)=(2,2)$ koja se nalazi "dovoljno" blizu zadanoj točki, a potom i $\Delta x=-0.05$, $\Delta y=0.1$. Kako bismo iskoristili formulu za linearnu aproksimaciju, potrebno je izračunati vrijednost funkcije u točki (x_0,y_0), kao i vrijednosti parcijalnih derivacija prvog reda u toj točki:

$$\begin{aligned}
f(2,2) &= 2^2+2^2-4\cdot 2^2\cdot 2^2=-56\\
f_x(x,y) &= 2x-8xy^2\Rightarrow f(2,2)=2\cdot 2-8\cdot 2\cdot 2^2=-60\\
f_y(x,y) &= 2y-8x^2y\Rightarrow f(2,2)=2\cdot 2-8\cdot 2^2\cdot 2=-60,
\end{aligned}$$

pa uvrštavanjem u formulu dobivamo

$$\begin{aligned}
f(1.9,2.1) &\approx f(2,2)+f_x(2,2)\cdot\Delta x+f_y(2,2)\cdot\Delta y=\\
&= -56-60\cdot(-0.05)-60\cdot 0.1=-56-60\cdot 0.05=-56-3=-59.
\end{aligned}$$

Primjer 10 Izračunajte približno $\sqrt[3]{5.7+\sqrt[4]{15.8}}$.

Rješenje: Kao i obično u zadacima s računom približne vrijednosti, potrebno je formirati funkciju koja opisuje gornji izraz. Ovdje će to očito biti funkcija $f(x,y)$ dviju varijabli dana s $f(x,y)=\sqrt[3]{x+\sqrt[4]{y}}$. Točka s kojom radimo je $(5.7,15.8)$, pa je $x_0+\Delta x=5.7$, $y_0+\Delta y=15.8$. Odavdje izlazi da je najprikladnije uzeti (biramo najbliže "lijepe" vrijednosti) $x_0=6$, $\Delta x=-0.3$ te $y_0=16$, $\Delta y=-0.2$. Računamo sve sumande koji su potrebni za desnu stranu formule:

$f(x_0,y_0)=f(6,16)=\sqrt[3]{6+\sqrt[4]{16}}=\sqrt[3]{6+2}=2$

$f_x(x,y)=\frac{1}{3}(x+y^{\frac{1}{4}})^{-\frac{2}{3}}\Rightarrow f_x(6,16)=\frac{1}{3}\cdot 8^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{12}$

$f_y(x,y)=\frac{1}{3}(x+y^{\frac{1}{4}})^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}}\Rightarrow f_y(6,16)=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{4}\cdot 16^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{384}$

Sada je

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{5.7+\sqrt[4]{15.8}} &= f(5.7,15.8)\approx\\
&\approx f(6,16)+f_x(6,16)\cdot(-0.3)+f_y(6,16)\cdot(-0.2)=\\
&= 2-\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{10}-\frac{1}{384}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3791}{1920}.
\end{aligned}$$

Zadatak 11 Koristeći formulu za linearnu aproksimaciju izračunajte približno vrijednost izraza:

(1) $\sqrt{5.8+\sqrt[3]{1-3.1^2}}$

(2) $\sqrt[3]{6.1+\sqrt{3.98}}$

(3) $\frac{1.05^2}{\sqrt[3]{7.9\cdot\sqrt[4]{1.05^3}}}$

Zadatak 12 Odredite približno $z(0.2,0.9)$ ako je $z=z(x,y)$ zadana implicitno s $xyz+x^3+y^3+z^3-28=0$.

Primjer 13 Izračunajte približno polumjer opisane kružnice pravokutnika stranica $a = 6.2$, $b = 7.8$.

Rješenje: Lako se vidi da za promjer $2r$ kružnice opisane pravokutniku vrijedi $(2r)^2 = a^2 + b^2$, pa je $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. Stoga definiramo $r = r(a,b) = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ da bude funkcijska ovisnost polumjera kružnice opisane pravokutniku stranica a i b. U našem slučaju treba izračunati $r(6.2, 7.8)$, pa definiramo $a_0 = 6$, $\Delta a = 0.2$, $b_0 = 8$, $\Delta b = -0.2$. Računamo:

$r(6,8) = \frac{1}{2}\sqrt{6^2+8^2} = 5$

$r_a(a,b) = \frac{1}{2}(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2a = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow r_a(6,8) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$r_b(a,b) = \ldots = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow r_b(6,8) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

Sada je

$r(6.2, 7.8) \approx r(6,8) + r_a(6,8)\cdot(0.2) + r_b(6,8)\cdot(-0.2) = 5 + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5} - \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{124}{25}$.

Zadatak 14 Izračunajte približno polumjer kružnice sa središtem u ishodištu koja prolazi točkom $T(6.9, 24.2)$.

Zadatak 15 Izračunajte približno promjenu oplošja uspravne kvadratne prizme površine plašta $P = 48$ i obujma $V = 36$, ako se stranica poveća za 0.02, a visina smanji za 0.03.

Zadatak 16 Zatvoreni sanduk kojemu su vanjske dimenzije 10 cm, 8 cm i 6 cm napravljen je iz šperploča debljine 2 mm. Odredite približno količinu materijala utrošenog za izradu sanduka.

Zadatak 17 Izračunajte približno $1.002 \cdot 2.003^2 \cdot 3.004^3$ (koristi se formula analogna gornjoj, ali za funkciju *triju* varijabli).

1.3 Diferencijal

Diferencijal $df(x,y)$ funkcije dviju varijabli $f(x,y)$ računamo prema formuli

$$df(x,y) = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy.$$

Primjer 18 Izračunajte diferencijal funkcije $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x^2y^2$.

Rješenje: Najprije računamo parcijalne derivacije prvog reda funkcije $f(x,y)$:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x - 8xy^2 \\ f_y(x,y) &= x^2 - 8x^2y, \end{aligned}$$

te nakon toga možemo prema gornjoj formuli odmah napisati diferencijal:

$$df(x,y) = (2x - 8xy^2)dx + (x^2 - 8x^2y)dy.$$

Primjer 19 Izračunajte diferencijal funkcije $f(x,y) = x^2\cos xy$.

Rješenje: Iz računa parcijalnih derivacija prvog reda

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x\cos xy - x^2\sin(xy)\cdot y = 2x\cos xy - x^2y\sin xy \\ f_y(x,y) &= -x^2\sin xy \cdot x = -x^3\sin xy \end{aligned}$$

slijedi da diferencijal ove funkcije glasi

$$df(x,y) = (2x\cos xy - x^2 y \sin xy)dx - x^3 \sin xy dy$$

Zadatak 20 Izračunajte diferencijal sljedećih funkcija:

(1) $f(x,y) = 5x^3y^2 - 9$

(2) $f(x,y) = e^{x-2y}$

(3) $f(x,y) = \arcsin xy^2$

(4) $f(x,y) = x^4 \sin xy^3$

(5) $f(x,y) = \sin e^{x-y}$

(6) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(7) $f(x,y) = x^3 \ln 1 + xy^{-\frac{3}{5}}$

(8) $f(x,y) = \sqrt{3x^5y - 7x^3y}$

(9) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$

(10) $f(x,y) = y^{-\frac{3}{2}} \tan^{-1} \frac{x}{y}$.

Poglavlje 1

Lokalni ekstremi funkcije više varijabla

Definicija 1.0.1 *Za funkciju f dviju varijabli kažemo da ima* ***lokalni maksimum*** *u točki (x_0, y_0) ako postoji okolina te točke takva da za sve (x, y) iz te okoline vrijedi $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$. Kažemo da f ima u točki (x_0, y_0)* ***globalni maksimum*** *ako je $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ za sve točke (x, y) iz domene funkcije f.*

Za funkciju f dviju varijabli kažemo da ima ***lokalni minimum*** *u točki (x_0, y_0) ako postoji okolina te točke takva da za sve (x, y) iz te okoline vrijedi $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$. Kažemo da f ima u točki (x_0, y_0)* ***globalni minimum*** *ako je $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ za sve točke (x, y) iz domene funkcije f.*

Lokalne minimume i maksimume funkcije f zovemo ***lokalni ekstremi*** *funkcije f, dok globalni minimum i maksimum funkcije f zovemo* ***globalni ekstremi*** *funkcije f.*

Ispitivanje lokalnih i globalnih ekstrema zadane funkcije jedan je od osnovnih zadataka u matematičkoj analizi. Kod funkcija dviju varijabli taj je postupak nešto složeniji nego kod funkcija jedne varijable i može se podijeliti u dva dijela.

Najprije dajemo tzv. **nužan uvjet za postojanje lokalnog ekstrema**: ako funkcija f ima lokalni ekstrem u točki (x_0, y_0) i ako parcijalne derivacije prvog reda u toj točki postoje, onda mora vrijediti

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= 0 \\ f_y(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned}$$

Napomena:

Nužni uvjet za postojanje lokalnog ekstrema u praksi ćemo čitati "unatraške": da bismo našli sve točke u kojima se s obzirom na gornji kriterij uopće može postići lokalni ekstrem, moramo riješiti sustav jednadžbi $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$. Točke koje zadovoljavaju ovaj sustav shvaćamo kao *kandidate* među kojima ćemo potom tražiti lokalne ekstreme.

Nakon što pronađemo sve točke-kandidate, prelazimo na utvrđivanje koje od navedenih točaka predstavljaju lokalni minimum ili maksimum. Da bismo to utvrdili, potrebno je izračunati vrijednosti drugih parcijalnih derivacija u točkama-kandidatima.

Za svaku pojedinu točku (x_0, y_0), kandidata za lokalni ekstrem, označimo:

$A := f_{xx}(x_0, y_0), \quad B := f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0), \quad C := f_{yy}(x_0, y_0).$

Dalje, označimo $\Delta := AC - B^2$

Vrijedi sljedeće **pravilo**:

Ako za točku (x_0, y_0) kandidata za lokalni ekstrem (točka zadovoljava nužan uvjet) vrijedi:

(1) $\Delta > 0$, onda se u (x_0, y_0) postiže lokalni ekstrem i to:

  (a) lokalni maksimum ako je $A < 0$

  (b) lokalni minimum ako je $A > 0$

(2) $\Delta < 0$, onda f ne postiže ekstrem u (x_0, y_0), već je (x_0, y_0) tzv. sedlasta točka

(3) $\Delta = 0$, onda ne možemo izvući nikakav zaključak o tome ima li f u točki (x_0, y_0) lokalni ekstrem ili ne.

Napomena:

Slučaj (2) govori nešto više od same činjenice da u ispitivanoj točki funkcija ne postiže lokalni ekstrem. Naime, ako vrijedi $\Delta < 0$ u nekoj točki-kandidatu za lokalni ekstrem (x_0, y_0), onda u toj točki funkcija f ima tzv. *sedlo*, što je ekvivalent pojmu stacionarne točke kod funkcije jedne varijable. Naziv "sedlo" u ovom slučaju dobro dočarava izgled plohe funkcije f u okolini točke sedla.

Dalje, komentirajmo ukratko porijeklo veličine Δ. Vrijednosti parcijalnih derivacija u točki (x_0, y_0) mogu se organizirati u sljedeću matricu:

$$H := \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{yx}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix},$$

pa vidimo da je $\Delta = \det \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$, dakle upravo determinanta gornje matrice koju zovemo Hesseova matrica. Primijetimo da je $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$ prema Schwarzovom teoremu, pa stoga na sporednoj dijagonali u Hesseovoj matrici imamo jednake vrijednosti koje u Δ čine faktor B^2.

Primjer 1 Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$.

Rješenje:

Najprije nalazimo prve parcijalne derivacije i rješavamo sustav $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$:

$f_x(x, y) = 4y - 4x^3 = 0$

$f_y(x, y) = 4x - 4y^3 = 0.$

Imamo $y = x^3$, $x = y^3$. Uvrštanjem $y = x^3$ u drugu jednadžbu dobivao $x = x^9$, što faktoriziranjem postaje

$x(x^8 - 1) = 0$

$x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = 0$

$x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$

$x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$

Zadnja dva faktora ne mogu biti jednaka nuli za realan x, pa nam ostaju tri rješenja: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Iz $y = x^3$ dobivamo $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = -1$, pa ukupno imamo tri točke kandidata za ekstrem: $(0,0)$, $(1,1)$ i $(-1,-1)$.

Za svaku od ovih točaka provodimo proceduru utvrđivanja koja od njih predstavlja lokalni ekstrem. Da bismo to izračunali, nađimo najprije druge parcijalne derivacije funkcije f:

$f_{xx}(x,y) = -12x^2$
$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 4$
$f_{yy}(x,y) = -12y^2$.

Uvrštavanjem vrijednosti x i y koordinata u ove izraze dobivat ćemo za pojedine točke-kandidate vrijednosti za A, B i C, redom.

Računamo:

(a) točka $(0,0)$:
$A = f_{xx}(0,0) = 0$, $B = f_{xy}(0,0) = 4$, $C = f_{yy}(0,0) = 0$,
pa je $\Delta = AC - B^2 = -16 < 0$. Dakle, radi se o sedlastoj točki.

(b) točka $(1,1)$:
$A = f_{xx}(1,1) = -12$, $B = f_{xy}(1,1) = 4$, $C = f_{yy}(1,1) = -12$,
pa je $\Delta = AC - B^2 = 128 > 0$. Dakle, u $(1,1)$ postiže se lokalni ekstrem, i to maksimum, jer je $A = -12 < 0$. Vrijednost lokalnog maksimuma u točki $(1,1)$ iznosi $f(1,1) = 2$.

(c) točka $(-1,-1)$:
$A = f_{xx}(-1,-1) = -12$, $B = f_{xy}(-1,-1) = 4$, $C = f_{yy}(-1,-1) = -12$,
pa je opet $\Delta = 128 > 0$ i radi se o točki lokalnog maksimuma jer je $A = -12 < 0$. Vrijednost lokalnog maksimuma u točki $(-1,-1)$ opet iznosi $f(-1,-1) = 2$.

Primjer 2 Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = y \sin x$.

Rješenje:

Nužan uvjet za lokalne ekstreme daje sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) = y\cos x &= 0 \\ f_y(x,y) = \sin x &= 0. \end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe slijedi $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Uvrštavanjem u prvu jednadžbu imamo za $\cos x$ vrijednost 1 ((za parne k) ili -1 (za neparne k), odakle nužno slijedi da je $y = 0$. Dakle, dobili smo beskonačno mnogo točaka kandidata za ekstrem oblika $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Računamo sada parcijalne derivacije drugog reda:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -y\sin x \\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) &= \cos x \\ f_{yy}(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Imamo dvije mogućnosti, ovisno o tome je li k paran ili neparan:

(a) k paran, tj. $k = 2l$ za $l \in \mathbb{Z}$:
$A = f_{xx}(2l\pi, 0) = 0$, $B = f_{xy}(2l\pi, 0) = \cos(2l\pi) = 1$, $C = f_{yy}(2l\pi, 0) = 0$, pa je $\Delta = AC - B^2 = 0 - 1^2 = -1 < 0$, što znači da se su $(k\pi, 0)$, k paran, sedlaste točke

(b) k neparan, tj. $k = 2l + 1$ za $l \in \mathbb{Z}$: slično kao gore, imamo:
$A = f_{xx}((2l+1)\pi, 0) = 0$, $B = f_{xy}((2l+1)\pi, 0) = \cos((2l+1)\pi) = -1$, $C = f_{yy}((2l+1)\pi, 0) = 0$, pa je $\Delta = AC - B^2 = 0 - (-1)^2 = -1 < 0$, pa i u $(k\pi, 0)$, k paran, imamo sedlo.

Konačno, vidimo da ova funkcija nema niti jednu točku u svojoj domeni u kojoj se postiže lokalni ekstrem, već samo beskonačno mnogo sedlastih točaka (i sve su one oblika $(k\pi, 0)$ za $k \in \mathbb{Z}$.

Zadatak 3 Odredite lokalne ekstreme funkcije:

(1) $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$

(2) $f(x, y) = x^3 - 3xy - y^3$

(3) $f(x, y) = y^2 + xy + 3y + 2x + 3$

(4) $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$

(5) $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}$

(6) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$

(7) $f(x, y) = x^2 + y - e^y$

(8) $f(x, y) = xe^y$

(9) $f(x, y) = e^x \sin y$

(10) $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

Nešto drugačije postupamo ako je funkcija zadana implicitno (u osnovi samo stoga što je formula za nalaženje parcijalnih derivacija prvog reda u tom slučaju definirana drugačije $-$ vidjeti vježbe vezane uz 7. lekciju!).

Primjer 4 Odredite lokalne ekstreme funkcije $z = z(x, y)$ zadane implicitno s $x^2 + 2y^2 + xz + z^2 - 3 = 0$.

Rješenje:

Definiramo $F(x, y, z) := x^2 + 2y^2 + xz + z^2 - 3$ i računamo:

$F_x(x, y, z) = 2x + z$

$F_y(x, y, z) = 4y$

$F_z(x, y, z) = x + 2z$.

Stoga je $z_x(x, y) = -\frac{2x+z}{x+2z}$, a $z_y(x, y) = -\frac{4y}{x+2z}$. Da bismo našli kandidate za lokalne ekstreme, moramo riješiti sustav $z_x(x, y) = z_y(x, y) = 0$, tj. $2x + z = 0 = 4y$. Dobivamo $y = 0$ i $z = -2x$, što uvrštanjem u jednadžbu plohe $x^2 + 2y^2 + xz + z^2 - 3 = 0$ daje $x^2 = 1$, tj. $x_1 = 1$ ili $x_2 = -1$, pa je $z_1 = -2$, $z_2 = 2$. Imamo dvije točke koje su kandidati za ekstrem: $(1, 0)$ i $(-1, 0)$.

Izračunajmo sada druge parcijalne derivacije:

$z_{xx}(x,y) = -\frac{(2+z_x)(x+2z)-(2x+z)(1+2z_x)}{(x+2z)^2}$

$z_{yx}(x,y) = -\frac{z_y(x+2z)-(2x+z)\cdot 2z_y}{(x+2z)^2} = z_{xy}(x,y)$

$z_{yy}(x,y) = -\frac{4\cdot(x+2z)-4y\cdot 2z_y}{(x+2z)^2}$.

Sada računamo za svaku od dvije točke-kandidata radi li se o lokalnom ekstremu. Pritom ćemo koristiti činjenicu da je $z_x(1,0) = z_y(1,0) = 0$ i $z_x(-1,0) = z_y(-1,0) = 0$ (točke-kandidati zadovoljavaju nužan uvjet za ekstrem):

(a) točka $(1,0)$ $(z = -2)$: $A = z_{xx}(1,0) = \frac{2}{3}$, $B = z_{xy}(1,0) = 0$, $C = z_{yy}(1,0) = \frac{4}{3}$, pa je $\Delta = AC - B^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3} = \frac{8}{9} > 0$ i u točki $(1,0)$ funkcija $z(x,y)$ postiže lokalni ekstrem. Kako je $A = \frac{2}{3} > 0$, radi se lokalnom minimumu koji iznosi $z = -2$.

(b) točka $(-1,0,2)$ $(z = 2)$: $A = z_{xx}(-1,0) = -\frac{2}{3}$, $B = z_{xy}(-1,0) = 0$, $C = z_{yy}(-1,0) = -\frac{4}{3}$, pa je $\Delta = AC - B^2 = \frac{8}{9} > 0$ i u točki $(-1,0)$ funkcija $z(x,y)$ postiže lokalni ekstrem. S obzirom da je $A = -\frac{2}{3} < 0$, radi se o lokalnom maksimumu koji iznosi $z = 2$.

Zadatak 5 Odredite lokalne ekstreme funkcije $z = z(x,y)$ zadane implicitno:

(1) $x^2 + 2x + y^2 + z^2 - z = 0$

(2) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - z - 1 = 0$

(3) $z^3 - 3z(x^2 + y^2) - 27 = 0$

(4) $xz^2 + x^2 + 2x + y^2 + 4 = 0$

(5) $xyz + x^3 + y^3 + z^3 - 28 = 0$

(6) $z^2 + 2z + x^2 + 2x - y^2 + 1 = 0$

(7) $z^2 + xz + x^2 + y^2 + 2y - 2 = 0$.

Često se pojavljuju problemski zadaci u kojima je potrebno najprije konstruirati funkciju dviju varijabli, a potom izračunati ekstreme.

Primjer 6 Od svih kvadara obujma 27 nađite onaj koji ima najmanje oplošje.

Rješenje: Oplošje kvadra je općenito funkcija triju varijabli: ako s a, b i c označimo duljine stranica kvadra, onda je oplošje $O = 2(ab + ac + bc)$, dok je volumen $V = abc$ i iznosi 27. Sada iz $abc = 27$ imamo $c = \frac{27}{ab}$, što uvrštavanjem u izraz za oplošje daje

$O = 2(ab + (a+b)c) = 2(ab + (a+b)\cdot\frac{27}{ab}) = 2(ab + \frac{27}{a} + \frac{27}{b})$.

Definirajmo funkciju $f(a,b) := ab + \frac{27}{a} + \frac{27}{b}$. Očito će točke lokalnih minimuma ove funkcije davati i najmanje vrijednosti oplošja, jer je $O(a,b) = 2f(a,b)$. Stoga najprije nalazimo kandidate za ekstrem rješavajući sustav $f_a(a,b) = 0 = f_b(a,b)$. Imamo

$f_a(a,b) = b - \frac{27}{a^2} = 0 \Rightarrow a^2b = 27$ i zbog simetričnosti funkcije $ab^2 = 27$.

Dijeljenjem ove dviju jednadžbi dobivamo $\frac{a^2b}{ab^2} = 1$, tj. $a = b$, pa uvrštavanjem u prvu jednadžbu imamo $a^3 = 27 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow c = \frac{27}{3\cdot 3} = 3$. S obzirom da je $(3,3)$ jedina točka kandidat za lokalni ekstrem, očito je da je rješenje zadatka kvadar sa sve tri stranice duljine 3, dakle kocka. Minimalni obujam iznosi 54. Uvjerite se da se za točku $(3,3)$ doista radi o lokalnom minimumu funkcije f!

Zadatak 7 Među svim kvadrima oplošja 2 odredite onaj koji ima najveći obujam.

Zadatak 8 Na plohi $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ nađite točku najbližu točki $T(0,1,4)$.

Zadatak 9 Na elipsoidu $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ odredite točku najbližu ravnini $x + y + 2z = 12$.

Zadatak 10 U ravnini nađite točku sa svojstvom da je zbroj kvadrata udaljenosti od pravaca $x = 0$, $y = 0$, $x - y + 1 = 0$ najmanji.

Zadatak 11 Kroz točku $T(3,2,1)$ položite ravninu koja s koordinatnim ravninama zatvara piramidu najmanjeg obujma.

Zadatak 12 U polukuglu radijusa R upišite paralelepiped maksimalnog obujma kojem jedna strana leži u bazi polukugle.

Zadatak 13 U dio kugle $x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$ koji se nalazi u prvom oktantu, upišite kvadar maksimalnog obujma tako da mu tri strane leže u koordinatnim ravninama.

Zadatak 14 U tetraedar određen točkama $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,3)$ upišite kvadar maksimalnog obujma tako da mu jedan brid leži na $z-$osi.

Višestruki integrali - uzastopno integriranje

0.1 Dvostruki integral u pravokutnim koordinatama

Dvostrukim integralom neprekidne funkcije $f(x,y)$ preko ograđenog zatvorenog područja S nazivamo limes dvostruke integralne sume:

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ \max \Delta y_k \to 0}} \sum_i \sum_k f(x_i, y_k)\Delta x_i \Delta y_k$$

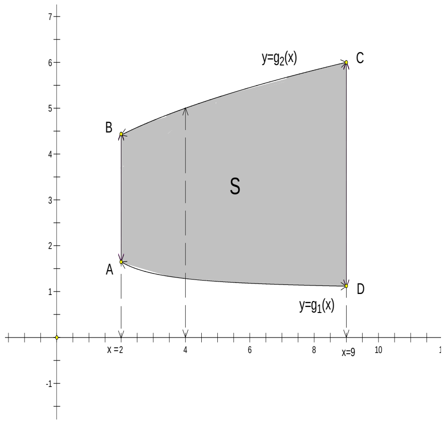
gdje je $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ i $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ a točke (x_i, y_k) pripadaju području S.

Kod dvostrukog integrala vrlo je bitno pravilno odrediti granice integracije. Imamo dva osnovna tipa područja integracije:

1) Područje integracije S omeđeno je s lijeva i s desna pravcima $x = a$ i $x = b$ $(a < b)$ a odozdo i odozgo neprekidnim krivuljama $y = g_1(x)$ i $y = g_2(x)$, $g_1(x) \leq g_2(x)$ (vidi sliku). Očito se u području S varijabla x mijenja od a do b a varijabla y od $g_1(x)$ do $g_2(x)$. Integral $\iint_{(S)} f(x,y)dxdy$ sada postaje:

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy.$$

Primjetimo da je veličina x u integralu $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy$ konstantna jer integriramo po y. (vidi sliku 1.1)

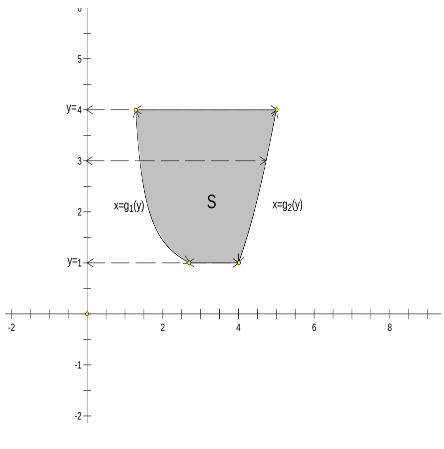


Slika 1: U području S, x se mijenja od 2 do 9 a za fiksan x, y se mijenja od $g_1(x)$ do $g_2(x)$.

2) Područje integracije S omeđeno je odozgo i odozdo pravcima $y = d$ i $y = c$, $(c \leq d)$, a slijeva i zdesna neprekidnim krivuljama $x = g_1(y)$ i $x = g_2(y)$, $(g_1(y) \leq g_2(y))$. Ovdje se y mijenja od c do d a x od $g_1(y)$ do $g_2(y)$. Integral $\iint_{(S)} f(x,y)dxdy$ sada možemo prikazati kao:

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx$$

i tu veličinu y u integralu $\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx$ smatramo konstantnom.



Slika 2: U području S, y se mijenja od 1 do 4 a za fiksan y, x se mijenja od $g_1(y)$ do $g_2(y)$.

Svako područje integracije nastojimo razdijeliti na područja gornjih dvaju tipova.

Primjer 1 Izračunajte višestruki integral: $\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2+2y)dx$.

Rješenje: Imamo:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2+2y)dx &= \text{u unutarnjem integralu } y \text{ je konstanta } = \\
&= \int_0^2 \left(\left(\frac{x^3}{3} + 2xy \right) \Big|_0^1 \right) dy = \\
&= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} + 2y \right) dy = \left(\frac{y}{3} + y^2 \Big|_0^2 \right) = \frac{2}{3} + 4 = \frac{14}{3}
\end{aligned}$$

Primjer 2 Izračunajte dvostruki integral: $\int_{-3}^3 dy \int_{y^2-4}^5 (x+2y)dx$.

Rješenje: Imamo:

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^3 dy \int_{y^2-4}^5 (x+2y)dx &= \text{u unutarnjem integralu } y \text{ je konstanta } = \\
&= \int_{-3}^3 \left(\left(\frac{x^2}{2} + 2xy \right) \Big|_{y^2-4}^5 \right) dy = \\
&= \int_{-3}^3 \left(\frac{25}{2} + 10y - \frac{(y^2-4)^2}{2} - 2(y^2-4)y \right) dy = \\
&= \left(\frac{25}{2}y + 5y^2 - \frac{y^5}{10} + \frac{4}{3}y^3 - 8y - \frac{y^4}{2} + 4y^2 \right) \Big|_{-3}^3 = \ldots = \frac{504}{10}
\end{aligned}$$

Primjer 3 Riješite integral: $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a \sin\varphi}^a r dr$.

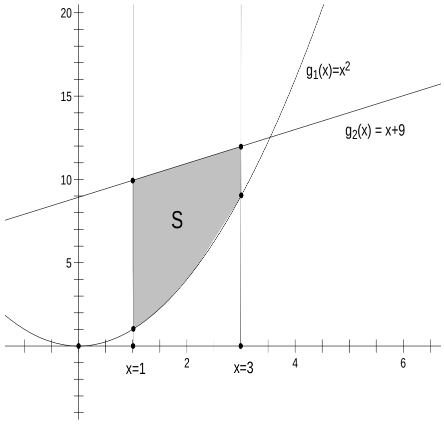
Rješenje: Imamo:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a\sin\varphi}^a r dr &= \text{u unutarnjem integralu } \varphi \text{ je konstanta } = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} \Big|_{a \sin\varphi}^a \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2 \sin^2\varphi}{2} \right) d\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} \frac{1-\cos(2\varphi)}{2} \right) d\varphi = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = \\
&= \frac{a^2\pi}{2}
\end{aligned}$$

U slijedećim zadacima treba napisati krivulje koje omeđuju područje S po kojem se integrira i nacrtati to područje u koordinatnoj ravnini.

1) $\int_1^3 dx \int_{x^2}^{x+9} f(x,y)dy$

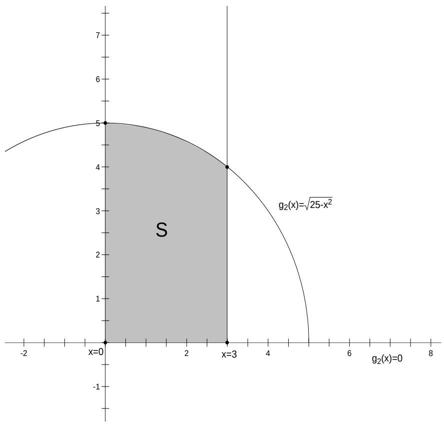
   Rješenje: Područje integracije omeđeno je slijeva i zdesna pravcima $x = 1$ i $x = 3$ a odozdo i odozgo krivuljama $g_1(x) = x^2$ i $g_2(x) = x + 9$.



Slika 3: U području S, x se mijenja od 1 do 3 a za fiksan x, y se mijenja od $g_1(x) = x^2$ do $g_2(x) = x + 9$.

2) $\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y)dy$.

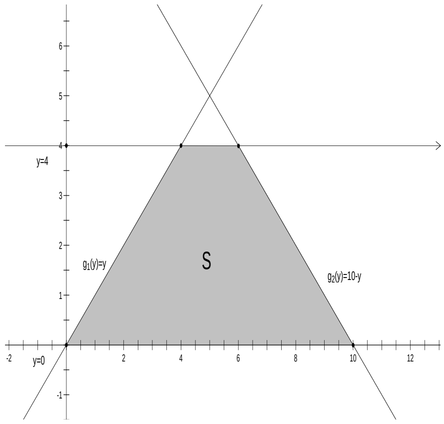
Rješenje: Područje integracije omeđeno je slijeva i zdesna pravcima $x = 0$ i $x = 3$ a odozdo i odozgo krivuljama $g_1(x) = 0$ i $g_2(x) = \sqrt{25 - x^2}$.



Slika 4: U području S, x se mijenja od 0 do 3 a za fiksan x, y se mijenja od $g_1(x) = 0$ do $g_2(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

3) $\int_0^4 dy \int_y^{10-y} f(x, y)dx$.

Rješenje: Ovo je integral drugog tipa, područje integracije omeđeno je odozdo i odozgo pravcima $y = 0$ i $y = 4$, a slijeva i sdesna krivuljama (također pravcima) $g_1(y) = y$ i $g_2(y) = 10 - y$.



Slika 5: U području S, y se mijenja od 0 do 4 a za fiksan y, x se mijenja od $g_1(y) = y$ do $g_2(y) = 10 - y$.

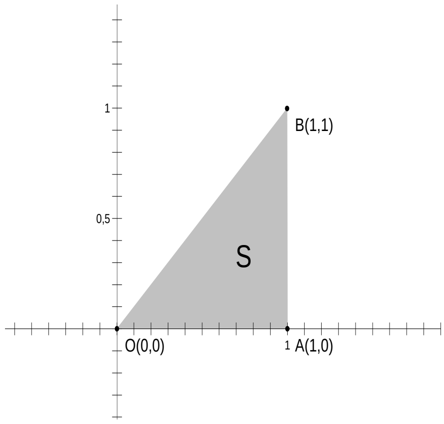
Zadatak 1 Odredite granice integracije u oba poretka za dvostruki integral

$$\iint_{(S)} f(x, y) dx dy$$

ako je:

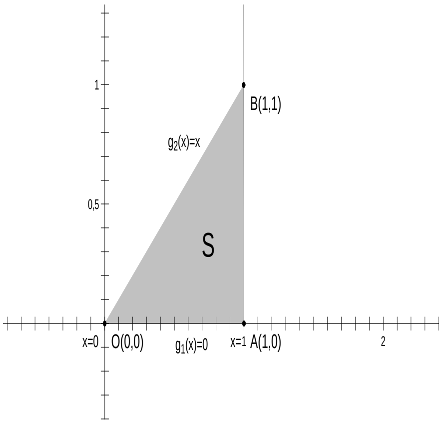
1) S trokut s vrhovima $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ i $B(1, 1)$.

   Rješenje: Prvo skiciramo područje integracije kako bismo lakše odredili granice:



Slika 6: Trokut sa vrhovima $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ i $B(1, 1)$.

Radimo prvo integraciju prvog tipa, x očito ide od 0 do 1. Da bismo odredili kako se mijenja y za fiksni x treba nam samo jednadžba pravca kroz točke O i B koji čini gornju granicu integracije (donja granica je, jasno, $g_1(x) = 0$).

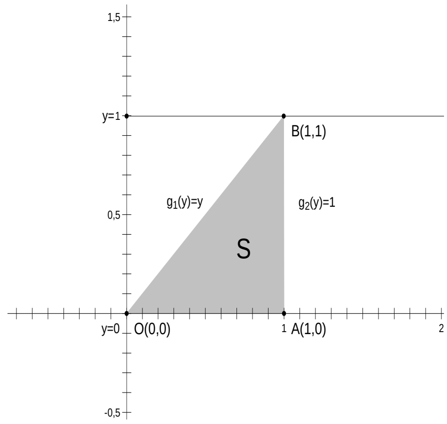


Slika 7: Jednadžbe krivulja za integraciju prvog tipa.

Jednadžba pravca glasi $y = x$ pa imamo da je $g_2(x) = x$ i konačno:

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy.$$

Sada mijenjamo poredak integracije, odnosno prelazimo na integral drugog tipa. Iz slike je vidljivo da y također ide od 0 do 1 a da bi odredili granice od x za fiksni y, treba nam pravac kroz točke 0 i B koji čini lijevu među. Jednadžba tog pravca glasi (sada je y fiksiran, prisjetimo se) $x = y$ pa je $g_1(y) = y$. Desna granica je, očito, pravac $x = 1$ tj. konstantna funkcija $g_2(y) = 1$.



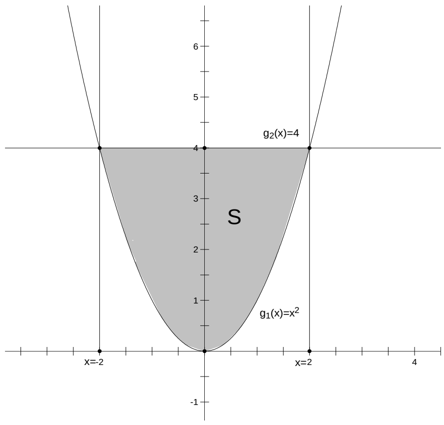
Slika 8: Jednadžbe krivulja za integraciju drugog tipa.

Dakle, imamo:

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y)dx.$$

2) S odsječak parabole $y = x^2$ omeđen tom parabolom i pravcem $y = 4$.

Rješenje: Skiciramo područje S i unosimo potrebne podatke za integraciju prvog tipa:

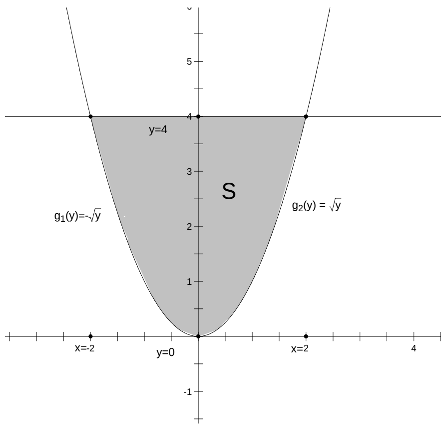


Slika 9: Područje S. Vidljivo je da x ide od -2 do 2, a da se y pri tome mijenja od $g_1(x) = x^2$ (donja granica), do $g_2(x) = 4$ (gornja granica).

Na slici je vidljivo da x ide od -2 do 2 a y je za fiksni x ograničen krivuljama $g_1(x) = x^2$ i $g_2(x) = 4$. Stoga imamo:

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} f(x,y)dy.$$

Gledamo drugi poredak integracije, sada se prvo mijenja y od 0 do 4, a onda za fiksni y, integriramo po x-u od $-\sqrt{y}$ do $\sqrt{y}$.



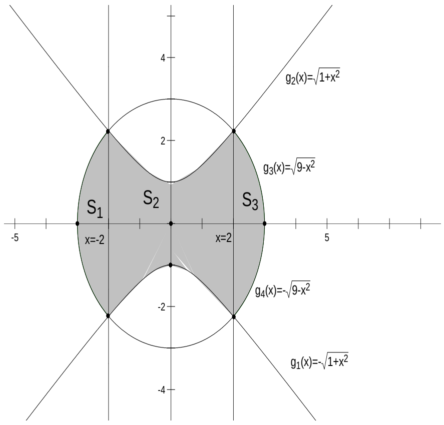
Slika 10: Područje S. Sada y ide od 0 do 4, a x se pri tome mijenja od $g_1(y) = -\sqrt{y}$ (donja granica), do $g_2(y) = \sqrt{y}$ (gornja granica).

Imamo:

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$$

3) S područje omeđeno hiperbolom $y^2 - x^2 = 1$ i kružnicom $x^2 + y^2 = 9$ (ima se u vidu područje koje sadrži ishodište koordinatnog sustava).

Rješenje: Skiciramo područje s podacima za integraciju prvog tipa i pri tome uzimamo u obzir da se naše krivulje sijeku u točkama $(2, \sqrt{5})$, $(2, -\sqrt{5})$, $(-2, \sqrt{5})$, $(-2, -\sqrt{5})$ što se lagano dobije izjednačavanjem jednadžbi $y^2 = 1 + x^2$ i $y^2 = 9 - x^2$. Sada primjećujemo da se područje S mora razbiti na tri područja prvog tipa, S_1, S_2 i S_3. Integriramo po sva tri područja i rezultat zbrajamo.



Slika 11: Područje S sastoji se od tri područja prvog tipa S_1, S_2 i S_3 pa integriramo po svakom od njih i rezultat je zbroj tih integrala.

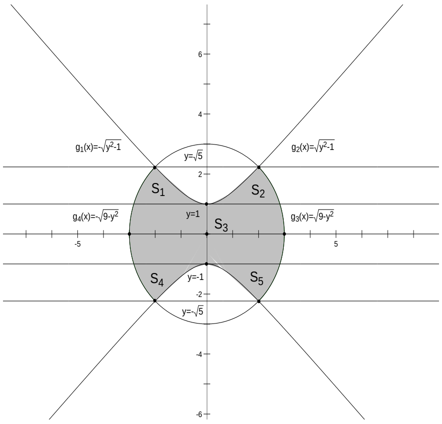
Dakle, imamo:

$$\begin{aligned}
\iint_{(S)} f(x,y)dxdy &= \iint_{(S_1)} f(x,y)dxdy + \iint_{(S_2)} f(x,y)dxdy + \iint_{(S_3)} f(x,y)dxdy = \\
&= \int_{-3}^{-2} dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)dy + \\
&+ \int_2^3 dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy.
\end{aligned}$$

Za integraciju drugog tipa imamo sliku:

Kao i u gornjem primjeru, područje S raspada se na pet područja drugog tipa, pa integiramo po svakom od tih područja i rezultat je zbroj tih integrala:

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \iint_{(S_1)} f(x,y)dxdy + \iint_{(S_2)} f(x,y)dxdy + \iint_{(S_3)} f(x,y)dxdy +$$



Slika 12: Područje S sastoji se od pet područja drugog tipa.

$$
\begin{aligned}
&+ \iint_{(S_4)} f(x,y)dxdy + \iint_{(S_5)} f(x,y)dxdy = \\
&= \int_1^{\sqrt{5}} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x,y)dx + \int_1^{\sqrt{5}} \int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)dx + \\
&+ \int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)dy + \int_{-\sqrt{5}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x,y)dx + \\
&+ \int_{-\sqrt{5}}^{-1} \int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)dx
\end{aligned}
$$

Zadatak 2 Promijenite poredak integriranja u slijedećim dvostrukim integralima:

1) $\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x,y)dy$,

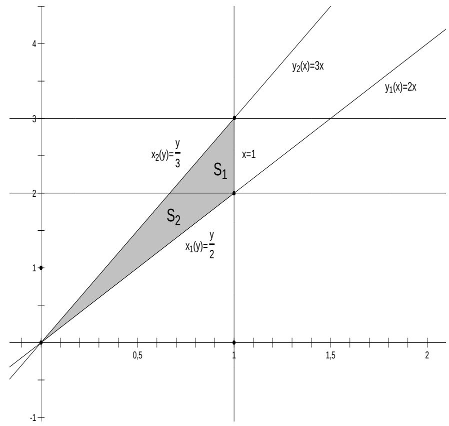
2) $\int_{-\sqrt{2}}^{1} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$,

3) $\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy$.

Rješenje:

1) Skiciramo područje integracije, x ide od 0 do 1, a za fiksni x, y se mijenja od $2x$ do $3x$.

   Ako sada promijenimo poredak integracije, dakle, integriramo prvo po y, a onda po x, slika pokazuje da područje S treba razbiti na dva osnovna područja za integraciju drugog tipa.

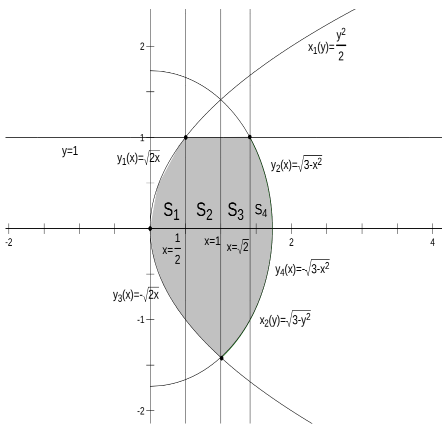


Slika 13: Područje integracije.

Stoga imamo:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x,y)dy &= \iint_{(S_1)} f(x,y)dydx + \iint_{(S_2)} f(x,y)dydx = \\
&= \int_2^3 dy \int_{\frac{y}{3}}^{1} f(x,y)dx + \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx.
\end{aligned}
$$

2) Crtamo područje integracije:



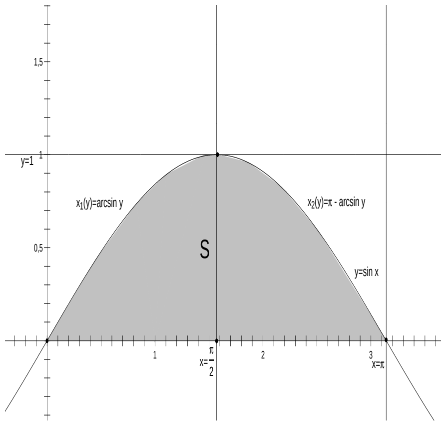
Slika 14: Područje integracije.

Sada vidimo da u obrnutom poretku integriranja ponovno moramo razbijati područje na četiri osnovna dijela pa redom imamo:

$$
\int_{-\sqrt{2}}^{1} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)dy + \int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_{-\sqrt{2x}}^{1} +
$$

$$+ \int_{1}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{1} f(x,y)dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}$$

3) Prikazujemo područje u koordinatnoj ravnini:



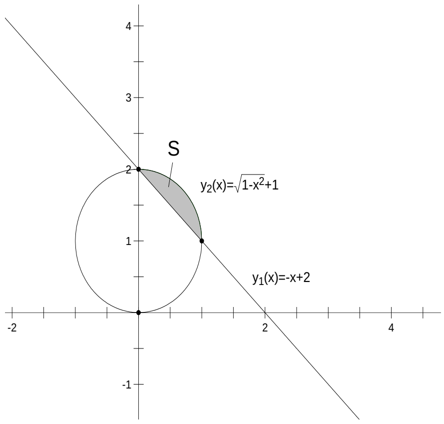
Slika 15: Područje integracije.

Vidimo da, pri promijeni poretka integracije, ponovno imamo samo jedno osnovno područje S pa je:

$$\int_{0}^{\pi} dx \int_{0}^{\sin x} f(x,y)dy \quad = \quad \int_{0}^{1} dy \int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)dx.$$

Zadatak 3 Izračunajte dvostruki integral $\iint_{(S)} xdxdy$ gdje je S područje omeđeno pravcem koji prolazi točkama $A(2,0)$, $B(0,2)$ i lukom kružnice $x^2+(y-1)^2=1$.

Rješenje: Jednadžba pravca koji prolazi točkama A i B glasi: $y=-x+2$. Crtamo sliku:



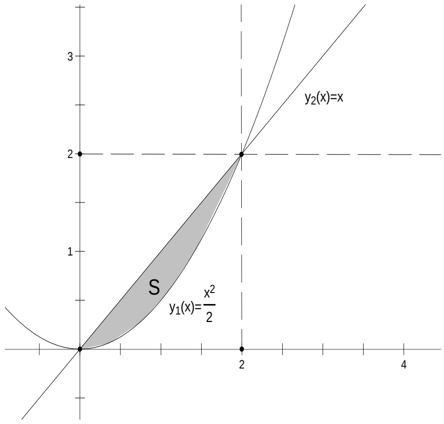
Slika 16: Područje integracije.

Možemo primjeniti bilo koji tip integracije, mi ćemo riješiti zadatak pomoću prvog. Pravac i kružnica sijeku se u točkama $(0, 2)$ i $(1, 1)$. To se lako dobije rješavanjem jednadžbe $x^2+(-x+1)^2 = 1$ koja se dobije uvrštavanjem jednadžbe pravca $y = -x + 2$ u jednadžbu kružnice $x^2 + (y - 1)^2 = 1$. Sada je sa slike vidljivo da imamo:

$$\begin{aligned}\iint_{(S)} xdxdy &= \int_0^1 dx \int_{-x+2}^{\sqrt{1-x^2}+1} xdy = \int_0^1 \left(xy\Big|_{-x+2}^{\sqrt{1-x^2}+1} \right) dx \\ &= \int_0^1 (x(\sqrt{1-x^2}+1) - x(-x+2))dx = \int_0^1 (x\sqrt{1-x^2} + x^2 - x)dx = \\ &= \left(-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Zadatak 4 Izračunajte dvostruki integral $\iint_{(S)} \frac{x}{x^2+y^2} dxdy$ gdje je S područje omeđeno parabolom $y = \frac{x^2}{2}$ i pravcem $y = x$.

Rješenje: Skiciramo područje integracije:



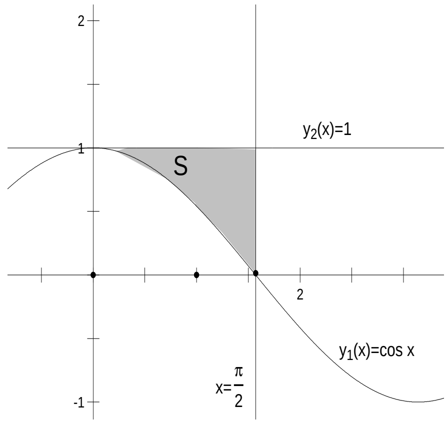
Slika 17: Područje integracije.

Zadane krivulje sijeku se u točkama $(0,0)$ i $(2,2)$ što je vidljivo sa slike, a lagano se dobije riješavanjem jednadžbe $x = \frac{x^2}{2}$. Koristeći integraciju prvog tipa, dobivamo:

$$\begin{aligned}
\iint_{(S)} \frac{x}{x^2+y^2}dxdy &= \int_0^2 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{x} \frac{x}{x^2+y^2}dy = \int_0^2 \left(\arctan \frac{y}{x}\Big|_{\frac{x^2}{2}}^{x}\right) dx = \\
&= \int_0^2 \left(\arctan 1 - \arctan \frac{x}{2}\right) dx = \int_0^2 \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{2}\right) dx = \\
&= \left(\frac{\pi}{4}x - x\arctan\frac{x}{2} + \ln\left(4+x^2\right)\right)\Big|_0^2 = \ln 2
\end{aligned}$$

Zadatak 5 Izračunajte dvostruki integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\cos x}^{1} y^4 dy$ i nacrtajte područje integracije.

Rješenje: Prvo crtamo područje integracije:



Slika 18: Područje integracije.

a zatim rješavamo integral:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\cos x}^{1} y^4 dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{y^5}{5}\Big|_{\cos x}^{1} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5}(1-\cos^5 x)dx = \frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-(1-\sin^2 x)^2 \cos x)dx = \\
&= \frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x + 2\sin^2 x \cos x - \sin^4 x \cos x)dx = \\
&= \frac{1}{5}\left(x - \sin x + \frac{2}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{15\pi - 16}{150}
\end{aligned}$$

0.2 Dvostruki integral u polarnim koordinatama

Prisjetimo se veze između polarnih i pravokutnih koordinata:

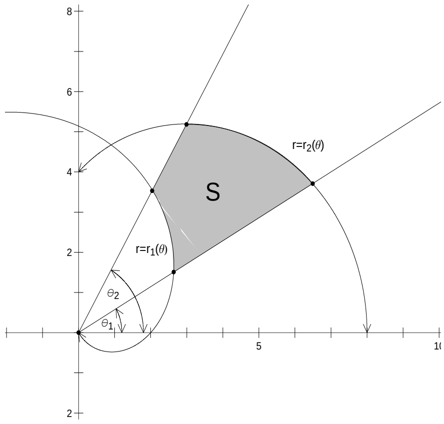
$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Za dvostruki integral vrijedi sljedeća formula:

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \iint_{(S)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi.$$

Područje S sada mora imati granice po r i po φ. Tu primjenjujemo sljedeće pravilo: ako je područje integracije S omeđeno zrakama $\varphi = \alpha$ i $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ te krivuljama $r = r_1(\varphi)$ i $r = r_2(\varphi)$ $(r_1(\varphi) \leq r_2(\varphi))$, onda dvostruki integral računamo po formuli:

$$\iint_{(S)} f(r,\varphi) r dr d\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r,\varphi) r dr.$$



Slika 19: Osnovno područje integracije u polarnim koordinatama.

Ako S nema taj oblik, onda ga, kao i kod pravokutnih koordinata, moramo razdijeliti na područja takvog oblika.

Primjer 4 Transformirajte sljedeće integrale u integrale s polarnim koordinatama pazeći pri tome na promjene granica integriranja.

1) $\int_0^2 dx \int_0^x f(x,y)dy$,

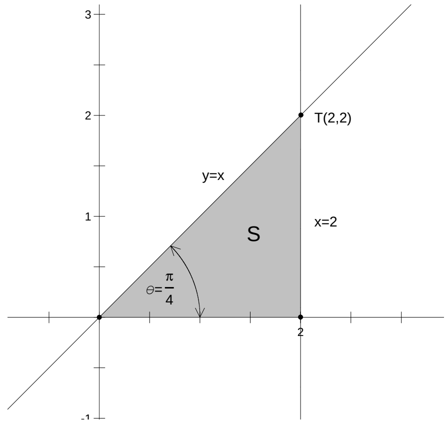
2) $\iint_{(S)} f(x^2+y^2)dxdy$,
gdje je S područje omeđeno pravcima $y=x$, $y=-x$ i $y=1$.

3) $\iint_{(S)} f(x,y)dxdy$,
gdje je S područje omeđeno lemniskatom

$$(x^2+y^2)^2 = 4(x^2-y^2).$$

Rješenje:

1) Prvo moramo skicirati područje integracije i odrediti njegove granice u polarnim koordinatama. Jednažba pravca $x=2$ u polarnim koordinatama glasi: $r\cos\theta = 2$ tj. $r=\frac{2}{\cos\theta}$, $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$. Zraka $y=x$, $x\geq 0$, glasi $\theta=\frac{\pi}{4}$ jer sve točke na tom pravcu imaju taj kut. Dakle, imamo:

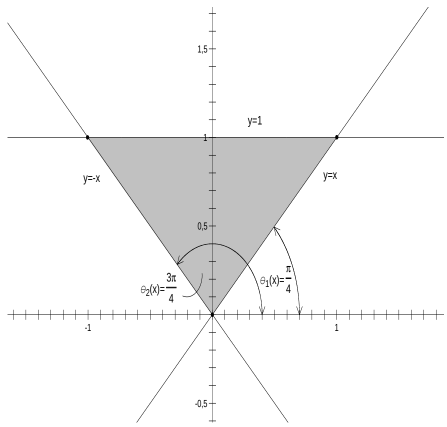


Slika 20: Područje integracije.

Sada je vidljivo da, u polarnim koordintama, θ ide od 0 do $\frac{\pi}{4}$, a, za fiksni *theta*, r se mijenja od 0 do $\frac{2}{\cos\theta}$. Stoga je:

$$\int_0^2 dx \int_0^x f(x,y)dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{2}{\cos\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr.$$

2) Crtamo područje integracije:



Slika 21: Područje integracije.

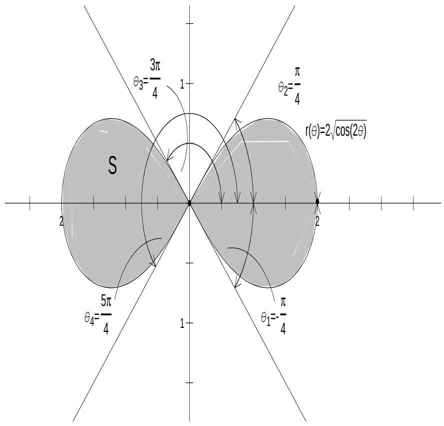
Kut θ se očito mijenja od $\frac{\pi}{4}$ do $\frac{3\pi}{4}$, a radijus r od 0 do $\frac{1}{\sin\theta}$, $0 < \theta < \pi$, što je i jednadžba pravca $y = 1$ u polarnim koordinatama. Ako još primjetimo da je $f(x^2+y^2) = f(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta) = f(r^2)$ u polarnim koordinatama, onda imamo:

$$\iint_{(S)} f(x^2+y^2)dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} f(r^2)rdr.$$

3) Tražimo jednadžbu lemniskate $(x^2+y^2)^2 = 4(x^2-y^2)$ u polarnim koordinatama. Znamo da je $x = r\cos\theta$ i $y = r\sin\theta$ pa to uvrštavamo u zadanu jednadžbu i dobivamo:

$$\begin{aligned}
(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)^2 &= 4(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta) \\
\Rightarrow \quad r^4 &= 4r^2(2\cos^2\theta - 1) \qquad /r^2 \\
\Rightarrow \quad r^2 &= 4(\cos(2\theta) \\
\Rightarrow \quad r &= 2\sqrt{\cos(2\theta)}
\end{aligned}$$

Crtamo područje:



Slika 22: Područje integracije.

Vidljivo je da se kut θ mijenja od $-\frac{\pi}{4}$ do $\frac{\pi}{4}$ i od $\frac{3\pi}{4}$ do $\frac{5\pi}{4}$ (što dobivamo rješavajući jednadžbu $r = \cos(2\theta) \geq 0$). Za fiksni θ, r se mijenja od 0 do $2\sqrt{\cos(2\theta)}$. Stoga imamo:

$$\iint_{(S)} f(x,y)dxdy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\sqrt{\cos(2\theta)}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_0^{2\sqrt{\cos(2\theta)}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

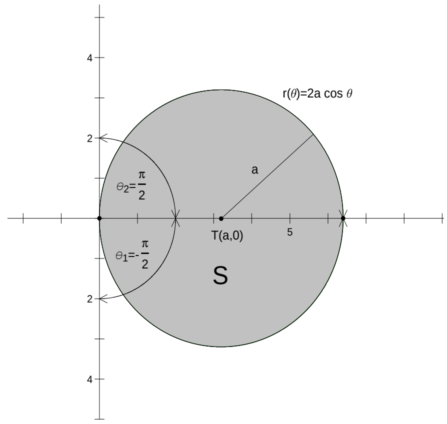
Zadatak 6 Prijelazom na polarne koordinate izračunajte dvostruki integral

$$\iint_{(S)} \sqrt{x^2+y^2} dxdy$$

ako je S područje omeđeno kružnicom $x^2+y^2 = 2ax$ gdje je $a > 0$.

Rješenje: Svodimo na puni kvadrat izraz $x^2+y^2 = 2ax$ i dobivamo $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ iz čega je odmah vidljivo da se zaista radi o kružnici sa središtem u $T(a,0)$ radijusa a. Tražimo njenu jednadžbu u polarnim koordinatama:

$$\begin{aligned}
r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta &= 2ar\cos\theta \\
\Rightarrow \quad r^2 &= 2ar\cos\theta \quad / \\
\Rightarrow \quad r &= 2a\cos\theta
\end{aligned}$$



Slika 23: Područje integracije.

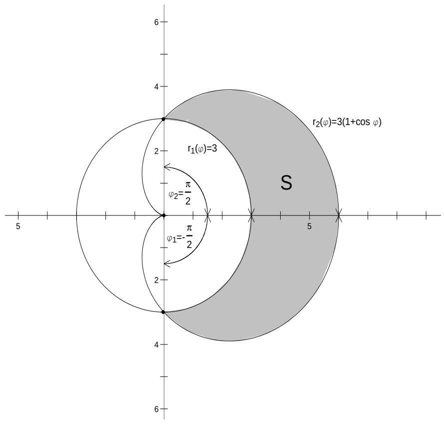
Sada crtamo tu kružnicu:

Kut θ mijenja se od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$, a za fiksni θ, r ide od 0 do $2a\cos\theta$, pa imamo:

$$\begin{aligned}
\iint_{(S)} \sqrt{x^2+y^2}dxdy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} r\cdot rdr \quad (\text{jer } \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{r^2}=r) \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^{2a\cos\theta} \right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\left(8a^3\cos^3\theta\right) d\theta = \frac{8a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)\cos\theta d\theta = \\
&= \frac{8a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta - \frac{8a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos\theta d\theta = \\
&= \frac{8a^3}{3}\left(\sin\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) - \frac{8a^3}{9}\left(\sin^3\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{32a^3}{9}
\end{aligned}$$

Zadatak 7 Izračunajte dvostruki integral funkcije $f(r,\varphi) = r$ u području omeđenom kardioidom $r = 3(1+\cos\varphi)$ i kružnicom $r = 3$ (misli se na područje koje ne sadrži ishodište).

Rješenje: Krivulje koje omeđuju područje integracije već su zadane u polarnim koordinatama pa možemo odmah crtati sliku:



Slika 24: Područje integracije.

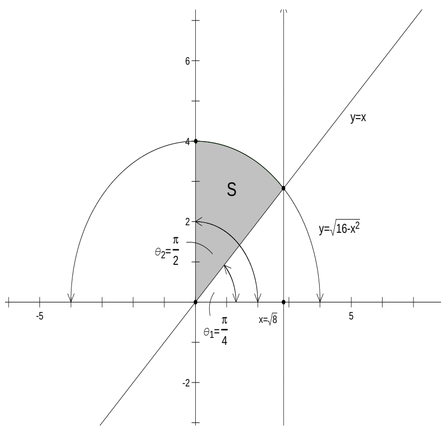
Sada imamo:

$$\begin{aligned}\iint_{(S)} f(r,\varphi) r dr d\varphi &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{3}^{3(1+\cos\varphi)} r\cdot r dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^3}{3}\Big|_3^{3(1+\cos\varphi)} \right) d\varphi = \\ &= 9\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ((1+\cos\varphi)^3 - 1) d\varphi = \ldots = 66 + 27\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Zadatak 8 Prijelazom na polarne koordinate izračunajte :

$$\int_0^{2\sqrt{2}} dx \int_x^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy.$$

Rješenje: Iz integrala vidimo da se x mijenja od 0 do $2\sqrt{2}$, a za fiksni x, y ide od 0 do $\sqrt{16-x^2}$. Prema tome, radi se o sljedećem području:



Slika 25: Područje integracije.

Ako pogledamo područje u polarnim koordinatama, vidimo da se θ mijenja od $\frac{\pi}{4}$ do $\frac{\pi}{2}$ a za fiksno θ, r ide od 0 do 4 jer je jednadžba kružnice $x^2+y^2=16$ u polarnim koordinatama glasi $r=4$. Stoga imamo:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\sqrt{2}} dx \int_x^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^4 \sqrt{r^2} r dr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^4 r^2 dr = \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^4 \right) d\theta = \frac{64}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{16}{3}\pi\end{aligned}$$

0.3 Izračunavanje površina likova

1) **Površina u pravokutnim koordinatama:** površina područja S dana je formulom:

$$P_S = \iint_{(S)} dxdy$$

što se, ako je S definirano nejednadžbama $a \le x \le b$, $f_1(x) \le y \le f_2(x)$, svodi na dvostruki integral:

$$P_S = \iint_{(S)} dxdy = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy.$$

Primjetimo da je:

$$\int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy \quad = \quad \int_a^b \left(y\Big|_{f_1(x)}^{f_2(x)} \right) = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

što je formula za površinu (omeđenu krivuljama $x = a, x = b$ i $y = f_1(x), y = f_2(x)$) koju znamo otprije (vidi poglavlje određeni integral).

2) **Površina u polarnim koordinatama:** površina područja S dana je formulom:

$$P_S = \iint_{(S)} rdrd\theta,$$

što se, ako je S definirano nejednadžbama $\alpha \le \theta \le \beta$, $r_1(\theta) \le r_2(\theta)$, svodi na polarni integral:

$$P_S = \iint_{(S)} rdrd\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} rdr.$$

Primjer 5 Skicirajte područja kojima su površine izražene integralima:

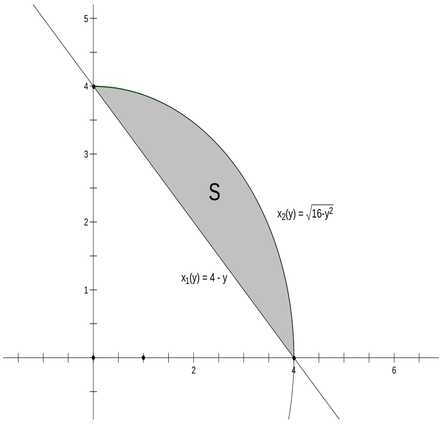
1) $\int_0^4 dy \int_{4-y}^{\sqrt{16-y^2}} dx$,

2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} d\varphi \int_0^{\frac{3}{\cos\varphi}} rdr$

Izračunajte te površine.

Rješenje:

1) Vidimo da se y mijenja od 0 do 4, a x (za fiksno y) od $4-y$ do $\sqrt{16-y^2}$. Dakle, imamo:

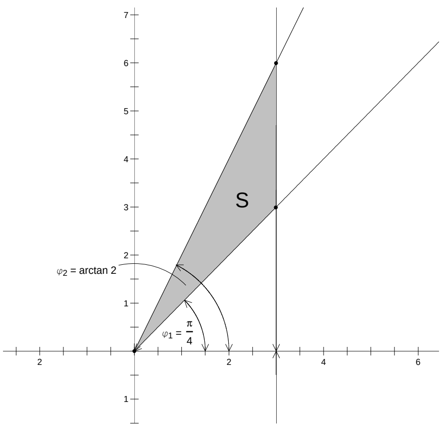


Slika 26: Područje integracije.

Sada je površina:

$$\begin{aligned}\int_0^4 dy\int_{4-y}^{\sqrt{16-y^2}} dx &= \int_0^4 \left(x\Big|_{4-y}^{\sqrt{16-y^2}} \right) dy = \int_0^4 (\sqrt{16-y^2} - 4 + y) dy = \\ &= \frac{y}{2}\sqrt{16-y^2} + 8\arcsin\frac{y}{4} - 4y + \frac{y^2}{2}\Big|_0^4 = 4\pi - 8\end{aligned}$$

2) Ovdje se kut mijenja od $\frac{\pi}{4}$ do $\arctan 2$, a za fiksni kut, radijus ide od 0 do $\frac{3}{\cos\varphi}$. Crtamo to područje:



Slika 27: Područje integracije.

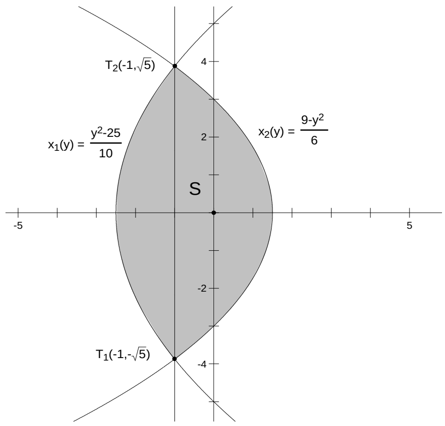
Još ostaje izračunati integral:

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} d\varphi\int_0^{\frac{3}{\cos\varphi}} rdr &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2}\left(\frac{r^2}{2}\Big|_0^{\frac{3}{\cos\varphi}}\right) d\varphi = \frac{9}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \\ &= \frac{9}{2}\left(\tan\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2}\right) = \frac{9}{2}\end{aligned}$$

Zadatak 9 Nađite površinu omeđenu parabolama:

$$y^2 = 10x + 25 \qquad \text{i} \qquad y^2 = -6x + 9.$$

Rješenje: Da bi znali nacrtati traženu površinu, prvo trebamo odrediti presjek danih krivulja. Rješavajući jednadžbu $10x + 25 = -6x + 9)$ odmah vidimo su jedine točke presjeka $T_1(-1, \sqrt{15})$ i $T_2(-1, -\sqrt{15})$. Sada imamo:



Slika 28: Područje integracije.

Sa slike vidimo da je bolje integrirati prvo po y, a onda po x, jer tako ne moramo razbijati područje na dva komada. Računamo površinu od S:

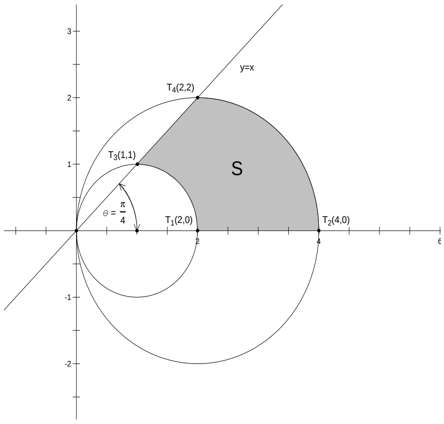
$$P_S = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} dy \int_{\frac{y^2-25}{10}}^{\frac{9-y^2}{6}} dx \quad = \quad \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} \left(x \Big|_{\frac{y^2-25}{10}}^{\frac{9-y^2}{6}} \right) dy = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} \left(\frac{9-y^2}{6} + \frac{25-y^2}{10} \right) dy =$$

$$= \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} \frac{60-4y^2}{15} dy = \ldots = \frac{16}{3}\sqrt{15}$$

Zadatak 10 Prelaskom napolarne koordinate nađite površinu omeđenu krivuljama:

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 4x, \quad y = x \quad \text{i} \quad y = 0.$$

Rješenje: Svođenjem na puni kvadrat jasno je da su prve dvije krivulje kružnice i to redom: $(x-1)^2 + y^2 = 1$, i $(x-2)^2 + y^2 = 4$. Crtamo krivulje i nalazimo točke presjeka te dobivamo:



Slika 29: Područje integracije.

Trebaju nam jednadžbe kružnica u polarnim koordinatama. Veća kružnica glasi:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4x \quad \Rightarrow \\ r_1^2 &= 4r_1 \cos\theta \quad \Rightarrow \\ r_1 &= 4\cos\theta. \end{aligned}$$

Analogno tome, za manju kružnicu dobivamo:

$$r_2 = 2\cos\theta.$$

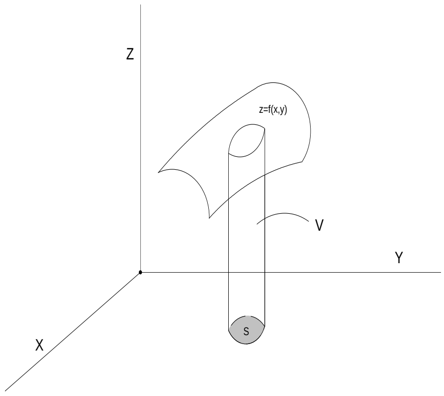
Kako kut ide od 0 do $\frac{\pi}{4}$ (jer je kut pravca $y = x$ sa x-osi upravo $\frac{\pi}{4}$), dobivamo za površinu od S:

$$\begin{aligned} P_S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} r dr &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{r^2}{2}\Big|_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} \right) d\theta = \\ &= 6\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta d\theta = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos(2\theta))d\theta = \\ &= 3\left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

0.4 Računanje volumena tijela

Volumen cilindroida koji je omeđen odozgo plohom $f(x, y)$, odozdo ravninom $z = 0$ i koji u toj ravnini izrezuje omeđeno područje S (vidi sliku), dan je sa:

$$V = \iint_{(S)} f(x, y)dxdy.$$



Slika 30: Cilindroid sa bazom S.

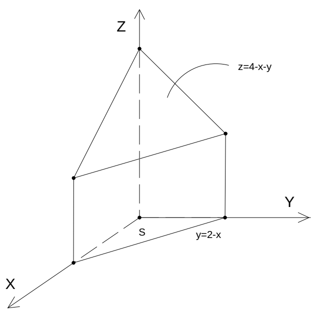
Zadatak 11 Nacrtajte tijela kojima su volumeni izraženi dvostrukim integralom:

a) $\int_0^2 dx \int_0^{2-x} (4-x-y)dy$,

b) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}dy$.

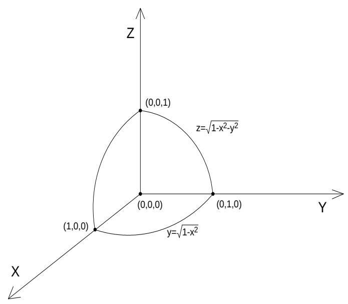
Rješenje:

a) Vidimo da je u pitanju cilindroid odozgo omeđen sa ravninom $z = 4-x-y$ i sa bazom u obliku trokuta u $z = 0$ ravini kojem je jedna stranica x-os od 0 do 2, druga y-os od 0 do 2 (tu pravac $y = 2-x$ siječe y-os) a treća pravac $y = 2-x$. Crtamo sliku:



Slika 31: Cilindroid sa trokutastom bazom omeđen ravninom $z = 4-x-y$.

b) Ovdje je baza prva četvrtina kruga $x^2 + y^2 = 1$. To slijedi iz činjenice da x ide od 0 do 1, a y od 0 do $\sqrt{1-x^2}$. Ako pogledamo gornju među cilindroida, plohu $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, vidimo da se radi o jediničnoj sferi. Dakle, u pitanju je jedan osmina sfere i to ona koja se nalazi u prostornom kvadrantu u kojem su i x i y i z pozitivni.



Slika 32: Osmina sfere u oktantu gdje su sve koordinate pozitivne.

Zadatak 12 Nađite volumen tijela omeđenog eliptičkim paraboloidom $z = 2x^2 + y^2 + 1$, ravninom $x + y = 1$ i koordinatnim ravninama.

Rješenje: Gornja granica je zadani paraboloid, a omeđenost koordinatnim ravninama i ravninom $x+y=1$ (koja je okomita na ravninu $z=0$) nam govori da je baza trokut koji čine pravci $x=0$, $y=0$ i $x+y=1$ u $z=0$ ravnini. Vrhovi tog trokuta su ishodište, $(1,0,0)$, i $(0,1,0)$. Stoga imamo:

$$\begin{aligned} V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (2x^2 + y^2 + 1) dy &= \int_0^1 \left(2x^2 y + \frac{y^3}{3} + y \right) \Big|_0^{1-x} dx = \\ &= \int_0^1 \left(2x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3} + 1 - x \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(3x^2 - \frac{7}{3}x^3 - 2x + \frac{4}{3} \right) dx = \left(x^3 - \frac{7}{12}x^4 - x^2 + \frac{4}{3}x \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Zadatak 13 Tijelo je omeđeno cilindrom $x^2 + z^2 = 1$ i ravninama $y = 0$, $x = 0$, $z = 0$, $y = x$. Nađite njegov volumen.

Rješenje: Vidimo da u jednadžbi valjka nema koordinate y. To znači da je za svako $y = const$ presjek valjka s tom ravninom krug $x^2 + y^2 \leq 1$ pa zaključujemo da je to valjak duž osi y. Ravnine $y = 0$ i $y = x$ govore nam da po y integriramo od 0 do x. Da bi našli granice za x, treba provjeriti gdje valjak siječe ravninu $z = 0$. To je očito u točkama ± 1. Jer je $x = 0$ međa, vidimo da treba uzeti jednu vrijednost, npr. onu pozitivnu, tj. $x = 1$. Još ostaje primjetiti da za z treba uzeti $z(x,y) = \sqrt{1-x^2}$. Sve skupa

$$V = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{1-x^2} dy = \int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2} y \Big|_0^x \right) dx =$$

$$= \int_0^1 (\sqrt{1-x^2}x)dx = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Obične diferencijalne jednadžbe

Uvodni pojmovi

Diferencijalne jednadžbe su jednadžbe oblika:

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

(ovdje je $y = y(x)$), dakle one koje sadrže osim same funkcije $y(x)$ i njezine derivacije.

Primjer 1 Dane su diferencijalne jednadžbe prvog, drugog i četvrtog reda:

a) $y' + 2xy - y^3 = 0,$

b) $xy'' + \frac{x}{\ln y} - 2\sin x = 0,$

c) $y^{(4)} - 2y'' + \sqrt{y + 3x} = 0.$

Iz primjera je jasno da je red diferencijalne jednadžbe jednak najvećem stupnju derivacije koja se u jednadžbi pojavljuje. Neka funkcija predstavlja rješenje diferencijalne jednadžbe ako ju zadovoljava, tj. ako kad uvrstimo odgvarajuće parametre s lijeve strane (1) s desne zaista dobijemo nulu.

Primjer 2 Provjerite da je funkcija $y(x) = 5x^2$ rješenje sljedeće diferencijalne jednadžbe: $xy' = 2y$.

Rješenje: Imamo $xy' - 2y = 0$. U našem primjeru je $y'(x) = 10x$. Sada uvrštavamo naše funkcije u jednadžbu:

$$xy' - 2y = x \cdot 10x - 2 \cdot 5x^2 = 10x^2 - 10x^2 = 0$$

pa je $y = 5x^2$ zaista rješenje dane dif. jednadžbe.

Zadatak 1 Provjerite da li su navedene funkcije rješenja zadanih dif. jednadžbi:

a) $y'' = y^2 + x^2$, $y(x) = \frac{1}{x}$,

b) $y'' + y = 0$, $y(x) = 3\sin x - 4\cos x$,

c) $y'' - 2y' + y = 0$, $y_1(x) = xe^x$, $y_2(x) = x^2e^x$

d) $(x + y)dx + xdy = 0$, $y(x) = \frac{C^2 - x^2}{2x}$

Napomena: Kao i uvijek, vrijedi $y' = \frac{dy}{dx}$ i to tako shvaćamo pa je npr $y' + x^2 = y$ isto što i $dy + x^2dx = ydx$.

Ako je zadana neka diferencijalna jednadžba, grafove njenih rješenja nazivamo **integralnim krivuljama**. Ponekad su zadane porodice krivulja i zanima nas koja je njihova pripadna dif. jednadžba. Nju nalazimo tako da jednadžbu zadane porodice deriviramo dok ne dođemo u mogućnost konstante izrazimo preko $x, y, y', y'', \ldots$ i time jednadžba familije krivulja postane oblika (1). Dakle, moramo derivirati onoliko puta koliko imamo nezavisnih konstanti.

Primjer 3 Nađite diferencijalnu jednadžbu porodice parabola zadane s $y(x) = Cx^2$. Skicirajte tu porodicu.

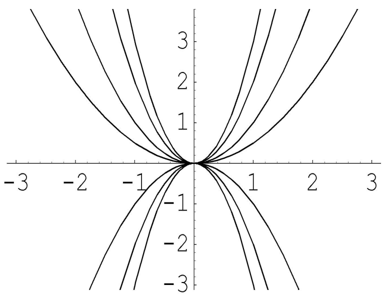
Rješenje: Tražimo prvo dif. jednadžbu, deriviramo jedanput (jer je jedna konstanta) pa imamo:

$$y'(x) = 2Cx \quad \Rightarrow \quad C = \frac{y'}{2x}$$

Sada to uvrštavamo u početnu jednadžbu naših krivulja da se riješimo konstante i dobivamo izraz:

$$y = \frac{y'}{2x}x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{y'x}{2}$$

što je tražena diferencijalna jednadžba te familije krivulja. Riječ je očito o svim parabolama s tjemenom u ishodištu:



Zadatak 2 Odredite diferencijalne jednadžbe sljedećih familija krivulja i skicirajte te familije:

a) $y(x) = Cx$,

b) $y(x) = C_1(x - C_2)^2$,

c) $y(x) = Ce^x$,

d) $x^2 + y^2 = C$.

Separacija varijabli, homogene jednadžbe

Diferencijalne jednadžbe rješavaju se različitim metodama. Mi ćemo raditi samo one najjednostavnije. Većini tih metoda cilj je diferencijalnu jednadžbu na ovaj ili onaj način (npr supstitucijom) svesti na oblik koji zovemo: **diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama**. Taj oblik znamo direktno riješiti. Naime, kod separiranih varijabli imamo situaciju da se jednadžba može zapisati ovako:

$$y' = g(y)f(x)$$

gdje funkcija g ima za varijablu samo y, a funckija f samo x (otuda i naziv "separirane varijable"). Sada $g(y)$ prebacujemo na suprotnu stranu a y' zapišemo kao $\frac{dy}{dx}$ i dobivamo:

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Zadnju jednakost možemo sada integrirati i dobiti rješenje.

Primjer 4 Riješite diferencijalnu jednadžbu: $xyy' = 1 - x^2$.

Rješenje: To je očito slučaj separiranih varijabli, imamo:

$$xyy' = 1 - x^2 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{y} \cdot \frac{1 - x^2}{x}$$

pa je $g(y) = \frac{1}{y}$ a $f(x) = \frac{1-x^2}{x}$. Prebacujemo g na suprotnu stranu i integriramo:

$$ydy = \frac{1 - x^2}{x}dx \quad \Rightarrow \quad \int ydy = \int \frac{1 - x^2}{x}dx.$$

Riješimo integrale i dobivamo:

$$\frac{y^2}{2} = \ln x - \frac{x^2}{2} + C.$$

Obično rješenja i ostavljamo u ovakvom implicitnom obliku jer je eksplicitni oblik ponekad nemoguće dobiti. Rješenje koje je u implicitnom obliku nazivamo još i **integralom jednadžbe**. Gornja konstanta C upućuje na to da imamo čitavu familiju rješenja ustvari. Njihovi grafovi daju gore spomenute familije integralnih krivulja.

Zadatak 3 Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe sa separiranim varijablama:

a) $xy' - y = y^3$,

b) $y' = -\frac{y}{x}$,

c) $y' \sin x = y \ln y$,

d) $(\tan x)dy - ydx = 0$.

Kao što vidimo, rješenja diferencijalnih jednadžbi prvog reda nisu jedinstvena već imamo jednu proizvoljnu konstantu (vidi i kod integralnih krivulja, dobijemo čitavu porodicu njih). Ako uzmemo jednadžbu drugog reda, dobit ćemo dvije proizvoljne konstante, za onu trećeg reda tri itd. Stoga rješenja dif. jednadžbe zovemo i **općim rješenjem**. Ako želimo jedinstveno rješenje, moramo dodati neke zahtjeve kao što su vrijednosti rješenja $y = y(x)$ (ili neke njegove derivacije) u nekoj specijalnoj točki. Da bi imali jedinstveno rješenje, tih uvjeta mora biti koliki je stupanj jednadžbe i oni se zovu **početni uvjeti**. Rješenje koje njih zadovoljava zove se **partikularno rješenje**.

Primjer 5 Nađite partikularno rješenje koje zadovoljava sljedeće početne uvjete: $(1 + e^x) \cdot y \cdot y' = e^x, \; y(0) = 1$.

Rješenje: Rješavamo prvo zadanu diferencijalnu jednadžbu:

$$(1 + e^x) \cdot y \cdot y' = e^x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{e^x}{1 + e^x}$$

pa slijedi:

$$\int ydy = \int \frac{e^x}{1 + e^x}dx \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + C.$$

Koristimo početni uvjet da odredimo konstantu C:

$$\frac{1}{2} = \frac{y^2(0)}{2} = \ln(1+e^0) + C = \ln 2 + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2} - \ln 2$$

i traženo partikularno rješenje je:

$$\frac{y^2}{2} = \ln(1+e^x) + \frac{1}{2} - \ln 2.$$

Zadatak 4 Nađite partikularno rješenje koje zadovoljava sljedeće početne uvjete:

a) $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0,\;\; y(0) = 1,$

b) $y' \sin x = y \ln y,\;\; y(\frac{\pi}{2}) = 1,$

c) $y' = -\frac{y}{x},\;\; y(1) = 2.$

Prijeđimo sada na novu grupu jednadžbi kao primjer jednadžbi koje se jednostavnom supstitucijom svode na jednandžbe sa separiranim varijablama: **homogene diferencijalne jednadžbe**. To su one jednadžbe koje možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{2}$$

Supstitucija je $y = u \cdot x$ gdje je $u = u(x)$ nova nepoznata funkcija i onda imamo $y' = u' \cdot x + u$.

Primjer 6 Nađite opće rješenje jednadžbe $y' = \frac{y}{x} - 1$.

Rješenje: Očito je riječ o homogenoj jednadžbi (2) gdje je $f(t) = t - 1$. Uvodimo supstituciju $y = ux$ i dobivamo:

$$u' \cdot x + u = u - 1 \quad \Rightarrow \quad u' = -\frac{1}{x}$$

odnosno

$$\int du = -\int \frac{1}{x} dx \quad \Rightarrow u = -\ln x + \ln C.$$

Sada je $y = u \cdot x = (-\ln x + \ln C)x = x \ln \frac{C}{x}$.

Primjer 7 Za jednadžbu $(x^2 + y^2)dx = 2xydy$ nađite porodicu integralnih krivulja i izdvojite one krivulje koje prolaze kroz točku $(4, 0)$ odnosno $(1, 1)$.

Rješenje: Imamo:

$$(x^2 + y^2)dx = 2xydy \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right).$$

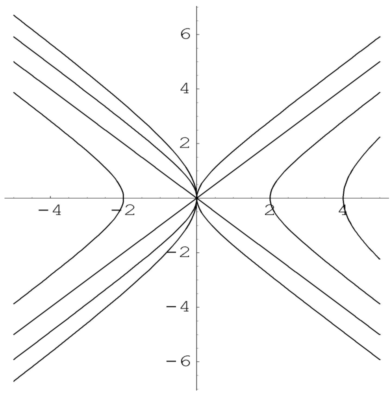
To je homogena jednadžba (2) za $f(t) = \frac{1}{2}(t^{-1} + t)$. Supstitucija $y = u \cdot x$ nam daje:

$$u' \cdot x + u = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} + u\right) \quad \Rightarrow \quad u' \cdot x = \frac{1}{2u} - \frac{1}{2}u \quad \Rightarrow \quad u' \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - u^2}{u}.$$

Stoga imamo:

$$\int \frac{u}{1-u^2}du = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\ln(1-u^2) = \frac{1}{2}\ln x - \ln C \quad \Rightarrow \quad \ln(1-u^2) = -\ln(x) + \ln C$$

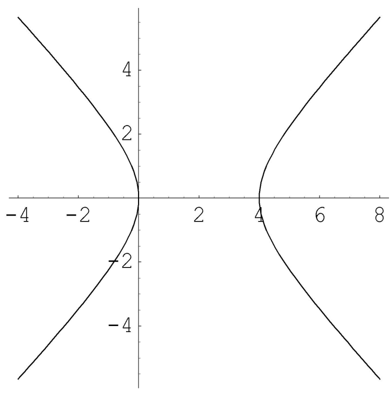
pa je $1-\frac{C}{x} = u^2$ što daje: $\frac{y^2}{x^2} = 1-\frac{C}{x} \quad \Rightarrow \quad y^2 = x^2 - Cx$. Jer je C proizvoljna konstanta, možemo to zapisati i ovako: $y^2 = x^2 - 2Cx \quad \Rightarrow \quad (x-C)^2 - y^2 = C^2$. Integralne krivulje su očito hiperbole:



Nađimo sada integralnu krivulju koja prolazi točkom $(4,0)$. To je ustvari graf rješenjak koje zadovoljava početni uvjet $y(4) = 0$. Kad to uvrstimo u opće rješenje dobivamo:

$$(4-C)^2 - y^2(4) = C^2 \quad \Rightarrow \quad (4-C)^2 = C^2 \quad \Rightarrow \quad 16 - 8C = 0$$

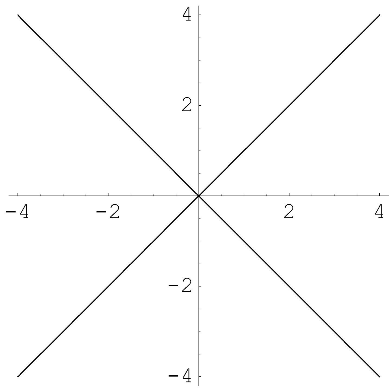
što znači da je $C = 2$, odnosno riječ je o hiperboli $(x-2)^2 - y^2 = 4$:



Drugi početni uvjet nam daje $y(1) = 1$ pa za konstantu C dobivamo:

$$(1-C)^2 - y^2(1) = C^2 \quad \Rightarrow \quad (1-C)^2 - 1 = C^2$$

iz čega slijedi $C = 0$. Ovaj put dobivamo $x^2 - y^2 = 0$ degeneriranu hiperbolu, što su ustvari pravci $y = \pm x$:



Zadatak 5 Integrirajte diferencijalne jednadžbe:

a) $y' = -\frac{x+y}{x}$,

b) $(x-y)ydx - x^2dy = 0$,

c) $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$,

d) $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}dx$.

Linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda

Diferencijalnu jednadžbu oblika:

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{3}$$

nazivamo linearnom (jer sadrži samo y i y' a ne i neke druge članove kao npr y^2 ili $\sin y$). Da bi njih riješili koristit ćemo novu metodu koju nazivamo **metoda varijacije konstanti**. Ona se bazira na sljedećem:

1) riješimo prvo pripadnu homogenu jednadžbu odnosno

$$y' + P(x)y = 0.$$

Kao što vidimo, to je slučaj varijable sa separiranim varijablama pa dobivamo

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx \quad \Rightarrow \quad \ln y = -\int P(x)dx + \ln C.$$

Stoga je rješenje homognene jednadžbe:

$$y = C \cdot e^{-\int P(x)dy}. \tag{4}$$

2) Rješenju homogene jednadžbe moramo nekako dati slobodu mijenjanja da ga možemo prilagoditi nehomogenoj jednadžbi. Pošto je jedino C u (4) proizvoljan, od njega napravimo funkciju $C(x)$ pa ćemo rješenje nehomogene tražiti u obliku $y(x) = C(x)e^{-\int P(x)dx}$. Želimo da ono zadovoljava (3) pa nam treba i njegova derivacija:

$$y'(x) = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

Uvrstimo dobiveno u (3) i imamo:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

i iz toga lako izračunamo integriranjem traženi $C(x)$ koji potom uvrstimo u $y(x) = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ i dobijemo rješenje nehomogene jednadžbe.

Primjer 8 Nađite opći integral jednadžbe $y' - \frac{y}{x} = x$.

Rješenje: Ovdje je očito $P(x) = -\frac{1}{x}$ a $Q(x) = x$. Sprovodimo gornji postupak:

1) pripadna homogena jednadžba je:

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

što daje

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln x + \ln C \quad \Rightarrow \quad y = C \cdot x.$$

2) konstanta C postaje funkcija pa rješenje nehomogene tražimo u obliku $y = C(x)x$. Deriviranje daje $y' = C'(x)x + C(x)$ pa iz uvrštavanja y i y' u $y' - \frac{y}{x} = x$ dobivamo:

$$C'(x)x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = x \quad \Rightarrow \quad C'(x)x = x \quad \Rightarrow \quad C'(x) = 1$$

i očito je $C(x) = x + D$ pa je konačno rješenje $y = x(x + D)$.

Primjer 9 Nađite partikularno rješenje koje zadovoljava sljedeće uvjete: $xy' + y - e^x = 0, \; y(a) = b$.

Rješenje: Prvo jednadžbu prebacujemo u oblik (3) da prepoznamo $P(x)$ i $Q(x)$:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x} \quad \Rightarrow \quad P(x) = \frac{1}{x}, \; Q(x) = \frac{e^x}{x}.$$

Sada je pripadna homogena jednadžba $y' + \frac{y}{x} = 0$ i njeno rješenje je:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln y = -\ln x + \ln C \quad \Rightarrow \quad y = \frac{C}{x}.$$

Prema tome, rješenje nehomogene tražimo u obliku: $y = \frac{C(x)}{x}$ i onda je $y' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2}$. Uvrštavamo to u početnu jednadžbu i slijedi:

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = \frac{e^x}{x} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = e^x$$

pa je konačno opće rješenje $y = \frac{e^x + D}{x}$. Ostaje naći partikularno tj. odrediti konstantu D iz uvjeta $y(a) = b$. Imamo

$$b = y(a) = \frac{e^a + D}{a} \quad \Rightarrow \quad D = ab - e^a$$

i partikularno rješenje je $y = \frac{e^x + ab - e^a}{x}$.

Zadatak 6 Nađite opća rješenja jednadžbi:

1) $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^3$,

2) $y' - y \tan x = \cos x$,

3) $y' - \frac{y}{1-x^2} = 1 + x$.

Zadatak 7 Nađite partikularna rješenja jednadžbi koja zadovoljavaju navedeni uvjet:

1) $y' - \frac{y}{1-x^2} = 1 + x, \;\; y(0) = 0$,

2) $y' - y \tan x = \frac{1}{\cos x}, \;\; y(0) = 0$.

Obične diferencijalne jednadžbe 2. reda

U ovoj lekciji vježbamo rješavanje jedne klase običnih diferencijalnih jednadžbi 2. reda − radi se o **linearnim** običnim diferencijalnim jednadžbama 2. reda **s konstantnim koeficijentima**. To su jednadžbe oblika

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

gdje su p i q realni brojevi, a $f(x)$ neka funkcija varijable x. Nepoznanica ove jednadžbe je $y = y(x)$, a riješiti jednadžbu znači dobiti eksplicitan izraz za funkciju y.

Kao i inače, razlikujemo dvije situacije:

(a) Ako je $f(x) = 0$, gornja jednadžba ima oblik

$$y'' + py' + qy = 0$$

i zovemo je **homogena** jednadžba.

(b) Ako je $f(x) \neq 0$, gornja jednadžba ima općeniti oblik (gdje je s desne strane neka nenul funkcija varijable x). U tom slučaju jednadžbu zovemo **nehomogena** jednadžba.

U sljedećem odlomku opisujemo kako se rješavaju homogene jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima.

Homogene jednadžbe

Homogene jednadžbe oblika

$$y'' + py' + qy = 0$$

rješavaju se pomoću tzv. **karakteristične jednadžbe**, koju iz diferencijalne jednadžbe dobijemo uvođenjem parametra λ po sljedećem principu

$$\begin{array}{rcl} y & \to & 1 \\ y' & \to & \lambda \\ y'' & \to & \lambda^2. \end{array}$$

Tako gornjoj jednadžbi pripada sljedeća karakteristična jednadžba:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Kao i kod svake kvadratne jednadžbe, njena rješenja $\lambda_{1,2}$ mogu biti:

(a) realni i različiti brojevi − u tom slučaju rješenje homogene diferencijalne jednadžbe dano je s
$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},$$
gdje su C_1 i C_2 realne konstante.

(b) realni i jednaki brojevi ($\lambda_1 = \lambda_2$) − ovdje je rješenje homogene diferencijalne jednadžbe dano s
$$y(x) = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

(c) kompleksni brojevi − u tom slučaju vrijedi $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, jer znamo da su kompleksna rješenja kvadratne jednadžbe međusobno konjugirana. U ovom slučaju rješenje homogene diferencijalne jednadžbe dano je s
$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Riješimo nekoliko primjera.

Primjer 1 Riješite diferencijalnu jednadžbu
$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Rješenje: Karakteristična jednadžba koja pripada ovoj diferencijalnoj jednadžbi glasi
$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$
a njena su rješenja $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Kako su rješenja različiti realni brojevi, imamo da je rješenje zadane diferencijalne jednadžbe
$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Primjer 2 Riješite diferencijalnu jednadžbu
$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Rješenje: U ovom slučaju karakteristična jednadžba glasi
$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$
Njeni korijeni su jednaki realni brojevi $\lambda_{1,2} = -2$, pa rješenje glasi
$$y(x) = e^{-2x}(C_1 + C_2 x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Primjer 3 Riješite
$$y'' + y = 0.$$

Rješenje: Ovoj jednadžbi pripada karakteristična jednadžba

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

čija su rješenja $\lambda_{1,2} = \pm i$, pa vidimo da je $\alpha = 0$, $\beta = 1$ (to su realni i imaginarni dio jednog od ovih korijena!). Stoga je rješenje dano s

$$y(x) = e^{0 \cdot x}(C_1 \cos 1 \cdot x + C_2 \sin 1 \cdot x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Napomena:

Ako želimo zadati Cauchyjev problem (diferencijalna jednadžba s jednim ili više početnih uvjeta) čija je diferencijalna jednadžba drugog reda, prirodno je zadati ne jedan (kao što je to bilo kod običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda), već **dva** početna uvjeta. Naime, vidimo već iz gore opisanih rješenja da postoje dvije neodređene realne konstante C_1 i C_2. Tek zadavanjem **dva** početna uvjeta dobivamo sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, čijim rješavanjem potom u potpunosti fiksiramo konstante C_1 i C_2, tj. dolazimo do jedinstvenog rješenja. Najčešće se ti početni uvjeti odnose na neke vrijednosti same funkcije i njene prve derivacije.

Primjer 4 Riješite sljedeći Cauchyjev problem (nađite partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe koje zadovoljava zadane početne uvjete):

$$\begin{aligned} y'' + 3y' + 2y &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= -1. \end{aligned}$$

Rješenje: Najprije rješavamo diferencijalnu jednadžbu. Njena karakteristična jednadžba je

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0,$$

a rješenja te jednadžbe dana su s $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, pa je opće rješenje diferencijalne jednadžbe dano s

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Kako bismo odredili partikularno rješenje, koristimo početne uvjete:

$$\begin{aligned} y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} \quad &\Rightarrow \quad y(0) = C_1 + C_2 = 1 \\ y'(x) = -2C_1 e^{-2x} - C_2 e^{-x} \quad &\Rightarrow \quad y'(0) = -2C_1 - C_2 = -1. \end{aligned}$$

Dolazimo do sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 1 \\ -2C_1 - C_2 &= -1, \end{aligned}$$

odakle izlazi $C_1 = 0, C_2 = 1$. Uvrštavanjem u opće rješenje dolazimo do partikularnog rješenja (rješenja zadanog Cauchyjevog problema):

$$y(x) = e^{-x}.$$

Zadatak 1 Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe:

1) $y'' - 9y = 0$

2) $y'' + 4y' + 13y = 0$

3) $y'' + y' - y = 0$

4) $y'' - 2y' + 5y = 0$

5) $y'' - 9y' + 9y = 0$

6) $y'' - y = 0.$

Zadatak 2 Odredite partikularna rješenja sljedeći diferencijalnih jednadžbi s početnim uvjetima:

1) $y'' - 5y' + 4y = 0, y(0) = 5, y'(0) = 8$

2) $y'' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$

3) $y'' + 2y' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$

4) $y'' + 3y' = 0, y(0) = 0, y(3) = 0.$

Nehomogene jednadžbe

Rješenje nehomogenih jednadžbi

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

dano je s

$$y = y_0 + Y,$$

gdje je y_0 opće rješenje pripadne homogene jednadžbe, a Y je neko (partikularno) rješenje nehomogene jednadžbe, koje u ovisnosti od oblika funkcije $f(x)$ tražimo u sljedećem obliku:

(1) Ako je $f(x) = e^{ax}P_n(x)$, gdje je $P_n(x)$ polinom $n-$tog stupnja:

   i) u slučaju da a nije rješenje karakteristične jednadžbe pripadne homogene jednadžbe, Y tražimo u obliku $Y = e^{ax}Q_n(x)$, gdje je $Q_n(x)$ neki polinom s neodređenim koeficijentima

   ii) u slučaju da a jest rješenje karakteristične jednadžbe pripadne homogene jednadžbe, Y tražimo u obliku $Y = x^r e^{ax}Q_n(x)$, gdje je r kartnost a kao korijena karakteristične jednadžbe (broj koliko se puta a pojavljuje kao rješenje te jednadžbe $-$ to može biti 1 ili 2), a $Q_n(x)$ je neki polinom s neodređenim koeficijentima

(2) Ako je $f(x) = e^{ax} \cdot [P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx]$, gdje je $P_n(x)$ polinom $n-$tog stupnja, a $Q_m(x)$ polinom $m-$tog stupnja:

   i) u slučaju da $a \pm bi$ nisu korijeni karakteristične jednadžbe pripadne homogene jednadžbe, Y tražimo u obliku $Y = e^{ax} \cdot [S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx]$, gdje su $S_N(x)$ i $T_N(x)$ polinomi istog stupnja $N = \max(m,n)$ (stupnja jednakog maksimalnom stupnju od stupnjeva polinoma koji se pojavljuju u $f(x)$), i to s neodređenim koeficijentima

ii) u slučaju da $a \pm bi$ jesu korijeni karakteristične jednadžbe pripadne homogene jednadžbe, Y tražimo u obliku $Y = xe^{ax} \cdot [S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx]$, gdje su $S_N(x)$ i $T_N(x)$ polinomi istog stupnja $N = \max(m,n)$ (stupnja jednakog maksimalnom stupnju od stupnjeva polinoma koji se pojavljuju u $f(x)$), i to s neodređenim koeficijentima.

Napomena:

Gornja situacija pokriva mnogo mogućnosti za $f(x)$, i to kada je f umnožak eksponencijalne funkcije i polinoma ili umnožak eksponencijalne funkcije i linearne kombinacije trigonometrijskih funkcija s polinomima kao koeficijentima. Kako prepoznati radi li se o prvom ili drugom slučaju? Najjednostavnije je vidjeti sadrži li $f(x)$ neke trigonometrijske funkcije $-$ ako sadrži, znači da je riječ o slučaju (2) opisanom gore.

Nakon što utvrdimo oblik funkcije Y, uvrštavamo Y (i sve njene derivacije koje treba) u polaznu nehomogenu diferencijalnu jednadžbu te potom određujemo nepoznate koeficijente u polinomu (ili polinomima) koji se u Y pojavljuju.

Primjer 5 Riješite sljedeću diferencijalnu jednadžbu:

$$y'' + 2y' + y = e^{2x}.$$

Rješenje:

Najprije nalazimo y_0, tj. opće rješenje pripadne homogene jednadžbe. Ona glasi

$$y'' + 2y' + y = 0,$$

pa je njena karakteristična jednadžba

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Rješenja karakteristične jednadžbe su $\lambda_{1,2} = -1$, pa je opće rješenje homogene jednadžbe dano s

$$y = e^{-x}(C_1 + C_2 x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Sada prelazimo na traženje partikularnog rješenja, tj. Y. Kako je $f(x) = e^{2x}$, što možemo u "punom" obliku situacije (1) s prethodne stranice shvatiti kao $f(x) = e^{2\cdot x} \cdot 1$, vidimo da je $a = 2$, $P(x) = 1$. Kako $a = 2$ nije rješenje gornje karakteristične jednadžbe, Y tražimo u obliku

$$Y = A \cdot e^{2x},$$

gdje je $Q(x) = A$, tj. konstantan polinom. Konstantu A određujemo uvrštavanjem Y u polaznu diferencijalnu jednadžbu. Kako ta diferencijalna jednadžba sadrži y' i y'', moramo najprije izračunati Y' i Y'':

$$\begin{aligned} Y' &= 2Ae^{2x} \\ Y'' &= 4Ae^{2x}. \end{aligned}$$

Sada uvrštavanjem Y, Y' i Y'' u polaznu jednadžbu dobivamo

$$4Ae^{2x} + 2 \cdot 2Ae^{2x} + Ae^{2x} = e^{2x} \Rightarrow 9Ae^{2x} = e^{2x}.$$

Dijeljenjem dobivene jednakosti s e^{2x} slijedi da je $9A = 1$, tj. $A = \frac{1}{9}$, pa je

$$Y = \frac{1}{9}e^{2x}.$$

Sada slijedi da je rješenje dane diferencijalne jednadžbe dano s

$$y = y_0 + Y = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + \frac{1}{9}e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Primjer 6 Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + y = x^2 e^x.$$

Rješenje:

Pripadna homogena jednadžba je $y'' + y = 0$, a njena karakteristična jednadžba $\lambda^2 + 1 = 0$ ima rješenja $\lambda_{1,2} = \pm i$, pa je

$$y_0 = e^{0 \cdot x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Prelazimo na određivanje oblika partikularnog rješenja Y. Kako je $f(x) = x^2 e^x$, a $a = 1$ nije korijen karakteristične jednadžbe, partikularno rješenje Y tražimo u obliku

$$Y = (Ax^2 + Bx + C)e^x,$$

gdje su A, B i C koeficijenti koje treba odrediti uvrštavanjem Y i Y'' u polaznu jednadžbu. Računamo

$$\begin{aligned}
Y' &= (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx + C)e^x = (Ax^2 + (2A + B)e^x + B + C)e^x \\
Y'' &= (2Ax + 2A + B)e^x + (Ax^2 + (2A + B)e^x + B + C)e^x = \\
&= (Ax^2 + (4A + 2B)x + 2A + 2B + C)e^x,
\end{aligned}$$

odakle uvrštavanjem u polaznu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$(Ax^2 + (4A + 2B)x + 2A + 2B + C)e^x + (Ax^2 + Bx + C)e^x = x^2 e^x.$$

Sada dijeljenjem s e^x i grupiranjem po potencijama od x dolazimo do jednakosti polinoma drugog stupnja

$$2Ax^2 + (4A + 2B)x + 2A + 2B + 2C = x^2,$$

što uspoređivanjem koeficijenata (uz odgovarajuće potencije od x moraju stajati isti koeficijenti kako bi polinomi bili jednaki!) lijeve i desne strane gornje jednakosti vodi na sljedeći sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice:

$$\begin{aligned}
2A &= 1 \\
4A + 2B &= 0 \\
A + B + C &= 0.
\end{aligned}$$

Sustav ima jedinstveno rješenje koje glasi $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$, $C = \frac{1}{2}$, pa je

$$Y = (\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2})e^x$$

i stoga je konačno rješenje zadatka dano s

$$y = y_0 + Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2})e^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Primjer 7 Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' - y = \sin x.$$

Rješenje:

Karakteristična jednadžba $\lambda^2 - 1 = 0$ pripadne homogene jednadžbe $y'' - y = 0$ ima rješenja $\lambda_{1,2} = \pm 1$, pa je opće rješenje pripadne homogene jednadžbe dano s

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \quad C_1, C_2, \in \mathbb{R}.$$

Kako je $f(x) = \sin x = e^{0 \cdot x}(1 \cdot \cos x + 0 \cdot \sin x)$, imamo $a = 0$, $b = 1$. Kako $a \pm bi = 0 \pm 1 \cdot i = \pm i$ nisu korijeni gornje karakteristične jednadžbe, to partikularno rješenje Y tražimo u obliku

$$Y = e^{0 \cdot x}(A \cdot \cos x + B \cdot \sin x) = A \cos x + B \sin x,$$

gdje su A i B konstantni polinomi koje treba odrediti uvrštavanjem Y i Y'' u polaznu diferencijalnu jednadžbu. Računamo stoga

$$\begin{aligned} Y' &= -A \sin x + B \cos x \\ Y'' &= -A \cos x - B \sin x, \end{aligned}$$

odakle uvrštavanjem Y i Y'' u polaznu jednadžbu imamo

$$\begin{aligned} -A \cos x - B \sin x - (A \cos x + B \sin x) &= \sin x \\ -2A \cos x - 2B \sin x &= \sin x. \end{aligned}$$

Sada izjednačavanjem koeficijenata uz $\cos x$ i $\sin x$ s lijeve i desne strane gornje jednakosti (s desne strane uz $\cos x$ stoji nula!) imamo

$$\begin{aligned} -2A &= 0 \\ -2B &= 1, \end{aligned}$$

odakle slijedi $A = 0$, $B = -\frac{1}{2}$. Stoga je

$$Y = -\frac{1}{2} \sin x,$$

pa je rješenje zadane diferencijalne jednadžbe dano s

$$y = y_0 + Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x, \quad C_1, C_2, \in \mathbb{R}$$

Primjer 8 Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' - 4y = (25x + 5) \cos x.$$

Rješenje:

Najprije rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu $y'' - 4y = 0$. Njena karakteristična jednadžba $\lambda^2 - 4 = 0$ ima dva različita realna rješenja $\lambda_{1,2} = \pm 2$, pa opće rješenje pripadne homogene jednadžbe glasi

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Kako bismo odredili oblik u kojem ćemo tražiti partikularno rješenje Y, potrebno je uočiti da $f(x) = (25x+5)\cos x$ sadrži trigonometrijsku funkciju, točnije da $f(x)$ možemo shvatiti kao $f(x) = e^{0\cdot x}((25x+5)\cdot\cos x + 0\cdot\sin x)$, pa prema situaciji opisanoj pod (2) na str. 4 vidimo da (jer $a \pm bi = 0 \pm 1\cdot i = \pm i$ nisu korijeni karakteristične jednadžbe) Y treba tražiti u obliku

$$Y = (Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x$$

(primijetimo da su nepoznati polinomi uz $\cos x$ i $\sin x$ ovdje **istog** stupnja, i to maksimalnog stupnja od polinoma koji se javljaju u $f(x)$). Sada još treba izračunati Y'':

$$\begin{aligned}
Y' &= A\cos x - (Ax+B)\sin x + C\sin x + (Cx+D)\cos x = \\
&= (Cx+A+D)\cos x + (-Ax-B+C)\sin x \\
Y'' &= C\cos x - (Cx+A+D)\sin x - A\sin x + (-Ax-B+C)\cos x = \\
&= (-Ax-B+2C)\cos x + (-Cx-2A-D)\sin x.
\end{aligned}$$

Sada uvrštavanjem Y i Y'' u polaznu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$(-Ax-B+2C)\cos x + (-Cx-2A-D)\sin x - 4((Ax+B)\cos x + (Cx+D)) = (25x+5)\cos x,$$

odakle grupiranjem po $\cos x$ i $\sin x$ imamo

$$(-5Ax-5B+2C)\cos x + (5Cx+5D+2A)\sin x = (25x+5)\cos x.$$

Sada izjednačavanjem polinoma uz $\cos x$ i $\sin x$ s lijeve i s desne strane gornje jednakosti (uz $\sin x$ s desne strane stoji nulpolinom!) imamo

$$\begin{aligned}
-5Ax-5B+2C &= 25x+5 \\
5Cx+5D+2A &= 0,
\end{aligned}$$

odakle pak izjednačavanjem koeficijenata uz potencije x dolazimo do sustava

$$\begin{aligned}
-5A &= 25 \\
-5B+2C &= 5 \\
5C &= 0 \\
5D+2A &= 0.
\end{aligned}$$

Rješenje gornjeg sustava je jedinstveno i glasi $A = -5$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 2$, pa je partikularno rješenje dano s

$$Y = (-5x-1)\cos x + 2\sin x.$$

Stoga je rješenje polazne diferencijalne jednadžbe

$$y = y_0 + Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + (-5x-1)\cos x + 2\sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 3 Riješite sljedeće diferencijalne jednadžbe:

1) $y'' - 4y' + 4y = x^2$

2) $y'' - 8y' + 7y = 14$

3) $y'' - y = e^x$

4) $y'' + y = \cos x$

5) $y'' + y' - 2y8\sin 2x$

6) $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x.$