Poglavlje 10

Višestruki integrali

Od višestrukih integrala radit ćemo dvostruke integrale. Princip integriranja je isti kao kod jednostrukih integrala, samo što moramo paziti na redoslijed integracije.
Simbolički zapis dvostrukog integrala je

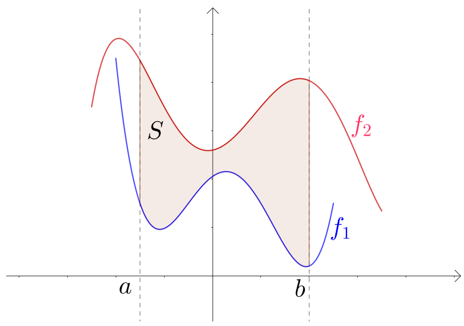
$$\iint\limits_S f(x,y)\,dx\,dy$$

pri čemu je S područje integracije, a $f(x,y)$ podintegralna funkcija.
Oznaka $dx\,dy$ se u simboličkom zapisu uvijek piše na taj način, no ne označava redoslijed integracije. Redoslijed integriranja kod dvostrukih integrala uvijek je od unutarnjeg integrala prema vanjskom integralu. Koristit ćemo dva zapisa za svaki od redoslijeda integriranja:

1. prvo integriramo po y zatim po x

$$\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx \qquad \text{ili} \qquad \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

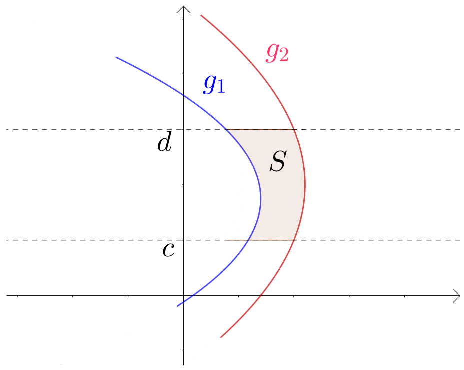
Ako je vanjski integral po x, onda granice unutarnjeg integrala moraju biti izražene u varijabli x (tj. kao funkcije $f_1(x)$ i $f_2(x)$). Granice unutarnjeg integrala ne smiju sadržavati y.



2. prvo integriramo po varijabli x zatim po y

$$\int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{ili} \qquad \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

Ako je vanjski integral po y, onda granice unutarnjeg integrala moraju biti izražene u varijabli y (tj. kao funkcije $g_1(y)$ i $g_2(y)$). Granice unutarnjeg integrala ne smiju sadržavati x.



Zadatak 10.0.1. Integrirajte $\displaystyle\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2+2y)\,dx$.

Rješenje.

$$\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2+2y)\,dx = \int_0^2 \left[\int_0^1 x^2\,dx + 2y\int_0^1 1\,dx\right] dy = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 + 2y\cdot x\bigg|_0^1\right) dy =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{3}+2y\right) dy = \left(\frac{1}{3}y + y^2\right)\bigg|_0^2 = \frac{14}{3}$$

Zadatak 10.0.2. Integrirajte $\displaystyle\int_{-3}^3 dy \int_{y^2-4}^5 (x+2y)\,dx$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{3} dy \int_{y^2-4}^{5} (x+2y)\,dx &= \int_{-3}^{3} \left(\frac{x^2}{2}+2yx\right)\Bigg|_{y^2-4}^{5} dy = \\
&= \int_{-3}^{3} \left[\left(\frac{25}{2}+10y\right) - \left(\frac{1}{2}(y^2-4)^2+2y(y^2-4)\right)\right] dy = \\
&= \int_{-3}^{3} \left(-\frac{1}{2}y^4 - 2y^3 + 4y^2 + 18y + \frac{9}{2}\right) dy = \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-3}^{3} y^4\,dy - 2\int_{-3}^{3} y^3\,dy + 4\int_{-3}^{3} y^2\,dy + \\
&+ 18\int_{-3}^{3} y\,dy + \frac{9}{2}\int_{-3}^{3} 1\,dy = \\
&\overset{(*)}{=} -\frac{1}{2}\cdot 2\int_{0}^{3} y^4\,dy - 2\cdot 0 + 4\cdot 2\int_{0}^{3} y^2\,dy + 18\cdot 0 + \frac{9}{2}\cdot 2\int_{0}^{3} 1\,dy = \\
&= -\frac{y^5}{5}\Bigg|_{0}^{3} + 8\cdot\frac{y^3}{3}\Bigg|_{0}^{3} + 9y\Bigg|_{0}^{3} = -\frac{243}{5} + 72 + 27 = \frac{252}{5}
\end{aligned}$$

U jednakosti (*) korištena je Napomena 3.3.3 o integriranju neparne, odnosno parne funkcije na simetričnom intervalu.

Zadatak 10.0.3. Integrirajte $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{\sin\varphi}^{1} r\,dr$.

Rješenje.

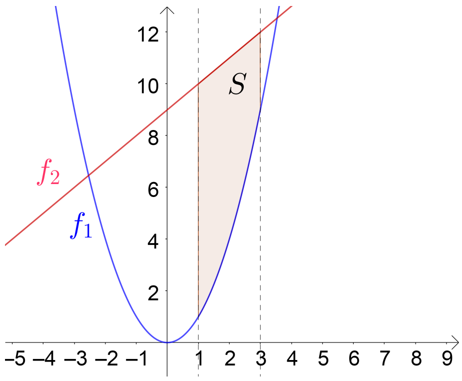
$$\begin{aligned}
\int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{\sin\varphi}^{1} r\,dr &= \int_{0}^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Bigg|_{\sin\varphi}^{1} d\varphi = \int_{0}^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin^2\varphi}{2}\right) d\varphi = \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} 1\,d\varphi - \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\varphi\Bigg|_{0}^{2\pi} - \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2\pi - \frac{1}{4}\int_{0}^{2\pi} (1-\cos 2\varphi)\,d\varphi = \pi - \frac{1}{4}\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin(2\varphi)\right)\Bigg|_{0}^{2\pi} = \\
&= \pi - \frac{1}{4}\left(2\pi - \frac{1}{2}\sin(4\pi) - 0 + \frac{1}{2}\sin 0\right) = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Zadatak 10.0.4. Skicirajte područje integracije S u integralu:

a) $\displaystyle\int_{1}^{3} dx \int_{x^2}^{x+9} f(x,y)\,dy$, b) $\displaystyle\int_{0}^{4} dy \int_{y}^{10-y} f(x,y)\,dx$.

Rješenje.

a) Područje S se po varijabli x proteže od $x=1$ do $x=3$, a po varijabli y od funkcije $f_1(x)=x^2$ i $f_2(x)=x+9$.

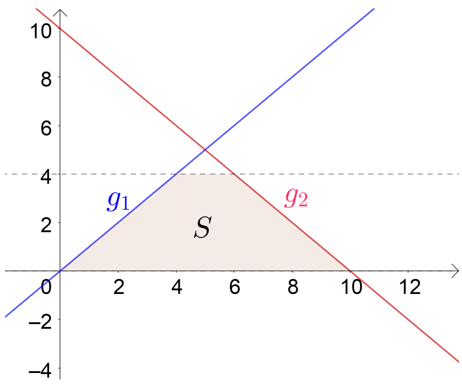


Slika 10.1: Područje S

b) Područje S se po varijabli y proteže od $y = 0$ do $y = 4$, a po varijabli x od $g_1(y) = y$ do $g_2(y) = 10 - y$.

$g_1(y) = y \Rightarrow x = y \Rightarrow y = x$

$g_2(y) = 10 - y \Rightarrow x = 10 - y \Rightarrow y = 10 - x$



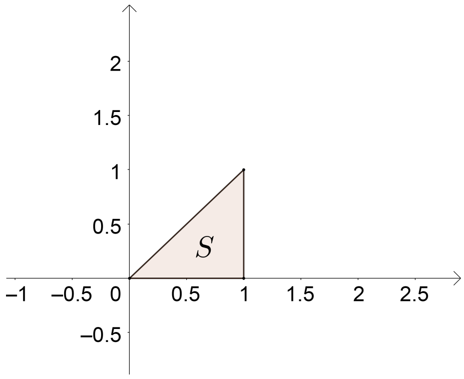
Slika 10.2: Područje S

Zadatak 10.0.5. Odredite granice integracije u oba poretka za $\iint\limits_S f(x,y)\,dx\,dy$ ako je:

a) S trokut s vrhovima $(0,0)$, $(1,0)$ i $(1,1)$,

b) S određen odsječkom parabole $y = x^2$ omeđen pravcem $y = 4$.

Rješenje.

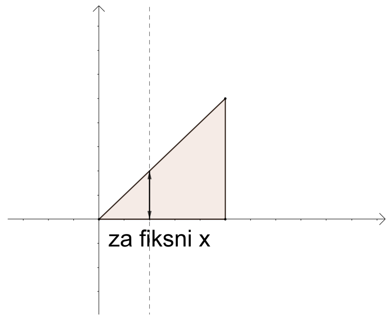


Slika 10.3: Područje S

a) Pravac koji prolazi kroz $(0,0)$ i $(1,1)$ ima jednadžbu $y = x$, onaj kroz $(0,0)$ i $(1,0)$ je $y = 0$ te onaj kroz $(1,0)$ i $(1,1)$ je $x = 1$.

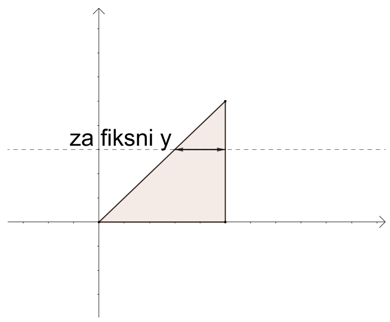
1. poredak: za fiksni $x \in [0,1]$ po y se krećemo od pravca $y = 0$ do $y = x$.

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)\,dy$$

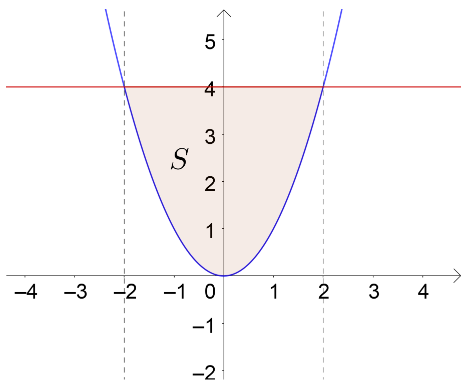


2. poredak: za fiksni $y \in [0,1]$ po x se krećemo od pravca $y = x$ do $x = 1$, no prvi pravac ne smijemo zapisati na taj način, već kao $x = y$.

$$\int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y)\,dx$$



b) Najprije skiciramo zadanu parabolu i pravac.



Slika 10.4: Područje S

Prvi poredak: po x se krećemo od -2 do 2, a za fiksni $x \in [-2, 2]$ krećemo se od parabole $y = x^2$ do pravca $y = 4$.

$$\int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} f(x, y)\, dy$$

Drugi poredak: po y se krećemo od 0 do 4, a za fiksni $y \in [0, 4]$, krećemo se od lijeve grane parabole $x = -\sqrt{y}$ do desne grane parabole $x = \sqrt{y}$.

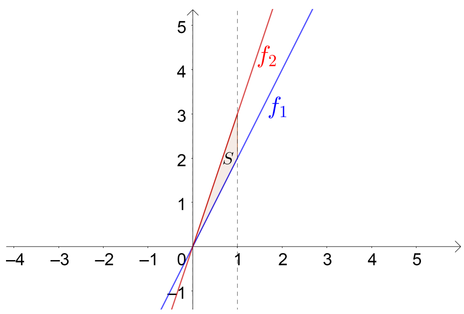
$$\int_{0}^{4} dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx$$

Zadatak 10.0.6. Promijenite poredak integracije u integralu:

a) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x, y)\, dy,$ b) (Zadatak s ispita) $\displaystyle\int_{-3}^{0} dx \int_{(x+2)^2+3}^{7+x} f(x, y)\, dy.$

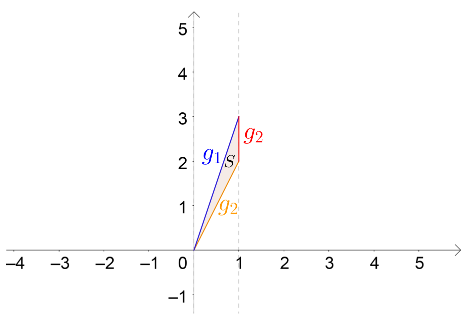
Rješenje.

a) Najprije skiciramo područje S koje se po x prostire od $x = 0$ do $x = 1$, a po y od $f_1(x) = 2x$ do $f_2(x) = 3x$.



Slika 10.5: Područje S

Prilikom zamjene redoslijeda integracije prvo odredimo granice za y: od 0 do 3. Na tom intervalu funkcije $g_1(y)$ i $g_2(y)$ nisu cijelo vrijeme iste. Preciznije, funkcija $g_1(y) = \frac{y}{3}$ je stalna, no za fiksni $y \in [0, 2]$ funkcija $g_2(y)$ je pravac $g_2(y) = \frac{y}{2}$, a za $y \in [2, 3]$, funkcija $g_2(y)$ je vertikalni pravac $g_2(y) = 1$.

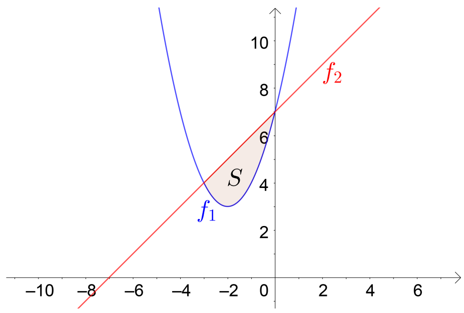


Slika 10.6: Područje S

Prema tome, u drugom redoslijedu integral ne možemo zapisati kao jedan dvostruki integral, već kao dva.

$$I = \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx + \int_2^3 dy \int_{\frac{y}{3}}^{1} f(x,y)\,dx$$

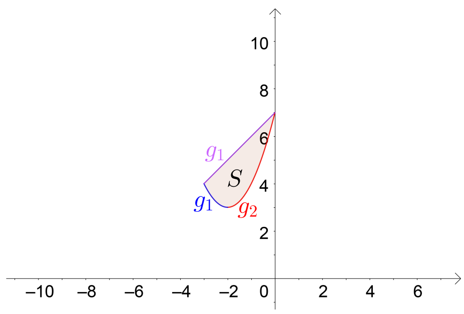
b) Najprije skiciramo područje S.



Slika 10.7: Područje S

Kao presječne točke funkcija f_1 i f_2 dobivaju se točke $(-3,4)$ i $(0,7)$. Po y S se pruža od $y = 3$ do $y = 7$. Funkcija $g_2(y) = -2 + \sqrt{y-3}$ je ista za sve $y \in [3,7]$, no za $y \in [3,4]$ je $g_1(y) = -2 - \sqrt{y-3}$, a za $y \in [4,7]$ je $g_1(y) = y - 7$. Integral je

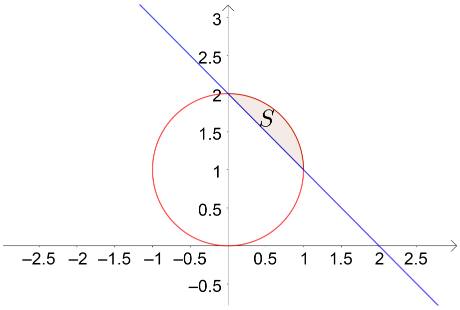
$$I = \int_3^4 dy \int_{-2-\sqrt{y-3}}^{-2+\sqrt{y-3}} f(x,y)\,dx + \int_4^7 dy \int_{y-7}^{-2+\sqrt{y-3}} f(x,y)\,dx.$$



Slika 10.8: Područje S

Zadatak 10.0.7. Izračunajte $\iint\limits_S f(x,y)\,dx\,dy$ ako je S manje područje omeđeno pravcem koji prolazi točkama $(0,2)$ i $(2,0)$ i lukom kružnice $x^2 + (y-1)^2 = 1$ za $f(x,y) = x$.

Rješenje. Skiciramo S. Jednadžba pravca kroz $(0,2)$ i $(2,0)$ je $y = -x + 2$.



Slika 10.9: Područje S

Presjek kružnice i pravca dobijemo rješavanjem

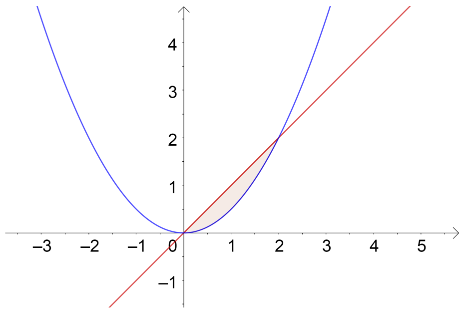
$$x^2 + (-x + 2 - 1)^2 = 1$$
$$2x^2 - 2x = 0$$
$$2x(x - 1) = 0$$
$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 1$$
$$y_1 = 2 \qquad y_2 = 1$$

Zapisujemo integral, npr. u poretku po x pa po y. Područje S proteže se po x od $x = 0$ do $x = 1$, a po y od pravca $f_1(x) = -x + 2$ do gornje polukružnice $f_2(x) = 1 + \sqrt{1 - x^2}$ $(x^2 + (y - 1)^2 = 1 \Rightarrow (y - 1)^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{1 - x^2})$.

$$I = \int_0^1 dx \int_{-x+2}^{1+\sqrt{1-x^2}} x\,dy = \int_0^1 xy \Big|_{-x+2}^{1+\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 (-x + x^2 + x\sqrt{1 - x^2})\,dx =$$
$$= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 + \int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\,dx = \begin{bmatrix} t = 1 - x^2 & x_1 = 0 \to t_1 = 1 \\ dt = -2x\,dx & x_2 = 1 \to t_2 = 0 \\ x\,dx = -\frac{1}{2}\,dt & \end{bmatrix} =$$
$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{t}\,dt = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^0 = \frac{1}{6}$$

Zadatak 10.0.8. Izračunajte $\iint\limits_S \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ ako je S područje omeđeno parabolom $y = \frac{x^2}{2}$ i pravcem $y = x$.

Rješenje. Najprije skiciramo S.



Slika 10.10: Područje S

Presjek pravca i parabole dobivamo na sljedeći način.

$$\frac{x^2}{2} = x$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

$$y_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

Postavljamo integral, npr. najprije po x zatim po y. Po x se područje S proteže od 0 do 2, a po y od parabole $f_1(x) = \frac{x^2}{2}$ do pravca $f_2(x) = x$.

$$I = \int_0^2 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{x} \frac{x}{x^2+y^2}\, dy = \int_0^2 x \int_{\frac{x^2}{2}}^{x} \frac{1}{x^2+y^2}\, dy\, dx = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \Big|_{\frac{x^2}{2}}^{x} dx =$$

$$= \int_0^2 \left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{x}{2}\right) dx = \int_0^2 \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{2}\right) dx = \frac{\pi}{4} \int_0^2 1\, dx - \int_0^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2}\, dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg} \frac{x}{2} & dv = dx \\ du = \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} \cdot \frac{1}{2}\, dx & v = x \\ du = \frac{2}{4+x^2}\, dx & \end{bmatrix} = \frac{\pi}{4} x \Big|_0^2 - \left[x \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2x}{4+x^2}\, dx \right] =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left[2 \operatorname{arctg} 1 - 0 \operatorname{arctg} 0 - \int_0^2 \frac{2x}{4+x^2}\, dx \right] = \begin{bmatrix} t = 4 + x^2 & x_1 = 0 \to t_1 = 4 \\ dt = 2x\, dx & x_2 = 2 \to t_2 = 8 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \int_4^8 \frac{1}{t}\, dt \right) = \ln |t| \Big|_4^8 = \ln 2$$

10.1 Dvostruki integrali - polarne koordinate

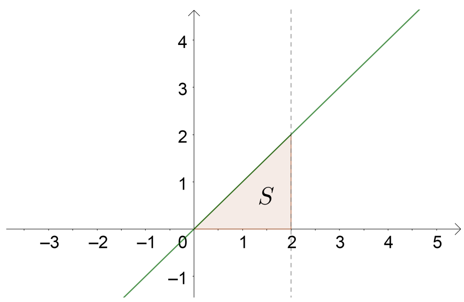
Sjetimo se polarnih koordinata kod jednostrukih integrala u računanju površina likova (Lekcija 5). Formula koju smo tamo koristili za računanje površina izvedena je pomoću dvostrukih integrala.
Ovdje nas zanima kako transformirati dvostruki integral zapisan u Kartezijevim koordinatama u dvostruki integral u polarnim koordinatama.
Poveznica tih dviju vrsta koordinata je $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$. Simbolički zapisana formula je

$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)r\,dr\,d\varphi$$

pri čemu je S u prvom integralu opisan pomoću Kartezijevih koordinata, a u drugom integralu pomoću polarnih koordinata. Integral na desnoj strani ima dodatno i r koji predstavlja Jacobijan zamjene koordinati.

Zadatak 10.1.1. Transformirajte $\int_0^2 dx \int_0^x f(x,y)\,dy$ u integral s polarnim koordinatama.

Rješenje. Skiciramo područje S.



Slika 10.11: Područje S

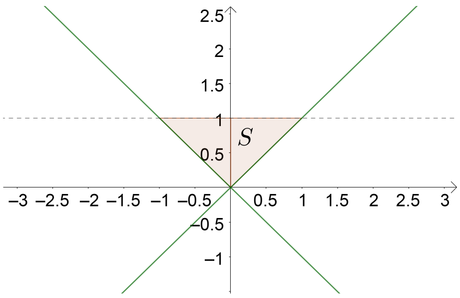
Sjetimo se, kod polarnih koordinata r označava udaljenost točke od ishodišta, a kut φ je kut između spojnice te točke i pozitivnog dijela osi x.
Najudaljenije točke područja S leže na pravcu $x = 2$. Kako je u polarnim koordinatama $x = r\cos\varphi$, slijedi da je $r = \frac{2}{\cos\varphi}$.
Kut φ je između 0 i $\frac{\pi}{4}$ jer je koeficijent smjera pravca $y = x$ jednak 1, a kut koji pravac zatvara s pozitivnim dijelom osi x i koeficijent smjera tog pravca povezani su na način da je $\operatorname{tg}\varphi = k$. Budući da je ishodište dio područja S, najmanji r je 0.

S u polarnim koordinatam uvijek opisujemo najprije po φ, a onda po r, tj. integral je

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, dr.$$

Zadatak 10.1.2. Transformirajte $\iint\limits_S f(x^2+y^2)\, dx\, dy$ ako je S područje omeđeno pravcima $y = x$, $y = -x$ i $y = 1$.

Rješenje. Skiciramo S.



Slika 10.12: Područje S

Kao i u prethodnom zadatku, na temelju koeficijenta smjera pravaca dobivamo da je $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Budući da je ishodište dio područja S, najmanji r je 0. Najudaljenije točke od ishodišta su one na pravcu $y = 1$. U polarnim koordinatama je $y = r\sin\varphi$ pa je $r = \frac{1}{\sin\varphi}$.
U argumentu funkcije javlja se $x^2 + y^2 = (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = r^2$.

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} f(r^2) r\, dr$$

Zadatak 10.1.3. Prelaskom na polarne koordinate izračunajte $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$ ako je S područje omeđeno kružnicom $x^2 + y^2 = 2x$.

Rješenje. Najprije napišemo jednadžbu kružnice u standardnom obliku.

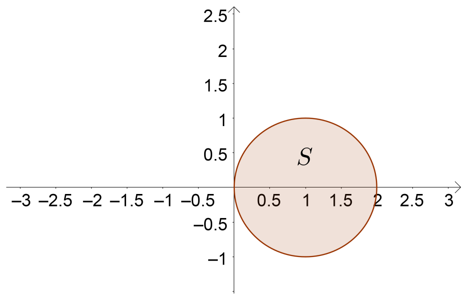
$$x^2 + y^2 = 2x$$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0$$

$$(x^2 - 2x + 1) - 1 + y^2 = 0$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$S(1,0),\ r = 1$$



Slika 10.13: Područje S

Spojnica točaka koje su u S s pozitivnim dijelom osi x zatvara kut od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$. Najbliža točka ishodišta koja je i u S je samo ishodište pa je najmanji r jednak 0. Najudaljenije točke iz S su točke s ruba kruga, tj. točke na kružnici. Uvrštavanjem polarnih koordinata u jednadžbu kružnice dobivamo gornju granicu integrala za r.

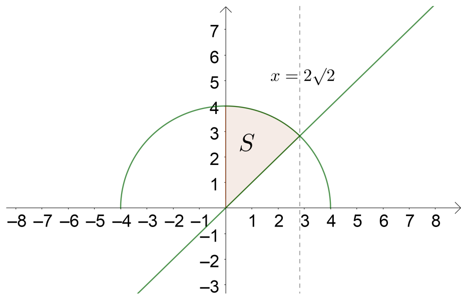
$$(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = 2r\cos\varphi$$
$$r^2 = 2r\cos\varphi$$
$$r = 2\cos\varphi$$

Podintegralna funkcija je $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = r$.

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r\cdot r\,dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3}\Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{3}\cdot 8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\,d\varphi = \\
&= \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi(1-\sin^2\varphi)\,d\varphi = \\
&= \begin{bmatrix} t = \sin\varphi & \varphi_1 = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow t_1 = \sin -\frac{\pi}{2} = -1 \\ dt = \cos\varphi\,d\varphi & \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{8}{3}\int_{-1}^{1}(1-t^2)\,dt = \frac{8}{3}\left(t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{32}{9}
\end{aligned}$$

Zadatak 10.1.4. Prelaskom na polarne koordinate izračunajte $\int_0^{2\sqrt{2}} dx \int_x^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy$.

Rješenje. Skiciramo S. Gornja granica drugog integrala je $y = \sqrt{16-x^2}$ što predstavlja gornju polukružnicu kružnice $x^2+y^2 = 16$.



Slika 10.14: Područje S

Kut φ kreće se od $\frac{\pi}{4}$ do $\frac{\pi}{2}$. Ishodište je dio područja S pa je najmanji r, $r = 0$. Najudaljenije točke područja S su na kružnici.

$$(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = 16$$

$$r^2 = 16$$

$$r = 4$$

Podintegralna funkcija je $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2} = r$.

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^4 r \cdot r \, dr = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3} \, dr = \frac{64}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{16\pi}{3}$$

10.2 Dvostruki integrali - površina

Pomoću dvostrukih integrala površina područja S računa se tako da se za podintegralnu funkciju $f(x, y)$ uvrsti $f(x, y) = 1$.

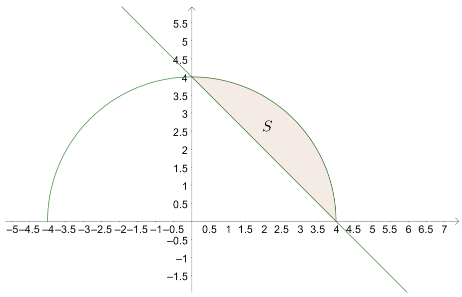
$$P(S) = \iint\limits_S dx \, dy$$

Kada S opišemo sukladno skici (odredimo granice dvostrukog integrala), lagano dolazimo do formule za površinu liku koju znamo iz Lekcije 5, $P = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) \, dx$.
U polarnim koordinatama formula za površinu S je

$$P(S) = \iint\limits_S r \, dr \, d\varphi.$$

Zadatak 10.2.1. Skicirajte površinu zadanu s $\int_0^4 dy \int_{4-y}^{\sqrt{16-y^2}} dx$. Transformirajte zadani integral u polarne koordinate.

Rješenje. Skiciramo S. Po y od 0 do 4, a po x od $x = 4 - y$, što je pravac $y = 4 - x$, do $x = \sqrt{16 - y^2}$ što je desna polukružnica kružnice $x^2 + y^2 = 16$.



Slika 10.15: Područje S

Kut φ ide od 0 do $\frac{\pi}{2}$.

Najbliže točke ishodištu, a da su u S, leže na pravcu $y = 4 - x$. Uvrstimo li polarne koordinate, imamo

$$r \sin\varphi = 4 - r\cos\varphi$$
$$r(\sin\varphi + \cos\varphi) = 4$$
$$r = \frac{4}{\sin\varphi + \cos\varphi}.$$

Najudaljenije točke ishodištu, a da su u S, leže na kružnici $x^2 + y^2 = 16$. Uvrstimo li polarne koordinate, imamo

$$(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = 16$$
$$r^2 = 16$$
$$r = 4.$$

Integral kojim dobivamo površinu je

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{4}{\sin\varphi + \cos\varphi}}^{4} r\,dr.$$

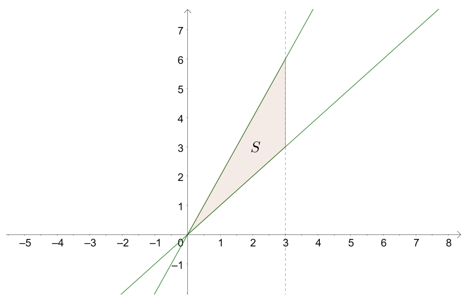
Zadatak 10.2.2. Skicirajte i izračunajte površinu danu s $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int_0^{\frac{3}{\cos\varphi}} r\,dr$. Tranformirajte u Kartezijeve koordinate.

Rješenje. Odredimo kojim pravcima odgovaraju kutevi $\frac{\pi}{2}$ i $\operatorname{arctg} 2$.

$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow y = x$

$\operatorname{tg} \operatorname{arctg} 2 = 2 \Rightarrow y = 2x$

Najveći r je $r = \frac{3}{\cos\varphi}$ što daje $r\cos\varphi = 3$ što prepoznajemo kao $x = 3$.



Slika 10.16: Područje S

Integral u Kartezijevim koordinatama je

$$P(S) = \int_0^3 dx \int_x^{2x} 1\, dy = \int_0^3 y \Big|_x^{2x} dx = \int_0^3 x\, dx = \frac{9}{2}.$$

Primijetimo da je integral izražen u novim koordinatama lakši za računanje nego zadani integral.

Zadatak 10.2.3. Odredite površinu lika omeđenog s $y^2 = 10x + 25$ i $y^2 = -6x + 9$.

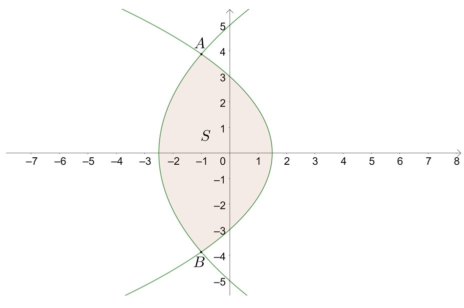
Rješenje. Presječne točke zadanih parabola dobivamo

$$10x + 25 = -6x + 9$$

$$16x = -16$$

$$x = -1 \Rightarrow y^2 = 10 \cdot (-1) + 25 = 15 \Rightarrow y_{1,2} = \pm\sqrt{15}.$$

To su točke $A(-1, \sqrt{15})$ i $B(-1, -\sqrt{15})$.



Slika 10.17: Područje S

Zapisujemo dvostruki integral s podintegralnom funkcijom $f(x, y) = 1$ jer tražimo površinu lika. Primijetimo da ako prvo opisujemo S po x, a zatim po y, da se mijenjaju funkcije $f_1(x)$ i $f_2(x)$ (do -1 to su grane parabole $y^2 = 10x + 25$, a nakon -1 to su grane parabole $y^2 = -6x + 9$). Zato je bolje integral postaviti najprije po y zatim po x.

$y^2 = 10x + 25 \Rightarrow x = \frac{1}{10}(y^2 - 25) \Rightarrow g_1(y) = \frac{1}{10}(y^2 - 25)$

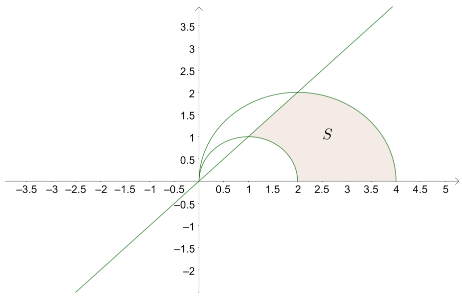
$y^2 = -6x + 9 \Rightarrow x = \frac{1}{6}(-y^2 + 9) \Rightarrow g_2(y) = \frac{1}{6}(-y^2 + 9)$

$$P(S) = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} dy \int_{\frac{1}{10}(y^2-15)}^{\frac{1}{6}(-y^2+9)} 1\, dx = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} x \Big|_{\frac{1}{10}(y^2-25)}^{\frac{1}{6}(-y^2+9)} dy = \int_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} \left(-\frac{4}{15}y^2 + 4\right) dy =$$

$$= \left(-\frac{4}{45}y^3 + 4y\right) \Big|_{-\sqrt{15}}^{\sqrt{15}} = \frac{16}{3}\sqrt{15}$$

Zadatak 10.2.4. Prelaskom na polarne koordinate izračunajte površinu lika omeđenog s $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$ i $y = 0$.

Rješenje. Jednakost $x^2 + y^2 = 2x$ predstavlja kružnicu $(x-1)^2 + y^2 = 1$, a $x^2 + y^2 = 4x$ kružnicu $(x-2)^2 + y^2 = 4$.



Slika 10.18: Područje S

Lik nam je lakše opisati u polarnim koordinatama. Kut φ kreće se od 0 do $\frac{\pi}{4}$. Točke lika najbliže ishodištu su one na manjoj kružnici

$$x^2 + y^2 = 2x$$
$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 2r\cos\varphi$$
$$r^2 = 2r\cos\varphi$$
$$r = 2\cos\varphi.$$

Točke lika najudaljenije od ishodišta su one na većoj kružnici

$$x^2 + y^2 = 4x$$
$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 4r\cos\varphi$$
$$r^2 = 4r\cos\varphi$$
$$r = 4\cos\varphi.$$

$$P(S) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} 1 \cdot r\, dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2 \Big|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{2} 12 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= 6 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2\varphi)}{2}\, d\varphi = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos(2\varphi))\, d\varphi = 3\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin(2\varphi)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2}$$

10.3 Dvostruki integrali - volumen

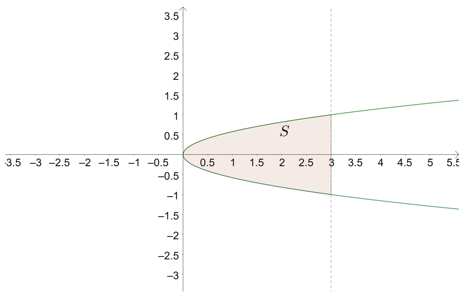
Pomoću dvostrukih integrala možemo izračunati i volumene tijela koja su odozgo omeđena grafom funkcije $f(x, y)$. Formula je sljedeća:

$$V = \iint_S f(x, y)\, dx\, dy$$

pri čemu je S projekcija dijela grafa funkcije f na xy-ravninu. Lik S nalazi se u xy-ravnini ($z = 0$) pa njega najčešće dobivamo uvrštavanjem 0 na mjestu z u jednadžbama ploha koje se javljaju u zadatku. Podintegralna funkcija je $f(x, y) = z$.

Zadatak 10.3.1. (Zadatak s ispita)
Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $x = 3$, $x = 3y^2$, $z = 0$ i $z = 5$.

Rješenje. Jednadžbom $z = 0$ dana je xy-ravnina. Ploha koja odozgo omeđuje tijelo dana je s $z = 5$ pa je $f(x, y) = 5$. Lik S određuju $x = 3$ i $y^2 = \frac{1}{3}x$.



Slika 10.19: Područje S

$$V = \int_{-1}^{1} dy \int_{3y^2}^{3} 5\, dx = \int_{-1}^{1} 5x \Big|_{3y^2}^{3} dy = \int_{-1}^{1} (15 - 15y^2)\, dx = (15y - 5y^3)\Big|_{-1}^{1} = 20$$

Zadatak možemo postaviti još na dva načina:

$$V = \int_0^3 dx \int_{-\sqrt{\frac{1}{3}x}}^{\sqrt{\frac{1}{3}x}} 5\, dy$$

ili koristeći simetriju lika S s obzirom na os x

$$V = 2\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{\frac{1}{3}x}} 5\, dy.$$

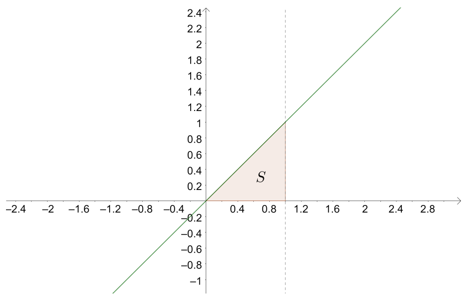
Zadatak 10.3.2. Izračunajte volumen tijela omeđenog s $x^2 + z^2 = 1$ i $y = x$ te uz uvjete $x \geq 0$, $z \geq 0$ i $y \geq 0$.

Rješenje. $z = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$

Biramo $x = 1$ jer je uvjet da $x \geq 0$. Lik S određen je pravcem $x = 1$, $y = x$ i koordinatnim osima. Podintegralnu funkciju dobivamo iz jednakosti u kojoj se javlja z.

$x^2 + z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm\sqrt{1 - x^2}$

Biramo $z = \sqrt{1 - x^2}$ jer je uvjet $z \geq 0$ pa je $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2}$.



Slika 10.20: Područje S

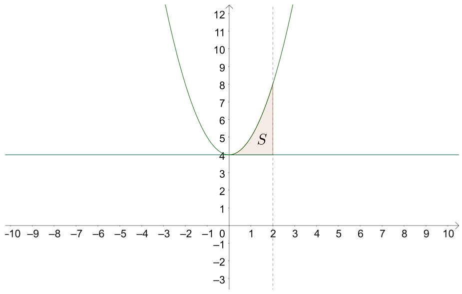
$$V = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{1 - x^2}\, dy = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} y \Big|_0^x = \int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\, dx =$$

$$= \begin{bmatrix} t = 1 - x^2 & x_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 1 \\ dt = -2x\, dx & x_2 = 1 \Rightarrow t_2 = 0 \\ x\, dx = -\frac{1}{2}\, dt & \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\int_1^0 t^{\frac{1}{2}}\, dt = \frac{1}{3}$$

Zadatak 10.3.3. Izračunajte volumen tijela omeđenog s $x = 2$, $y = 4$, $z = 0$, $y = x^2 + 4$ i $z = x^2$.

Rješenje. Jednakost $z = 0$ predstavlja xy-ravninu.

Lik S određen je s $x = 2$, $y = 4$, $y = x^2 + 4$, a $f(x, y) = x^2$.



Slika 10.21: Područje S

$$V = \int_0^2 dx \int_4^{x^2+4} x^2\, dy = \int_0^2 x^2 y \Big|_4^{x^2+4} dx = \int_0^2 x^4\, dx = \frac{32}{5}$$