Poglavlje 12

Obične diferencijalne jednadžbe 1. reda

Diferencijalne jednadžbe su oblika $f(x, y, y', y'', \dots) = 0$, tj. funkcija f ovisi o varijabli x i funkciji $y(x)$ te njezinim derivacijama.
Red diferencijalne jednadžbe je red najveće derivacije od $y(x)$ koja se u njoj pojavljuje.

Primjer 12.0.1. $y'''(x) + \frac{x}{\ln y(x)} = 0 \to$ red 3

Rješenje diferencijalne jednadžbe je funkcija $y(x)$, odnosno skup funkcija (ukoliko nisu zadani početni uvjeti).
Kod zapisa diferencijalnih jednadžbi radi preglednosti izostavljamo pisati ovisnost y o x, no ta ovisnost vrijedi.

Primjer 12.0.2. a) Provjerite je li $y = 5x^2$ rješenje diferencijalne jednadžbe $xy' = 2y$.
$y = 5x^2$ i $y' = 10x$ uvrstimo u $xy' = 2y$ te dobivamo da je $10x^2 = 10x^2$.

b) Provjerite je li $y = e^x$ rješenje diferencijalne jednadžbe $y' = y$. Je li i $y = Ce^x$ rješenje?
$y = e^x$ pa je $y' = e^x$ te iz diferencijalne jednadžbe slijedi da je $e^x = e^x$. Na isti način dobivamo da je i $y = Ce^x$ rješenje.

12.1 Separacija varijabli

Separacija varijabli je jedna od metoda kojom rješavamo diferencijalne jednadžbe. Nju koristimo kada jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$y' = f(x)g(y),$$

odnosno kad je desnu stranu moguće separirati na dio koji ovisi samo o x i dio koji ovisi samo o y.

Postupak rješavanja je:

1. zapišemo y' kao $\dfrac{dy}{dx}$,
2. množenjem cijele jednadžbe dovedemo sve što ovisi o y i dy na lijevu stranu, a sve što ovisi o x i dx na desnu stranu,
3. integriramo.

Zadatak 12.1.1. Riješite diferencijalnu jednadžbu $xyy' = 1 - x^2$.

Rješenje.

$$
\begin{gathered}
xyy' = 1 - x^2 \\
xy\frac{dy}{dx} = 1 - x^2 \quad / \cdot \frac{1}{x} \quad / \cdot dx \\
y\,dy = \frac{1 - x^2}{x}\,dx \\
\int y\,dy = \int \frac{1 - x^2}{x}\,dx \\
\int y\,dy = \int \left(\frac{1}{x} - x\right)\,dx \\
\frac{y^2}{2} + C_1 = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C_2 \quad / \cdot 2 \\
y^2 + 2C_1 = 2\ln|x| - x^2 + 2C_2 \\
y^2 = 2\ln|x| - x^2 + C,\, C \in \mathbb{R}
\end{gathered}
$$

Budući da sve konstante možemo "okrupniti" u jednu, dovoljno je kod integriranja pisati konstantu samo na desnoj strani.

Zadatak 12.1.2. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y' = -\dfrac{y}{x}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{y}{x} \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x} \quad / \cdot \frac{1}{y} \quad / \cdot dx \\ \frac{1}{y}\,dy &= -\frac{1}{x}\,dx \\ \int \frac{1}{y}\,dy &= -\int \frac{1}{x}\,dx \\ \ln|y| &= -\ln|x| + C \\ \ln|y| &= \ln C - \ln|x| \\ \ln|y| &= \ln\frac{C}{|x|} \\ |y| &= \frac{C}{|x|} \\ y &= \frac{C}{x} \end{aligned}$$

Zadatak 12.1.3. Riješite diferencijalnu jednadžbu $\operatorname{tg} x\,dy - y\,dx = 0$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x\,dy &= y\,dx \quad / \cdot \frac{1}{y} \quad / \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \\ \frac{1}{y}\,dy &= \frac{1}{\operatorname{tg} x}\,dx \\ \int \frac{1}{y}\,dy &= \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx \\ \ln|y| &= \ln|\sin x| + C \\ \ln|y| &= \ln|\sin x| + \ln C \\ \ln|y| &= \ln C|\sin x| \\ |y| &= C|\sin x| \\ y &= C\sin x \end{aligned}$$

Pomoćni račun

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx &= \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{bmatrix} = \\ &= \int \frac{1}{t}\,dt = \\ &= \ln|t| + C = \\ &= \ln|\sin x| + C \end{aligned}$$

Diferencijalna jednadžba koja je zadana bez početnog uvjeta (kao ove koje smo dosad riješili) ima tzv. opće rješenje koje odgovara skupu funkcija (zapis s C).

Diferencijalna jednadžba koja je zadana s početnim uvjetom/uvjetima ima tzv. partikularno rješenje (nema C u zapisu jer dobijemo konkretan C za koji vrijedi uvjet/uvjeti).

Zadatak 12.1.4. Nađite partikularno rješenje koje zadovoljava $(1+e^x)yy' = e^x$, $y(0) = 1$.

Rješenje. Najprije moramo dobiti opće rješenje.

$$\begin{aligned}
(1+e^x)yy' &= e^x \\
(1+e^x)y\frac{dy}{dx} &= e^x \quad / \cdot \frac{1}{1+e^x} \quad / \cdot dx \\
y\,dy &= \frac{e^x}{1+e^x}\,dx \\
\int y\,dy &= \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx \\
\frac{y^2}{2} &= \ln(1+e^x) + C \\
y^2 &= 2\ln(1+e^x) + C
\end{aligned}$$

Pomoćni račun

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx &= \begin{bmatrix} t = 1+e^x \\ dt = e^x\,dx \end{bmatrix} = \\
&= \int \frac{1}{t}\,dt = \\
&= \ln|t| + C = \\
&= \ln(1+e^x) + C
\end{aligned}$$

Kako bismo odredili konstantu C uvrštavamo $x=0$, $y=1$.

$$1 = 2\ln(1+e^0) + C$$

$$C = 1 - 2\ln 2$$

Partikularno rješenje je ono za koje vrijedi $y^2 = 2\ln(1+e^x) + 1 - 2\ln 2$.

U ovom poglavlju obradit ćemo i neke kompliciranije diferencijalne jednadžbe koje se rješavaju metodom separacije varijabli, no njoj prethodi jedna supstitucija. Jednadžbe oblika $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ supstitucijom $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux$ svodimo na novu diferencijalnu jednadžbu koju rješavamo metodom separacije. Pritom u također ovisi o x, tj. $y(x) = u(x)x$. Zato je derivacija $y'(x) = u'(x)\cdot x + u(x)\cdot 1$, tj. $y' = u'x + u$.

Zadatak 12.1.5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y' = \frac{y}{x} - 1$.

Rješenje. Ovaj izraz ne možemo separirati. Radimo supstituciju $u = \frac{y}{x}$ iz koje slijedi da je $y' = u'x + u$.

$$
\begin{aligned}
u'x + u &= u - 1 \\
u'x &= -1 \\
\frac{du}{dx}x &= -1 \quad / \cdot \frac{1}{x} \quad / \cdot dx \\
du &= -\frac{1}{x}\,dx \\
\int du &= -\int \frac{1}{x}\,dx \\
u &= -\ln|x| + C \\
u &= \ln C - \ln|x| \\
u &= \ln\frac{C}{|x|} \\
u &= \ln\frac{C}{x} \\
\frac{y}{x} &= \ln\frac{C}{x} \\
y &= x\ln\frac{C}{x}
\end{aligned}
$$

Zadatak 12.1.6. Odredite partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $(x^2 + y^2)\,dx = 2xy\,dy$, $y(4) = 0$.

Rješenje. Vidimo da diferencijalnu jednadžbu ne možemo separirati. Probamo transformirati jednadžbu da postane prikladna za gore navedenu supstituciju.

$$
\begin{aligned}
2xy\,dy &= \left(x^2 + y^2\right)\,dx \quad / \cdot \frac{1}{dx} \\
2xy\,\frac{dy}{dx} &= \left(x^2 + y^2\right) \\
2xy\,y' &= x^2 + y^2
\end{aligned}
$$

Kako dobiti izraz koji sadrži $\frac{y}{x}$?

$$
\begin{aligned}
2xyy' &= x^2 + y^2 \quad / \cdot \frac{1}{x^2} \\
\frac{2xyy'}{x^2} &= \frac{x^2 + y^2}{x^2} \\
\frac{2yy'}{x} &= 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2
\end{aligned}
$$

Uvodimo supstituciju: $u = \frac{y}{x}$ i $y' = u'x + u$.

Pomoćni račun

$$\begin{aligned}
2u(u'x+u) &= 1+u^2\\
2uxu' + 2u^2 &= 1+u^2\\
2uxu' &= 1-u^2\\
2ux\frac{du}{dx} &= 1-u^2 \quad / \cdot \frac{1}{x} \quad / \cdot dx \quad / \cdot \frac{1}{1-u^2}\\
\frac{2u}{1-u^2}\,du &= \frac{1}{x}\,dx\\
-\ln|1-u^2| &= \ln|x| + \ln C\\
\ln\frac{1}{|1-u^2|} &= \ln(C|x|)\\
\frac{1}{|1-u^2|} &= C|x|\\
\frac{1}{\left|1-\frac{y^2}{x^2}\right|} &= C|x|\\
\frac{x^2}{|x^2-y^2|} &= C|x|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{2u}{1-u^2}\,du &= \begin{bmatrix} t = 1-u^2 \\ dt = -2u\,du \\ 2u\,du = -dt \end{bmatrix} =\\
&= \int \frac{-dt}{t} =\\
&= -\ln|t| + C =\\
&= -\ln|1-u^2| + C
\end{aligned}$$

Uvrstimo li početni uvjet $x = 4$, $y = 0$, dobivamo da je $C = \frac{1}{4}$, tj. partikularno rješenje je

$$|x^2 - y^2| = \frac{4x^2}{|x|}.$$

Zadatak 12.1.7. Riješite sljedeću diferencijalnu jednadžbu $y' = -\dfrac{x+y}{x}$.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
y' &= -\left(\frac{x}{x} + \frac{y}{x}\right)\\
y' &= -1 - \frac{y}{x}
\end{aligned}$$

Uvodimo supstituciju $u = \frac{y}{x}$, $y' = u'x + u$.

$$\begin{aligned} u'x + u &= 1 - u \\ u'x &= -1 - 2u \\ \frac{du}{dx}x &= -(1+2u) \quad / \cdot \frac{1}{1+2u} \quad / \cdot \frac{1}{x} \quad / \cdot dx \\ \frac{1}{1+2u}\,du &= -\frac{1}{x}\,dx \\ \int \frac{1}{1+2u}\,du &= -\int \frac{1}{x}\,dx \\ \frac{1}{2}\ln|1+2u| &= -\ln|x| + \ln C \\ \ln|1+2u| &= -2\ln|x| + \ln C \\ \ln|1+2u| &= \ln\frac{C}{x^2} \\ |1+2u| &= \frac{C}{x^2} \end{aligned}$$

Pomoćni račun

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+2u}\,du &= \begin{bmatrix} t = 1+2u \\ dt = 2\,du \\ du = \frac{1}{2}\,dt \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \\ &= \frac{1}{2}\ln|t| + C = \\ &= \frac{1}{2}\ln|1+2u| + C \end{aligned}$$

Vratimo li suptituciju, imamo:

$$\begin{aligned} 1 + 2\frac{y}{x} &= \frac{C}{x^2} \\ y &= \frac{1}{2}\left(\frac{C}{x} - x\right). \end{aligned}$$

12.2 Linearne diferencijalne jednadžbe 1. reda

Ova vrsta diferencijalnih jednadžbi sadržava najviše prvu derivaciju od y, a linearnost znači da je ovisnost o y i y' linearna.

Primjer 12.2.1. $2xy' + \sin xy = x^2 \cos x$ je linearna diferencijalna jednadžba.
$2y' + y^2 x = x^3 \ln x$ nije linearna diferencijalna jednadžba (zbog y^2).

Sve linearne diferencijalne jednadžbe možemo svesti na oblik

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

pri čemu su P i Q funkcije ovisne samo o varijabli x.
Postupak rješavanja ovakvih diferencijalnih jednadžbi naziva se metoda varijacije konstante, a provodi se u dva koraka:

1. metodom separacije riješimo homogenu diferencijalnu jednadžbu $y' + P(x)y = 0$,

2. na mjestu gdje se u rješenju prvog koraka javlja konstanta C napišemo da se zapravo radi o funkciji $C(x)$ te tako zapisano rješenje uvrštavamo u početnu diferencijalnu jednadžbu: $y' + P(x)y = Q(x)$. Iz te jednakosti dobijemo funkciju $C(x)$.

Zadatak 12.2.2. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $y' - \frac{y}{x} = x$.

Rješenje. Zadatak rješavamo u dva koraka.

1. homogena

$$\begin{aligned} y' - \frac{1}{x}y &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x}y \quad / \cdot \frac{1}{y} \quad / \cdot dx \\ \frac{1}{y}\,dy &= \frac{1}{x}\,dx \\ \int \frac{1}{y}\,dy &= \int \frac{1}{x}\,dx \\ \ln|y| &= \ln|x| + \ln C \\ \ln|y| &= \ln(C|x|) \\ y &= Cx \end{aligned}$$

2. varijacija konstante

$$\begin{aligned} y &= C(x)x \\ y' &= C'(x)x + C(x)\cdot 1 \end{aligned}$$

Uvrstimo u početnu diferencijalnu jednadžbu: $y' - \frac{1}{x}y = x$.

$$\begin{aligned} C'(x)x + C(x) - \frac{1}{x}C(x)x &= x \\ C'(x)x + C(x) - C(x) &= x \\ C'(x)x &= x \quad / : x \\ C'(x) &= 1 \\ C(x) = \int 1\,dx &= x + D,\ D \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Konačno rješenje: $y = (x + D)x,\ D \in \mathbb{R}$.

Zadatak 12.2.3. Odredite partikularno rješenje koje zadovoljava $xy' + y - e^x = 0$, $y(1) = 0$.

Rješenje.

$$\begin{aligned} xy' + y - e^x &= 0 \quad / \cdot \frac{1}{x} \\ y' + \frac{1}{x}y &= \frac{e^x}{x} \end{aligned}$$

1. homogena

$$y' + \frac{1}{x}y = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}y \quad / \cdot \frac{1}{y} \quad / \cdot dx$$
$$\frac{1}{y}\,dy = -\frac{1}{x}\,dx$$
$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int -\frac{1}{x}\,dx$$
$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C$$
$$\ln|y| = \ln\frac{C}{|x|}$$
$$y = \frac{C}{x}$$

2. varijacija konstante

$$y = \frac{C(x)}{x}$$
$$y' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2}$$

Uvrstimo u početnu diferencijalnu jednadžbu: $xy' + y - e^x = 0$.

$$x \cdot \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x} - e^x = 0$$
$$\frac{C'(x)x}{x} - \frac{C(x)}{x} + \frac{C(x)}{x} - e^x = 0$$
$$C'(x) = e^x$$
$$C(x) = \int e^x\,dx = e^x + D$$

Opće rješenje je $y = \dfrac{e^x + D}{x}$, $D \in \mathbb{R}$.

Uvrstimo li uvjet $x = 1$, $y = 0$, dobivamo da je $D = -e$ pa je konačno rješenje $y = \dfrac{e^x - e}{x}$.

Zadatak 12.2.4. Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $\dfrac{dy}{dx} + 2\dfrac{y}{x} = x^3$.

Rješenje. Zadana jednadžba je jednaka jednadžbi

$$y' + \frac{2}{x}y = x^3.$$

1. homogena

$$y' + \frac{2}{x}y = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x} \quad / \cdot \frac{1}{y} \quad / \cdot dx$$
$$\frac{1}{y}\,dy = -\frac{2}{x}\,dx$$
$$\int \frac{1}{y}\,dy = -2\int \frac{1}{x}\,dx$$
$$\ln|y| = -2\ln|x| + \ln C$$
$$\ln|y| = \ln\frac{C}{x^2}$$
$$y = \frac{C}{x^2}$$

2. varijacija konstante

$$y = \frac{C(x)}{x^2}$$
$$y' = \frac{C'(x)x^2 - C(x)\cdot 2x}{x^4}$$

Uvrstimo to u početnu diferencijalnu jednadžbu: $y' + \dfrac{2}{x}y = x^3$.

$$\frac{C'(x)x^2 - 2xC(x)}{x^4} + 2\frac{2}{x}\cdot\frac{C(x)}{x^2} = x^3$$
$$\frac{C'(x)}{x^2} - \frac{2C(x)}{x^3} + \frac{2C(x)}{x^3} = x^3$$
$$C'(x) = x^5$$
$$C(x) = \int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + D,\ D \in \mathbb{R}$$

Konačno rješenje je $y = \dfrac{x^4}{6} + \dfrac{D}{x^2}$.

Zadatak 12.2.5. Odredite partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $y' - y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$, $y(0) = 0$.

Rješenje. 1. homogena

$$
\begin{aligned}
y' - y\operatorname{tg} x &= 0\\
\frac{dy}{dx} &= y\operatorname{tg} x \quad / \cdot \frac{1}{y} \quad / \cdot dx\\
\frac{1}{y}\,dy &= \operatorname{tg} x\,dx\\
\int \frac{1}{y}\,dy &= \int \operatorname{tg} x\,dx\\
\ln|y| &= -\ln|\cos x| + \ln C\\
\ln|y| &= \ln\frac{C}{|\cos x|}\\
y &= \frac{C}{\cos x}
\end{aligned}
$$

2. varijacija konstante

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{C(x)}{\cos x}\\
y' &= \frac{C'(x)\cos x - C(x)(-\sin x)}{\cos^2 x}
\end{aligned}
$$

Uvrstimo to u početnu diferencijalnu jednadžbu: $y' - y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{C'(x)\cos x}{\cos^2 x} + \frac{C(x)\sin x}{\cos^2 x} - \frac{C(x)}{\cos x}\operatorname{tg} x &= \frac{1}{\cos x}\\
\frac{C'(x)}{\cos x} + \frac{C(x)\sin x}{\cos^2 x} - \frac{C(x)\sin x}{\cos^2 x} &= \frac{1}{\cos x}\\
C'(x) &= 1\\
C(x) = \int 1\,dx &= x + D
\end{aligned}
$$

Opće rješenje je $y = \dfrac{x + D}{\cos x}$.
Partikularno rješenje dobivamo za $y = 0$ i $x = 0$ iz čega slijedi da je $D = 0$.
Konačno rješenje je $y = \dfrac{x}{\cos x}$.

Napomena 12.2.6. Kod drugog koraka uvijek mora doći do poništavanja dijela izraza u kojem se javlja $C(x)$. Mora ostati samo dio s $C'(x)$ iz kojeg onda integriranjem dobivamo funkciju $C(x)$.

12.3 Integralna krivulja

Integralna krivulja, odnosno porodica integralnih krivulja je grafički prikaz općeg rješenja diferencijalne jednadžbe.
Već smo spomenuli da je opće rješenje skup funkcija, a ne jedna funkcija jer se u zapisu javlja konstanta C. Razlog tome leži u postupku dobivanja općeg rješenje (rješenje neodređenog integrala).

Zadatak 12.3.1. Odredite diferencijalnu jednadžbu čije je rješenje zadana porodica funkcija. Skicirajte tu porodicu.

a) $y(x) = Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$, b) $y(x) = Cx$, $C \in \mathbb{R}$, c) $y(x) = Ce^x$, $C \in \mathbb{R}$, d)* $y(x) = C_1(x - C_2)^2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

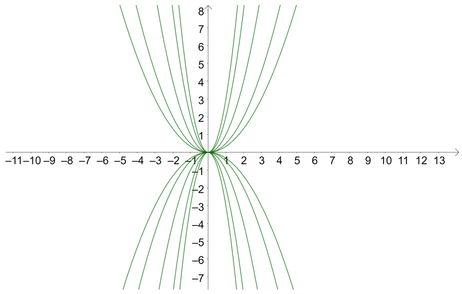
Rješenje.

a)

$$y = Cx^2$$
$$y' = 2Cx$$
$$C = \frac{y'}{2x}$$

Vraćamo se s konstantom u zadanu porodicu.

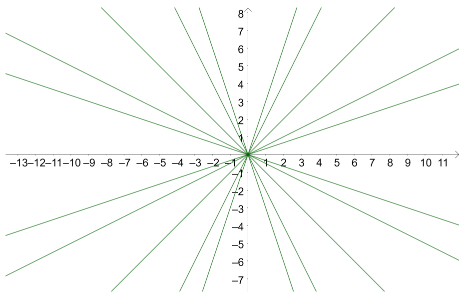
$$y = Cx^2$$
$$y = \frac{y'}{2x}x^2$$
$$y = \frac{1}{2}y'x$$
$$y'x - 2y = 0$$



Slika 12.1: $y(x) = Cx^2$ su parabole kojima je tjeme u $(0, 0)$, a zbog $C \in \mathbb{R}$ mogu biti i konveksne i konkavne.

b)

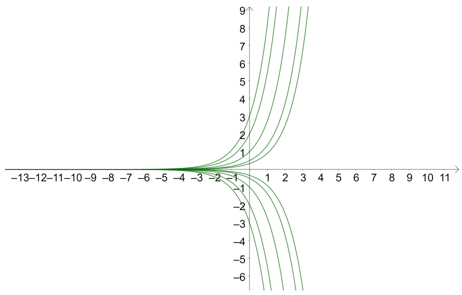
$$y = Cx$$
$$y' = C$$
$$y = y'x$$
$$y'x - y = 0$$



Slika 12.2: $y(x) = Cx$ su pravci koji prolaze kroz $(0, 0)$, a zbog $C \in \mathbb{R}$ mogu biti padajući i rastući.

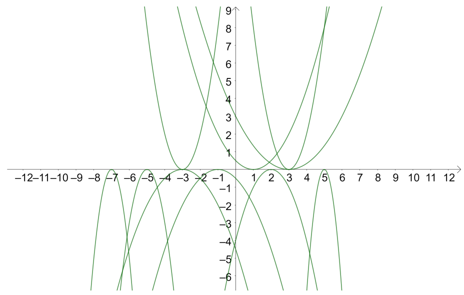
c)

$$y = Ce^x$$
$$y' = Ce^x$$
$$C = \frac{y'}{e^x}$$
$$y = \frac{y'}{e^x}e^x$$
$$y' - y = 0$$



Slika 12.3: $y(x) = Ce^x$ su eksponencijalne funkcije čiji graf prolazi kroz $(0, C)$, a zbog $C \in \mathbb{R}$ ti grafovi mogu biti rastući i padajući.

d)* Ovdje imamo dvije konstante koje moramo izraziti. Zato radimo prvu i drugu derivaciju od y.



Slika 12.4: $y(x) = C_1(x - C_2)^2$ su parabole kojima je tjeme točka $(C_2, 0)$, a zbog $C_1 \in \mathbb{R}$ mogu biti i konveksne i konkavne.

$$
\begin{aligned}
y' &= 2C_1(x - C_2)\\
y'' &= 2C_1\\
C_1 &= \frac{y''}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{y''}{2}2(x - C_2)\\
y' &= y''x - y''C_2\\
C_2y'' &= y''x - y'\\
C_2 &= \frac{y''x - y'}{y''}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= C_1(x - C_2)^2\\
y &= \frac{y''}{2}\left(x - \frac{y''x - y'}{y''}\right)^2\\
y &= \frac{y''}{2}\left(x - \frac{y''x}{y''} + \frac{y'}{y''}\right)^2\\
y &= \frac{y''}{2} \cdot \frac{(y')^2}{(y'')^2}\\
y &= \frac{(y')^2}{2y''}\\
(y')^2 &- 2yy'' = 0
\end{aligned}
$$