Poglavlje 13

Obične diferencijalne jednadžbe 2. reda

U ovom poglavlju naučit ćemo rješavati diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima, tj. jednadžbe oblika $y'' + py' + qy = f(x)$ pri čemu su p i q konstante, a $f(x)$ funkcija koja ovisi o varijabli x.

13.1 Homogene diferencijalne jednadžbe

Homogene diferencijalne jednadžbe drugog reda su oblika $y'' + py' + qy = 0$. Postupak rješavanja je da se od diferencijalne jednadžbe najprije napiše karakteristična jednadžba i to na način da se y zamijeni s 1, y' s λ i y'' s λ^2.
Karakteristična jednadžba je onda zapravo kvadratna jednadžba: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Ovisno o tipu rješenja koja ta kvadratna jednadžba ima, zapisujemo rješenje homogene diferencijalne jednadžbe.

1. REALNA RAZLIČITA RJEŠENJA ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) $\Rightarrow \quad y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
2. REALNO DVOSTRUKO RJEŠENJE ($\lambda_1 = \lambda_2$) $\Rightarrow \quad y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x}$
3. KOMPLEKSNO KONJUGIRANA RJEŠENJA ($\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm \beta i$)
   $\Rightarrow \quad y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$

C_1 i C_2 su realne konstante.

Zadatak 13.1.1. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Rješenje. Karakteristična jednadžba je

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Njezina su rješenja $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = 2$ pa je rješenje $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Zadatak 13.1.2. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Rješenje. Karakteristična jednadžba je

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

Njezina su rješenja $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ pa je rješenje $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Zadatak 13.1.3. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

Rješenje. Ovdje zapravo tražimo partikularno rješenje zadane jednadžbe, no najprije računamo opće rješenje.

Karakteristična jednadžba je

$$\lambda^2 + 4 = 0.$$

Njezina su rješenja $\lambda_{1,2} = \pm 2i = 0 \pm 2i$ pa zaključujemo da je $\alpha = 0$ i $\beta = 2$. Opće rješenje je onda oblika $y = e^{0 \cdot x} \left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x \right)$.

$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$

$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x$

$y'(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = -2C_1 \sin 0 + 2C_2 \cos 0 \quad \Rightarrow \quad 2C_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1$

Partikularno rješenje je $y = \sin(2x)$.

13.2 Nehomogene diferencijalne jednadžbe

Nehomogene diferencijalne jednadžbe su oblika $y'' + py' + qy = f(x)$.

Postupak rješavanja je da se najprije riješi pripadna homogena jednadžba: $y'' + py' + qy = 0$. Njezino rješenje označavamo s y_H (ili y_0).

Nadalje, na temelju sljedećeg kriterija odredi se partikularno rješenje (y_p). Konačno rješenje početno zadane diferencijalne jednadžbe je zbroj y_H i y_P, tj. $y = y_H + y_P$.

Kriterij dobivanja partikularnog rješenja (na temelju izgleda desne strane $f(x)$):

1. Ako je $f(x)$ oblika $e^{ax} P_n(x)$ gdje je $P_n(x)$ polinom n-tog stupnja i

   a) ako a nije rješenje karakteristične jednadžbe, onda je $y_P = e^{ax} Q_n(x)$ gdje je $Q_n(x)$ polinom n-tog stupnja s neodređenim koeficijentima,

b) ako je a rješenje karakteristične jednadžbe, onda je $y_P = xe^{ax}Q_n(x)$ gdje je $Q_n(x)$ polinom n-tog stupnja s neodređenim koeficijentima.

2. Ako je $f(x)$ oblika $e^{ax}\left(P_n(x)\cos(bx) + Q_m(x)\sin(bx)\right)$ gdje su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi n-tog i m-tog stupnja te

   a) ako a nije rješenje karakteristične jednadžbe, onda je
   $y_P = e^{ax}\left(S_N(x)\cos(bx) + T_N(x)\sin(bx)\right)$, N je maksimum brojeva n i m,

   b) ako a je rješenje karakteristične jednadžbe, onda je
   $y_P = xe^{ax}\left(S_N(x)\cos(bx) + T_N(x)\sin(bx)\right)$, N je maksimum brojeva n i m.

   $S_N(x)$ i $T_N(x)$ su polinomi stupnja N s neodređenim koeficijentima.

Napomena 13.2.1. Kad kažemo da je $Q_n(x)$ polinom s neodređenim koeficijentima, mislimo na neki općeniti polinom kojem koeficijenti mogu biti bilo koji brojevi. Formalno bismo ga zapisali kao

$$Q_n(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0,$$

gdje su $A_0, A_1, \cdots, A_n$ koeficijenti.
Npr. za $n = 0$ takav je $Q_0(x) = Ax^0 = A$, za $n = 1$ to je $Q_1(x) = Ax + B$, za $n = 2$ je $Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ itd.

Zadatak 13.2.2. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y'' - 8y' + 7y = 14$.

Rješenje. 1. homogena

$$y'' - 8y' + 7y = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$$

$$\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = 1$$

$$y_H = C_1 e^{7x} + C_2 e^{x}$$

2. nehomogena, $f(x) = 14$
Iz kriterija pod 1.) pri čemu je $a = 0$, $n = 0$ i $P_0(x) = 14$ zaključujemo da se radi o a) dijelu kriterija (jer $a = 0$ nije rješenje homogene jednadžbe) prema kojem je $y_P = e^{0x} \cdot A$ ($Q_0(x) = A$ je polinom stupnja 0 s neodređenim koeficijentom).

$$y_P = A$$
$$y_P' = 0$$
$$y_P'' = 0$$

Uvrstimo to u početnu diferencijalnu jednadžbu da bismo dobili A.

$$y'' - 8y' + 7y = 14$$
$$7A = 14$$
$$A = 2$$
$$y_P = 2$$

Konačno rješenje je $y = y_H + y_P = C_1e^{7x} + C_2e^x + 2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Zadatak 13.2.3. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y'' + 2y' + y = e^{2x}$.

Rješenje. 1. homogena

$$y'' + 2y' + y = 0$$
$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$$
$$y_H = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$$

2. nehomogena, $f(x) = e^{2x} = e^{2x} \cdot 1$

Iz kriterija pod 1.) pri čemu je $a = 2$, $n = 0$ i $P_0(x) = 1$ zaključujemo da se radi o a) dijelu (jer $a = 2$ nije rješenje homogene jednadžbe) prema kojem je $y_P = e^{2x} \cdot A$ ($Q_0(x) = A$ je polinom stupnja 0 s neodređenim koeficijentom).

$$y_P = Ae^{2x}$$
$$y_P' = 2Ae^{2x}$$
$$y_P'' = 4Ae^{2x}$$

Uvrstimo to u početnu diferencijalnu jednadžbu da bismo dobili A.

$$y'' + 2y' + y = e^{2x}$$

$$4Ae^{2x} + 4Ae^{2x} + Ae^{2x} = e^{2x}$$

$$9Ae^{2x} = e^{2x} \quad / : e^{2x}$$

$$9A = 1$$

$$A = \frac{1}{9}$$

$$y_P = \frac{1}{9}e^{2x}$$

Konačno rješenje je $y = y_H + y_P = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{1}{9}e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Zadatak 13.2.4. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y'' - y = e^x$.

Rješenje. 1. homogena

$$y'' - y = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1$$

$$y_H = C_1e^x + C_2e^{-x}$$

2. nehomogena, $f(x) = e^x = e^x \cdot 1$

Iz kriterija pod 1.) pri čemu je $a = 1$, $n = 0$ i $P_0(x) = 1$ zaključujemo da se radi o b) dijelu (jer $a = 1$ je rješenje homogene jednadžbe) prema kojem je $y_P = Axe^x$ ($Q_0(x) = A$ je polinom stupnja 0 s neodređenim koeficijentom).

$$y'_P = 1 \cdot Ae^x + Axe^x$$

$$y''_P = Ae^x + Ae^x + Axe^x = 2Ae^x + Axe^x$$

Uvrstimo to u početnu diferencijalnu jednadžbu da bismo dobili A.

$$y'' - y = e^x$$

$$2Ae^x + Axe^x - Axe^x = e^x$$

$$2Ae^x = e^x \quad / : e^x$$

$$2A = 1$$

$$A = \frac{1}{2}$$

$$y_P = \frac{1}{2}xe^x$$

Konačno rješenje je $y = y_H + y_P = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$.

Zadatak 13.2.5. Riješite diferencijalnu jednadžbu $y'' - 4y = (25x + 5)\cos x$.

Rješenje. 1. homogena

$$y'' - 4y = 0$$
$$\lambda^2 - 4 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \pm 2$$
$$y_H = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$$

2. nehomogena, $f(x) = (25x + 5)\cos x = e^{0x} \cdot ((25x + 5)\cos x + 0\sin x)$
Iz kriterija pod 2.) pri čemu je $a = 0$, $n = 1$, $P_1(x) = 25x + 5$, $m = 0$, $Q_0(x) = 0$ i $b = 1$ zaključujemo da se radi o a) dijelu (jer $a = 0$ nije rješenje homogene jednadžbe) prema kojem je $N = 1$ (veći od dva broja: 0 i 1) te $y_P = e^{0x} \cdot ((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x)$ ($Ax + B$ i $Cx + D$ su polinomi stupnja 1 s neodređenim koeficijentima).

$$\begin{aligned}
y_P &= (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x \\
y_P' &= A\cos x - (Ax + B)\sin x + C\sin x + (Cx + D)\cos x = \\
&= (A + Cx + D)\cos x + (C - Ax - B)\sin x \\
y_P'' &= C\cos x - (A + Cx + D)\sin x - A\sin x + (C - Ax - B)\cos x = \\
&= (2C - Ax - B)\cos x - (2A + Cx + D)\sin x
\end{aligned}$$

Uvrstimo to u početnu diferencijalnu jednadžbu da bismo dobili A, B, C i D.

$$y'' - 4y = (25x + 5)\cos x$$

$$(2C - Ax - B)\cos x - (2A + Cx + D)\sin x -$$
$$- 4(Ax + B)\cos x - 4(Cx + D)\sin x = (25x + 5)\cos x$$
$$(2C - 5Ax - 5B)\cos x + (-2A - 5Cx - 5D)\sin x = (25x + 5)\cos x + 0 \cdot \sin x$$

Iz toga dobivamo da za svaki x vrijedi

$$2C - 5Ax - 5B = 25x + 5$$
$$-2A - 5Cx - 5D = 0,$$

iz čega onda slijedi sustav jednadžbi

$$-5A = 25$$

$$2C - 5B = 5$$

$$-5C = 0$$

$$-2A - 5D = 0.$$

Jednostavno dobivamo da je $A = -5$, $B = -1$, $C = 0$ i $D = 2$. Partikularno rješenje je $y_P = (-5x - 1)\cos x + 2\sin x$.

Konačno rješenje je $y = y_H + y_P = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + (-5x - 1)\cos x + 2\sin x$.